随机微分对策

理论与应用

Stochastic Differential Games Theory and Applications

[美] Kandethody M. Ramachandran 著
Chris P. Tsokos
周德云 方学毅 译

国防工业出版社
National Defense Industry Press

随机微分对策理论与应用

Stochastic Differential Games Theory and Applications

（美）Kandethody M. Ramachandran
Chris P. Tsokos 著
周德云 方学毅 译

国防工业出版社
·北京·

著作权合同登记　图字：军－2014－052号

图书在版编目（CIP）数据

随机微分对策理论与应用/（美）康代瑟得·M.拉马钱德兰，（美）克里斯·P.托科什著；周德云，方学毅译.—北京：国防工业出版社，2017.3

书名原文：Stochastic Differential Games：Theory and Applications

ISBN 978－7－118－10920－7

Ⅰ.①随…　Ⅱ.①康…　②克…　③周…　④方…
Ⅲ.①随机微分方程　Ⅳ.①O211.63

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第044465号

Translated from 'Stochastic Differential Games：Theory and Applications'，ISBN 978－94－91216－46－6

※

国防工业出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路23号　邮政编码100048）

三河市众誉天成印务有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 710×1000　1/16　印张 13¼　字数 248千字

2017年3月第1版第1次印刷　印数 1—2000册　定价 69.00元

（本书如有印装错误，我社负责调换）

国防书店：（010）88540777　　发行邮购：（010）88540776

发行传真：（010）88540755　　发行业务：（010）88540717

译者序

微分对策起源于20世纪40年代 John Von Neumann 和 Oskar Morgenston 的先驱性工作，并自20世纪50年代至今受到广泛关注和深入研究。其数学化始于1954年美国兰德公司数学部 Rufus Isaacs 的系列备忘录。对策论因其天然适于军事领域的对抗性应用而备受重视，同时也因在经济、社会和工程等多个领域的成果而闻名于世。微分对策是研究具有多名相互冲突参与人的动力系统的建模与分析理论。初步看来，它和最优控制理论具有很多相似之处，但是微分对策的对策论特性使得其与最优控制的发展有着显著区别。从参与人数量的角度看，最优控制可以等价地看作单一参与人的微分对策。

20世纪60年代，研究人员开始致力于随机微分对策的研究。这些对策过程的随机性在于参与人对系统状态的观测或状态方程本身存在的噪声。这使得微分对策的理论研究更加贴合于实际系统和应用环境中内在的不确定性。关于随机微分对策的严格论证始于20世纪80年代末 Fleming 和 Souganidis 的工作。尽管经过数十年的研究工作，随机微分对策仍有许多重要的基础问题有待于研究解决，如参与人所获得的状态信息中含有噪声时的非协作均衡解的存在性和唯一性等特性。而且当双方参与人所获得的状态信息中含有噪声时，鞍点策略的推导极为复杂。

目前，国内在随机微分对策领域的研究十分活跃。然而，很难找到随机微分对策的系统性中文专著。为了进一步推动国内在随机微分对策方面的研究，我们考察了国外近期在相关领域的著作，选定了南佛罗里达大学 Ramachandran 和 Tsokos 教授近期所著的《Stochastic Differential Games：Theory and Applications》一书进行翻译，并将译著献给国内的读者。

原著作者之一 Chris P. Tsokos 教授曾在通用动力公司从事工程技术工作，随后进入大学进行教学科研工作。他于1975年即获得南佛罗里达大学“杰出大学教授”荣誉称号，在统计学和对策论领域从事了多年研究工作。Tsokos 教授是 Sigma Xi 科学研究会成员、美国统计学会会士，获得了美国杰出教育家称号、国际杰出教育家称号和 Sigma Xi 杰出研究奖等三十余项荣誉，其工作曾受到美国海军的表彰。其著作《Stochastic Differential Games：Theory and Applications》

对随机微分对策领域的发展现状进行了全面的论述和深入的分析，并对随机线性追逃问题、二人零和随机微分对策问题以及多人对策等问题的解的性质、弱收敛性以及数值解算方法等方面进行了深入的探讨，可以作为相关领域科研人员和工程技术人员的参考工具。

