第1章　函数、极限与连续

在我们周围的世界中，变化的量随处可见，如温度、湿度、降雨量等，如果稍加注意，会发现这些变化的量随时间、地域、季节的不同而不同. 同样，在经济领域中，这种变化的量也是随处可见的，如国民经济增长率、商品的产量、价格等. 这些变化的量都有一个共同的特点，那就是它们之所以变化是因为受到其他一些变化的量的制约或者与其他一些变化的量的相互制约. 例如，某种商品的市场需求量是受该商品的价格影响的，它随价格的变动而化. 反之，该商品的价格也会受市场需求量的影响. 又如，银行利率受到国家经济政策中多种因素的影响，所谓多种因素也是一些变化的量. 变化的量之间相互制约的关系是普遍存在的，这种关系用数学的方法加以抽象和描述便得到一个重要的概念，就是函数. 它是我们定性、定量地研究各种变化的量的一个非常重要的工具.

1.1 函　数

➢知识目标

理解函数的概念，记忆函数的几种特性，熟悉常用函数的图像.

➢能力目标

运用本节所学的知识分析实际问题中的函数关系.

➢知识正文

在生产、生活实际和科学研究过程中，经常需要考察两个彼此有关联的变量，比如曲线上点的纵坐标与横坐标；弹簧的恢复力与它的形变长度等. 多数情况下，变量间的关系可用函数关系来描述. 下面观察几个具体例子.

引例1　半径为 r 的圆的面积公式是：$S=\pi\cdot r^2$.

上式中的半径 r 与圆的面积 S，这两个变量之间存在着对应关系. 面积 S 随着半径 r 的变化而变化.

引例 2 某一时期银行的人民币整存整取定期储蓄存期与年利率如表 1-1 所示.

表 1-1 人民币整存整取定期储蓄存期与年利率

存期	3 个月	6 个月	1 年	2 年	3 年	5 年
年利率/%	3.33	5.40	7.47	7.92	8.28	9.00

这张表格就确定了存期与年利率这两个变量之间的对应关系.根据不同的存期可以知道整存整取定期储蓄的年利率.

引例 3 变量 p 依赖于变量 q 的关系式:$p=10-3q^2$.

以上三个例子所表示的关系均为函数关系.

1.1.1 函数

1.函数的概念

定义 1-1 设 x 和 y 是两个变量,若当变量 x 在非空数集 D 内任取一个数值 x,按照某个对应法则 f,总有唯一确定的数值 y 与之对应,则称变量 y 为变量的 x 的函数.记为 $y=f(x)$.D 称为函数的定义域,x 称为自变量,y 称为因变量.

如果 x_0 是函数 $y=f(x)$ 的定义域中的一个值,则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 有定义.函数在点 x_0 的对应值称为函数在该点的函数值.记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

当自变量 x 在定义域内取每一个数值时,对应的函数值的全体称为函数的值域.记为 M.

通过函数的定义不难发现,确定一个函数,起决定作用的因素包括以下两个方面.

(1) 对应法则(规则)f(即因变量 y 对于自变量 x 的依存关系).

(2) 定义域 D(即自变量 x 的变化范围).

如果两个函数的"对应法则 f"和"定义域"都相同,那么这两个函数就是相同的(或称相等的);否则就是不相同的.因此,只要对应法则相同,定义域相同,那么两个函数就表示同一个函数.

例 1 下列各对函数是否相同?为什么?

(1)$f(x)=\dfrac{x}{x}$,$g(x)=1$; (2)$f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$,$g(x)=\sin x$;

(3)$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$,$g(x)=x\cdot\sqrt[3]{x-1}$;(4)$f(x)=\lg x^2$,$g(x)=2\lg x$.

解 (1) 不相同.$D_1=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,$D_2=(-\infty,+\infty)$,两个函数的定义域不同,因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同.

(2) 不相同.虽然两个函数的定义域都是$(-\infty,+\infty)$,但其对应法则不同,$f(x)$ 的 $M_1=[0,1]$,$g(x)$ 的值域 $M_2=[-1,1]$.因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同.

(3) 相同.定义域均为$(-\infty,+\infty)$,对应法则也相同,因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同.