在译著付梓之际，我要特别感谢国防工业出版社的牛旭东编辑和相关所有工作人员。在著作的翻译过程中，是他们始终孜孜不倦地鼓励我们，耐心地给予我们关心和支持，并陪伴我们跋山涉水、度过难关，最终坚持下来。尽管如此，限于译者有限的水平，疏漏缺憾之处在所难免。在此，我们诚挚欢迎读者的批评与指正。

周德云

2017 年 2 月

前　言
PREFACE

在人类社会中,国家之间和工业环境中充斥着大量的竞争或战争冲突。20 世纪中期诞生的博弈论为采用严格数学方法分析这类问题带来了深刻的洞悉性手段。在 Von Neumann 和 Morgenston 的开创性工作之后,现代对策论得以蓬勃发展。在最近的几十年中,R. Isaacs、L. S. Pontryagin 及其学派在微分对策方面的先驱性工作使得动态对策理论框架得以深化和扩展。同时,Shapley 的先驱性工作使得随机对策论获得长足的发展。本书将为读者揭示非协作对策论中的若干基本方法,并给出若干数值方法和相关的应用。

从微分对策的早期发展开始,它就对多种学科,如数学、经济学、系统理论、工程学、运筹学、生物学、生态学和环境科学等产生了深远的影响。现代对策论建立在广泛的数学理论和计算方法基础之上,并拥有大量的应用和研究。许多领域都将其视为重要的工具。许多对策论学者,如赢得诺贝尔经济学奖桂冠的 John Forbes Nash, Jr. , Robert J. Aumann 和 Thomas C. Schelling,都阐明了对策论在经济学方面的重要性。简而言之,对策论对于人类相互活动的分析方法具有潜在的重塑能力。

本书结构如下:第 1 章将对随机微分对策进行一般性的介绍和综述,并给出背景材料。第 2 章简单介绍线性追踪 - 逃逸微分对策,这使我们对相关概念有了更好的理解。第 3 章将分析二人零和随机微分对策问题以及多种解决方法,本章还介绍了多种形式的对策问题。第 4 章给出了若干类随机线性追踪 - 逃逸对策问题的正规解;第 5 章将讨论 N 人随机微分对策问题。一般而言,扩散问题相对于现实世界问题来说不是很好的逼近方法。为了解决这个问题,第 6 章将介绍二人随机微分对策的弱收敛性方法。在第 7 章中,将研究多人对策问题的弱收敛性方法。第 8 章将针对两类不同的支付结构:赔付和各态遍历支付以及它们的非零和案例介绍一些有用的数值方法。第 9 章将给出随机微分对策在现实世界中的金融和竞争性广告方面的应用。

在此对本书初稿评审人所提出的宝贵评论和建议表达诚挚的感谢。

Dr. M. Sambandham,数学教授,*International Journal of Systems and applications* 期刊主编。

Dr. G. R. Aryal,普渡大学助理教授,印第安纳州卡鲁梅。

Dr. Rebecca Wooten，南佛罗里达大学数学和统计学助理教授，佛罗里达州坦帕。

Dr. V. Laksmikatham，佛罗里达理工大学著名数学教授，已退休。

Dr. Yong Xu，瑞德福大学助理教授。

Dr. Kannan，乔治亚大学名誉教授。

Dr. Geoffrey O. Okogbaa，南佛罗里达大学工业工程和管理科学教授，佛罗里达州坦帕。

非常感谢 Atlantis 出版社的编辑人员。特别感谢项目经理 Mr. Willie van Berkum.

最后，特别感谢 Beverly DeVine – Hoffmeyer 在本书录入方面的出色工作。

K. M. Ramachandran

C. P. Tsokos

目 录
CONTENTS

第1章
概述、研究现状和背景材料

1.1 引　言

当今世界的技术革命促使科学家和经济学家需要更好地把握现实世界,这推动了对策论的诞生。对策论解决的是多个决策制定者之间的策略性互动问题。这些互动问题囊括了从完全非协作到完全协作的多种类型。通常也称决策制定者为参与人或玩家。每个参与人在多个互动性策略(行动或等价的决策变量)中进行选择,以最大化效用(或效益)目标函数或最小化代价(或损失)目标函数。如果参与人能够达成一致,以合作的方式采取行动或进行决策,使所有的参与人都能够从中获益,则属于协同对策领域。协定、联盟和超额效用分配等概念在协作对策中具有非常重要的地位。在本书中,我们将不考虑协同对策问题,而仅介绍非协同对策,即参与人之间不存在任何协作关系。

对策论的起源和发展可以追溯到 John Von Neumann 和 Oskar Morgenston 于 1944 年发表的先驱性文献[201]。20 世纪 50 年代,制导拦截导弹的出现使得追踪和逃逸问题成为当时的核心研究内容。微分对策的数学化和研究始于 1954 年兰德公司的一系列备忘录,其作者是该公司数学部的 Rufus Isaacs[90]。这些工作和他之后的研究被编入文献[91],激发了许多研究者对该领域的兴趣和大量后继研究工作。环球影业公司制作的奥斯卡影片《美丽心灵》于 2001 年播出之后,相当多的人关注到对策论及其应用。该影片讲述的是关于 John Forbes Nash 的故事。许多博弈论专家,如 Browne[33]、Ho 等[89]、Sircar[177]、Yavin[211,212] 和 Yeung[214-216],在研究中均采用 Nash 均衡的概念,如分析两名或多名决策制定者进行策略性交互的结果。Nash 关于非协作对策论的工作[139,140]被公认为 20 世纪的杰出知识进步之一[138]。Nash 均衡公式对经济学和社会科学等多个研究领域产生了本质性的影响。

Isaacs[91]关于微分对策方面的研究出版之时正是人们广泛对最优控制理论抱以兴趣的时候。微分对策和最优控制之间的关系进一步激发了研究人员对前者的兴趣[25]。关于控制理论和对策论之间的关系,读者可以参考 Krasovskii 和 Subbotin 的著作[100]。早期关于微分对策和最优控制理论的工作几乎是同时出

现的，两者相互独立。乍看起来，微分对策似乎可被自然地看作一种由控制目标可能相互冲突的多名参与人一同进行控制的过程。然而，进一步的研究表明这两个领域的发展路线互不相同。虽然两者都存在系统演化的特征，但是微分对策还额外具有对策论方面的特征。其结果是最优控制中发展起来的技术不能简单挪用到微分对策中来。

20 世纪 60 年代，研究人员开始致力于随机微分对策的研究。这些对策过程的随机性在于参与人对系统状态的观测或状态方程本身存在噪声。Ho 采用变分技术来解决随机微分对策问题[87]。其中一个参与人控制状态，尝试使误差最小化并迷惑仅能对状态进行有噪测量的对手，另一人尝试使其误差估计最小化。随后 Basar 和 Haurie 在他们的工作中考虑了追踪 - 逃逸问题，其中追踪者具有完善的知识，而逃逸者只能对对策过程的状态进行有噪测量[15]。Bafico[5]、Roxin 和 Tsokos[170] 在他们的的工作中给出了随机微分对策的定义。Nocholas 在其工作中讨论了随机微分对策和控制论之间的关系[141]。在 20 世纪 70 年代，Elliot[47-50]、Bensoussan 和 Lions[22]、Bensoussan 和 Friedman[23,24] 以及其他许多研究人员都采用鞅和变分不等式技术对随机微分对策解的存在性和唯一性进行了严格的论证。随机微分对策问题具有多种类型，如追踪 - 逃逸对策、零和对策、协同和非协同对策以及其他动态对策类型。对追踪 - 逃逸对策、黏性解、具有赔付(discounted payoff)目标函数的随机对策、数值解法以及其他论题感兴趣的读者，我们推荐 Bardi 和 Raghavan 的著作[7]。该著作中有大量关于上述论题的信息。我们将把本书所涉及的内容严格限制在非协同随机微分对策上面。