(4) 不相同.$D_1=R$,$D_2=(0,+\infty)$,两个函数的定义域不同,因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同.

2. 函数的定义域

在研究函数时，必须注意它的定义域，在实际问题中，函数的定义域应根据问题的实际意义来确定，例如，圆的半径的变化范围为$(0,+\infty)$. 对于用数学式子表示的函数，确定函数定义域的原则是使该数学式子的运算有意义.

例 2 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}+\sqrt{4-x^2}$； (2) $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x-1)}+\sqrt{5-x}$.

解 (1) 对于$\dfrac{1}{x+2}$，要求 $x+2\neq 0$，即 $x\neq -2$；

对于$\sqrt{4-x^2}$，要求 $4-x^2\geqslant 0$，从而得出 $-2\leqslant x\leqslant 2$.

因此，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+2}+\sqrt{4-x^2}$ 的定义域是 $D=(-2,2]$.

(2) 对于 $\ln(x-1)$，要求 $x-1>0$，即 $x>1$；

对于$\dfrac{1}{\ln(x-1)}$，要求 $\ln(x-1)\neq 0$，于是 $x-1\neq 1$，即 $x\neq 2$；

对于 $\sqrt{5-x}$，要求 $5-x\geqslant 0$，即 $x\leqslant 5$.

因此，函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x+1)}+\sqrt{5-x}$ 的定义域是 $D=(1,2)\cup(2,5]$.

3. 函数的表示方法

函数的表现形式多种多样，其表示方法也有很多种，主要有以下几种.

(1) 表格法：变量之间的关系，用表格的形式表现出来. 本节中引例 2 就是用表格法表示函数. 表格法的优点是简洁明了，但不全面、不直观.

(2) 解析法：变量之间的关系，用解析式子表达出来. 解析法是函数最常用的表示方法，经常所见到的函数大多用这种表示方法. 本节引例 3 就是这种情况. 解析法的特点是准确、全面，但不直观.

(3) 图形法：将变量之间的关系，用坐标系上的图像表达出来. 这种方法直观明了，但不全面，有时不准确.

习惯上，如果可能的话，常用解析法研究函数，并结合图形进行直观分析.

4. 分段函数

把定义域分成若干部分，函数关系用不同的式子分段表达的函数称为分段函数. 分段函数是高等数学中常见的一种函数，例如，在中学数学课出现过的绝对值函数可以表示为

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}.$$

例 3 符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ （见图 1 - 1）.

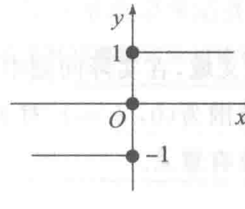


图 1-1

符号函数就是一个分段函数，它的定义域为$D=(-\infty,+\infty)$，值域为$R=\{-1,0,1\}$.

注意：分段函数是由几个关系式合起来表示一个函数，而不是几个函数. 对于自变量x在定义域内的某个值，分段函数y只能确定唯一的值. 分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并运算.

例 4　设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+3, & x>0 \\ 2, & x=0 \\ 5x, & x<0 \end{cases}$，求$f(2)$，$f(-3)$，$f(0)$及函数的定义域.

解　函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

$$f(2)=2^2+3=7;$$
$$f(-3)=5\cdot(-3)=-15;$$
$$f(0)=2.$$

1.1.2　函数的几种特性

1. 函数的单调性

设函数$y=f(x)$在区间(a,b)内有定义，如果对于(a,b)内的任意两点x_1，x_2，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)<f(x_2)$，则称此函数$f(x)$在(a,b)内是单调增加的；当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)>f(x_2)$，则称此函数$f(x)$在(a,b)内是单调减少的.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数. 单调增区间和单调减区间统称为单调区间. 在单调增区间内，函数图形随x的增大而上升(见图 1-2)；在单调减区间内，函数图形随x的增大而下降(见图 1-3).

例如，函数$y=x^2$在区间$(-\infty,0]$内单调减少，在区间$[0,+\infty)$内单调增加，$(-\infty,0]$，$[0,+\infty)$是它的单调区间.