微分对策早期工作建立在动态规划方法之上，现在称为 Hamiltonian - Jacobi - Isaacs(HJI)方法。许多作者致力于微分对策值这一概念的精确化以及 HJI 方程的严格推导方面。在多数情况下 HJI 方程没有典型解。一般也不存在 HJI 方程的光滑解，并且其非光滑解是高度不唯一的。部分相关工作见 Berkovitz[25]、Fleming[61]、Elliot[47,49]、Firedman[67]、Kalton, Krasovskii 和 Subbotion[95]、Roxin 和 Tsokos[182]、Uchida[197] 和 Varaiya[198,199] 等人的文献。在 20 世纪 80 年代，出现了 Hamilton - Jacobi 方程的广义解概念，也即黏性解。Crandall 和 Lions[43]、Fleming 和 Soner[63]、Lions 和 Souganidis[124-126]、Souganidis[180] 和 Nisio[143] 提出了一种可以作为 HJI 方程唯一解且满足适当边界条件的函数值描述方法。该方法为基于动态规划的微分对策求解算法的收敛性和收敛速度提供了分析工具。Swiech[190] 对无穷维空间中 Hamilton - Jacobi - Bellman - Isaacs 方程的黏性解进行了严格的分析。在 20 世纪 90 年代，Borkar 和 Ghosh[31] 针对随机微分对策问题提出了一种基于占用度量技术的方法。该方法将控制条件放宽，采用占用度量来表示对策过程的动态特性，从而使微分对策问题转化为占用度集上的静态对策问题。Ramachandran 指出，该方法的优点在于它可以从更恰当的物理宽带噪声角度来考虑微分对策问题，并采用弱收敛方法进行分析[158,159,163]。其结果

是可以从统一的角度来考虑离散对策和微分对策问题。

在微分对策中,信息的结构具有重要作用。上述所有文献都假设在对策过程中,所有参与人都知道关于全过程的完整信息。然而,在许多应用中情况并非如此。Friedman[68]、Ho[88]、Olsder[145]、Ramachandran[160]以及 Sun 和 Ho[184]均对微分对策中信息结构的互动进行了描述。相对于部分可观测的随机控制问题,具有不完全信息的随机微分对策问题的研究进展并不大。

关于随机微分对策计算方法的早期研究可见 Kushner 和 Chamberkain[111]的工作。随着 Kushner 和 Dupuis[112]等关于随机控制数值算法工作的展开,在随机微分对策数值解方面也取得了一些研究成果,如 Kushner 的研究工作[107,108]。关于 Issacs 方程黏性解的数值算法,可以参考 Basar 和 Haurie 的工作[16]。同时,基于 Ramachandran[158]以及 Ramachandran 和 Rao[163]关于弱收敛性分析的结果,我们可以更为容易地针对 Kushner 和 Dupuis[112]所考虑的微分对策问题类型构造相应的数值算法,并研究新的求解算法。

从控制论一般形式走向对策论的第一步在于状态和控制变量的区分上。其策略的本质很清楚,即控制量是状态变量的函数。这可以看成离散对策论的推广,它将能应用于包含格斗问题在内的广泛领域中。在 *Differential Games: A Mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization* 一书中,Isaacs 给出了关于体育竞技和钢铁制造以及若干追逐和追踪 - 逃逸问题的例子。

Pontryagin 等于 1962 年出版的 *The Mathematical Theory of Optimal Processes* 一书[152]所研究的最小化问题可以看成一种单一参与人的微分对策问题。Kelendzeridze 将其扩展为两个参与人的问题[97]。同时,美国在这一方面也着手进行了研究。控制理论可以等价地视为单一参与人的微分对策问题,即它是微分对策问题的一个特殊情况。

在 20 世纪 60 年代早期,当人们意识到微分对策和最优控制之间的联系时,便爆发了大量的研究工作。其中有许多工作是由控制领域的学者进行的。因此,人们倾向于把微分对策看作最优控制的一种扩展,但后来人们逐渐认识到这一观点无法令人满意。

简单地说,微分对策是一种双方面的最优控制问题。更精确地讲,最优控制理论可以看作一种微分对策问题,而不能把微分对策简单地看成最优控制理论的扩展。两者之间存在很重要的区别:首先,单独参与人问题中所期望的反馈控制在对策论中是必须的;其次,在更一般的对策论中,不能确定对抗过程是否会终止。

正如 Bryson 和 Baron[89]在 *Generalized Control Theory* 中所讨论的,可以将最优控制和微分对策看作动态优化这一更大的理论框架下的特例。

对于优化问题的确定性和随机性可以分别从 3 个基本部分进行考虑:①指

标(支付)函数;②控制器或参与人;③参与人所能获取的信息。

在最优控制中,仅有一个控制器。该控制器将在某一信息集的基础上最小化目标函数。尽管这种模型能够解释一些现实生活中的现象,但是我们可以很快考虑到其他存在多个信息集和多个协同或非协同智能控制器的情况。很有可能各个控制器所获得的信息并不相同。我们在表 1.1.1 中进行了总结。其中最后一列给出了参考文献。

表 1.1.1 广义控制理论问题概要

	目标函数			控制器数量			信息			参考文献
	1	2	N2	单独 J	两个 J_1-J_2	多个	完全	不完全	多组或不完整	
确定性最优控制	√			√			√			
随机最优控制	√			√				√		
向量值优化问题	√					√	√			Zadel DaChuna 和 Polak
零和微分对策		√			√		√			Ho, Bryson 和 Baron
随机零和微分对策		√			√				√	Behn, Ho Rhodes 和 Luenberger Willman
非零和微分对策			√			√	√			Case Starr 和 Ho
随机非零和微分对策			√			√			√	

1.2 节将分别对确定和随机微分对策进行简要的介绍。1.3 将节概述 20 世纪六七十年代的随机微分对策研究情况。1.4 节给出了问题的基本形式。在本章的结尾将给出一些基本定义。

1.2 确定性微分对策:研究现状简介

本节将简单介绍确定性微分对策及其相关推广方面的研究现状[141]。

1.2.1 二人零和微分对策状态变量和控制变量

本小节标题所示二人零和微分对策中的两个参与人具有相反的目标。状态变量和控制变量的概念借鉴控制理论而来。Isaacs[91] 在微分对策理论中指出,两个参与人在任意时刻都知道状态变量值(具有完善信息的对策);参与人基于这些精确值进行决策。控制变量是指参与人能够操控的变量。

对策论最初的发展源自于对社会科学和经济学中问题的研究。然而，微分对策研究的主要动机来自于对军事问题研究，如追踪-逃逸对策问题。

(1) 追踪者(pursuer)和逃逸者(evader)：从早期微分对策理论及其应用直到后面的追踪问题，追踪者和逃逸者均分别采用 P 和 E 表示。根据惯例，假设 P 和 E 的控制变量分别为 u_i 和 v_i。

(2) 运动学方程(kinetic equations)：点 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in E$(其中 E 指对抗空间，通常为 $\mathbf{R}^n$)的运动学方程如下：

$$\dot{x}_j=f_j(t,x_1,\cdots,x_n,u_1,\cdots,u_p,v_1,\cdots,v_q)\quad (j=1,\cdots,n)$$

该方程可以简写为 $\dot{\boldsymbol{x}}=f(t,x,u,v)$，其中 $x_1,\cdots,x_n$ 为状态变量，$u_1,\cdots,u_p$ 和 $v_1,\cdots,v_q$ 为控制变量。我们定义符号 $\cdot \equiv \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$。

(3) 终端曲面(terminal surface)：当 $\boldsymbol{x}$ 抵达终端曲面 C，即 E 的部分边界，或到达预定的时刻 T 时，对策过程终止。因为许多微分对策研究都是针对追踪问题的，所以曲面 C 可以看作追踪者捕获逃逸者的所有点的集合。出于这个原因，P 和 E 也用于表示相应参与人的参考点。当 P 和 E 充分接近时，对策过程就可以终止，而不必等到 P 和 E 重合。很明显，如行星和火箭这样的大质量物体会在 $d(P,E)=0$ 之前发生碰撞，其中 $d(P,E)$ 表示参考点 P 和 E 之间的距离；因此我们仅要求 $d(P,E)<l$，其中 l 为正数。这种情况下，我们通常可以把捕获区看作球形。

(4) 支付(payoff)：支付是一个数值量，所有参与人都要最大化或最小化该数值量。对于连续时间对策问题(具有连续输出)，支付形式为

$$P(u,v)=H(t_{\mathrm{f}})\div\int G(x,u,v)\,\mathrm{d}t$$

其中积分路径在 E 上，H 是 C 上的光滑函数，为对策终端值。如果 $H=0$，则对策过程具有一个积分型支付。如果 $G=0$，则对策过程具有一个终端型支付。对于以捕获时间为性能指标的追踪问题有 $G=1$。