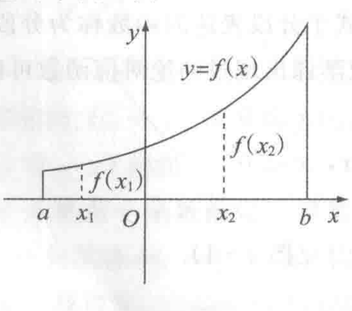


图 1-2

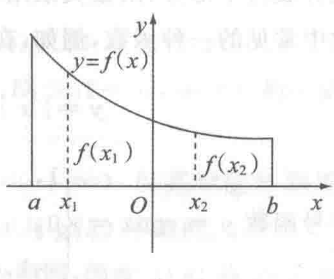


图 1-3

例 5　讨论函数 $y = x^2$ 的单调性.

解　因为对任意 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$，当 $x_1 < x_2$ 时

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) < 0,$$

所以 $f(x_1) < f(x_2)$，因此函数 $y = x^2$ 在$[0, +\infty)$ 上是单调增加的.

同理，在$(-\infty, 0]$上是单调减少的. 因此，函数在定义域$(-\infty, +\infty)$ 内不是单调函数.

2. 函数的奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果对于任意 $x \in D$，恒有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任意 $x \in D$，恒有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

奇函数的图形关于原点对称(见图 1－4)，偶函数的图形关于 y 轴对称(见图 1－5).

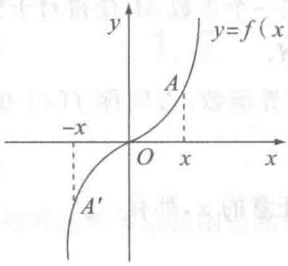


图 1－4

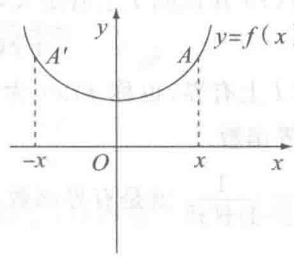


图 1－5

例 6　判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$；　　(2) $f(x) = x^3 - 2$；

(3) $f(x) = \dfrac{a^{-x} + a^x}{2}, (a > 0, a \neq 1)$；　　(4) $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

解　由函数奇偶性的定义可知：

(1) 因为 $f(-x) = 2(-x)^4 + 3(-x)^2 + 1 = 2x^4 + 3x^2 + 1 = f(x)$.

所以 $f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$ 是偶函数.

(2) 因为 $f(-x) = (-x)^3 - 2 = -x^3 - 2 \neq f(-x)$，且 $f(-x) \neq f(x)$.

所以 $f(x) = x^3 - 2$ 既非奇函数，也非偶函数.

(3) 因为 $f(-x) = \dfrac{1}{2}(a^{-(-x)} - a^{-x}) = -\dfrac{1}{2}(a^{-x} - a^{x}) = -f(x)$.

所以 $f(x) = \dfrac{a^{-x} + a^x}{2}$ 是奇函数.

(4) 因为 $f(-x) = \log_a(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) = \log_a(-x + \sqrt{x^2 + 1})$

$$= \log_a \frac{(-x + \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \log_a \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= -\log_a(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x).$$

所以，$f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 是奇函数.

3. 函数的周期性

一般地，对于函数 $y = f(x)$，如果存在一个常数 $T \neq 0$，使得对于任意 $x \in D$，必有 $x \pm$

$T \in D$,且恒有

$$f(x \pm T) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数. 其中 T 称为函数 $f(x)$ 的周期,通常所说的周期是指它的最小正周期.

周期性是宇宙的固有特性. 有很多函数是周期函数,中学里学习的三角函数都是周期函数. 例如 $y = \sin x$, $y = \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数;$y = \tan x$, $y = \cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

对于周期函数,我们只要知道它在一个周期上的性质,就可以知道整个函数的性质.

4. 函数的有界性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果存在一个正数 M,使得对于任意 $x \in I$,都有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界,也称 $f(x)$ 为 I 上的有界函数. 否则称 $f(x)$ 在 I 上无界,也称 $f(x)$ 为 I 上的无界函数.

例如,函数 $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ 就是有界函数,因为对任意的 x,都有

$$\left|\frac{1}{1+x^2}\right| \leqslant 1$$

这里的 1 就可以看作正数 M.