(5) 微分对策值(value)：对于追踪者 P，其控制量 u 的作用是最小化支付；而对于逃逸者 E，其控制量 v 的作用是最大化支付。微分对策值定义为支付的极小极大化，为

$$v(x)=\min_u\max_v(\text{支付})$$

微分对策的解：微分对策的解不是一个严格的概念。当满足以下一个或多个条件时，可以认为得到了微分对策问题的解：

① 确定了函数值；

② 找到了最优路径；

③ 得到了最优策略函数，即

$$\text{定义在 } E \text{ 上的 } u^{\circ}(x) \text{ 和 } v^{\circ}(x)$$

Isaacs 没有大量使用经典变分技术，他的方法是求解优化问题的动态规划方法的典型。1957 年，Berkowitz 和 Fleming 应用严格变分技术来求解简单微分对策问题[27]。后来 Berkowitz[26] 扩展了可求解的问题的范围。

1.2.2 追踪－逃逸微分对策

一个二人零和微分对策问题可以表述如下：

为支付

$$J = H(x(t_f),t_f) + \int_{t_0}^{t_f} G(t,x,u,v)\,\mathrm{d}t \tag{1.2.1}$$

确定一个在约束

$$\dot{x} = f(t,x,u,v);x(t_0) = x_0 \tag{1.2.2}$$

和

$$u \in U(t),v \in V(t) \tag{1.2.3}$$

下的鞍点。式中：J 为支付；x 为对策的状态；u,v 为策略，是位于允许策略集合 U 和 V 中的分段连续函数。

该鞍点是一个策略，对(u°,v°)满足

$$J(u^\circ,v) \leqslant J(u^\circ,v^\circ) \leqslant J(u,v^\circ) \tag{1.2.4}$$

式中：$u \in U,v \in V$。

若式(1.2.4)成立，则 u°和 v°称为最优纯策略，$J(u^\circ,v^\circ)$称为对策的值。

许多控制理论专家都对如何控制一个动态系统，使之命中移动目标这一问题进行了研究。其中多数研究工作仅允许追踪者具有控制自身运动的能力。Ho、Bryson 和 Baron 研究了追逃双方均能控制自身运动的情况，得到成功捕获的条件和达到最优的条件[89]。他们在对导弹和目标运动方程进行常规简化近似的基础上，得出导弹制导系统中广泛使用的比例导引律是一种最优追踪策略。

Ho 等考虑了以下对策。即，为支付

$$J = \frac{a^2}{2}\|\boldsymbol{x}_p(t_f) - \boldsymbol{x}_e(t_f)\|^2\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[\|\boldsymbol{u}(t)\|^2\boldsymbol{R}_p(t) - \|\boldsymbol{v}(t)\|^2\boldsymbol{R}_e(t)]\mathrm{d}t \tag{1.2.5}$$

确定一个在约束

$$\dot{\boldsymbol{x}}_p = \boldsymbol{F}_p(t)\boldsymbol{x}_p + \overline{\boldsymbol{G}}_p(t)u;\boldsymbol{x}_p(t_0) = \boldsymbol{x}_{p_0} \tag{1.2.6}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_e = \boldsymbol{F}_e(t)\boldsymbol{x}_e + \overline{\boldsymbol{G}}_e(t)v;\boldsymbol{x}_e(t_0) = \boldsymbol{x}_{e_0} \tag{1.2.7}$$

和

$$\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}(t) \in \mathbf{R}^m$$

下的鞍点。式中：$\boldsymbol{x}_p$ 为代表追踪者状态的 n 维向量；$\boldsymbol{u}(t)$为追踪者的 m 维控制向量；$\boldsymbol{F}_p(t)$，$\overline{\boldsymbol{G}}_p(t)$为 t 上的$(n \times n)$和$(n \times m)$维连续函数矩阵；$\boldsymbol{F}_e(t)$，$\overline{\boldsymbol{G}}_e(t)$的定义与之类似；$\boldsymbol{R}_p(t)$，$\boldsymbol{R}_e(t)$为$(m \times m)$维正定矩阵并且 $\boldsymbol{A} = [I_k \vdots 0]$是一个$(k \times$