注意:有界性是依赖于区间的. 例如函数 $y = 3x+1$ 在 $[0,2]$ 上是有界的,因为无论 x 取 $[0,2]$ 上任何实数,都有关系式 $1 \leqslant y \leqslant 7$ 成立,即 $|y| \leqslant 7$,这里 M 取 7. 而函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界,但在区间 $(1,2)$ 内有界.

1.1.3 反函数

定义 1-2 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D,值域为 M,如果对于 M 中的每一个 y 值,在 D 中有使 $y = f(x)$ 的唯一的 x 值与之对应,则其对应法则记为 f^{-1},这个定义在 M 上的函数 $x = f^{-1}(y)$ 称为 $y = f(x)$ 的反函数,或称它们互为反函数.

函数 $y = f(x)$,x 为自变量,y 为因变量,它的定义域为 D,值域为 M;函数 $x = f^{-1}(y)$,y 为自变量,x 为因变量,它的定义域为 M,值域为 D.

习惯上用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,因此将 $x = f^{-1}(y)$ 改写为以 x 为自变量,以 y 为因变量的函数 $y = f^{-1}(x)$,可以说 $y = f^{-1}(x)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数. $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称(见图 1-6).

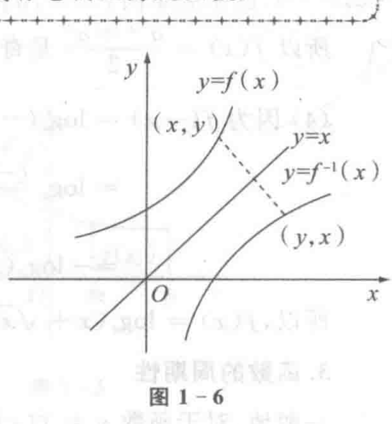


图 1-6

例 7 求 $y=4x+2$ 的反函数.

解 由 $y=4x+2$ 得到 $x=\dfrac{y-2}{4}$,然后交换 x 与 y 的位置,得 $y=\dfrac{x-2}{4}$. 即 $y=\dfrac{x-2}{4}$ 是 $y=4x+2$ 的反函数.

例 8 求函数 $y=e^x-1, x\in(-\infty,+\infty)$ 的反函数.

解 由 $y=e^x-1, x\in(-\infty,+\infty)$ 解出 x,得

$$x=\ln(y+1),$$

交换 x 与 y 的位置,得所求的反函数为:

$$y=\ln(x+1), x\in(-1,+\infty).$$

1.2 初等函数

➢知识目标

在理解基本初等函数等函数图形和性质的基础上,理解复合函数的概念,进而理解初等函数的概念.

➢能力目标

会建立实际问题的函数关系.

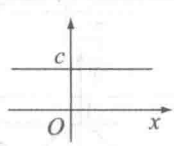
➢知识正文

1.2.1 初等函数

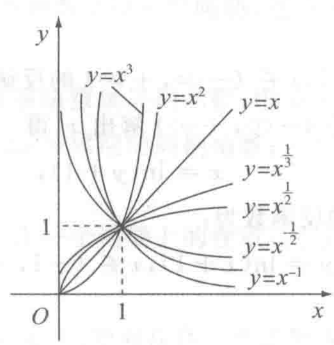
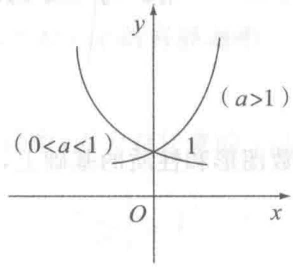
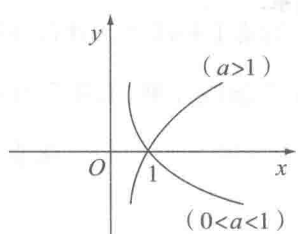
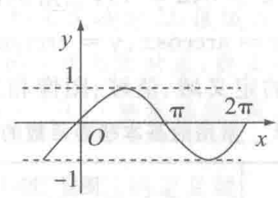
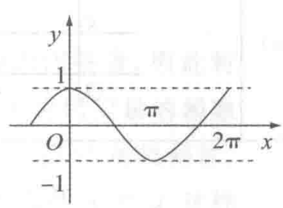
1. 基本初等函数

我们学过的常数函数 $y=c$(c 为常数),幂函数 $y=x^\mu$(μ 为实数),指数函数 $y=a^x$($a>0, a\neq1$),对数函数 $y=\log_a x$($a>0, a\neq1$),三角函数 $y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\cot x$,反三角函数 $y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\arctan x$、$y=\operatorname{arccot} x$ 统称为基本初等函数. 现将一些常用的基本初等函数的定义域、值域、图像和主要特性列于表 1-2 中.

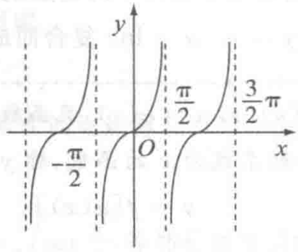
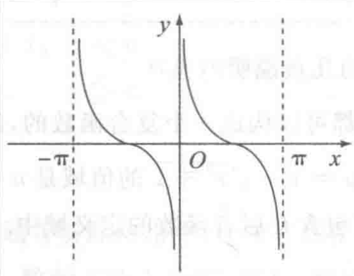
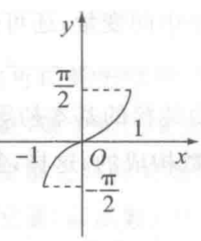
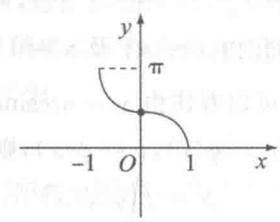
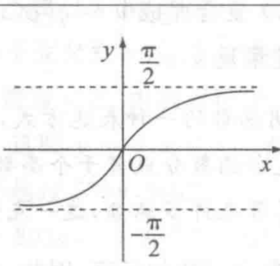
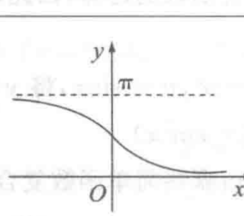
表 1-2 常用的基本初等函数的图形及其性质

名称	表达式	定义域	图 形	特 性
常数函数	$y=c$	$(-\infty,+\infty)$		

（续表）

名称	表达式	定义域	图 形	特 性
幂函数	$y=x^{\mu}$ $(\mu\neq 0)$	随 μ 而不同，但在 $(0,+\infty)$ 中都有定义		图形经过点(1,1)，且都在第一象限内 当 $\mu>0$ 时，x^{μ} 为增函数； 当 $\mu<0$ 时，x^{μ} 为减函数.
指数函数	$y=a^x$ $(a>0,a\neq 1)$	$(-\infty,+\infty)$		图形在 x 轴上方，且都通过点(0,1) 当 $0<a<1$ 时，a^x 是减函数； 当 $a>1$ 时，a^x 是增函数
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>0,a\neq 1)$	$(0,+\infty)$		图形在 y 轴右侧，都通过点(1,0) 当 $0<a<1$ 时，$\log_a x$ 是减函数； 当 $a>1$ 时，$\log_a x$ 是增函数
三角函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$		以 2π 为周期的奇函数(图形关于原点对称)，图形在两直线 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间
	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$		以 2π 为周期的奇函数(图形关于 y 轴对称)，图形在两直线 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间

（续表）

名称	表达式	定义域	图形	特性
三角函数	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm 1,\cdots)$		以 π 为周期的奇函数，在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是增函数
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$ $(K=0,\pm 1,\cdots)$		以 π 为周期的奇函数，在 $(0,\pi)$ 内是减函数
反三角函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$		单调增加的奇函数，值域为 $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$
	$y=\arccos x$	$[-1,1]$		单调减少，值域为 $[0\leqslant y\leqslant\pi]$
	$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$		单调增加的奇函数，值域为 $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$
	$y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty,+\infty)$		单调减少，值域为 $0<y<\pi$

2. 复合函数

在实际问题中，常常会遇到由几个较简单的函数组成较为复杂的函数.

例如，函数 $y = \ln^2 x$ 是由 $y = u^2$，$u = \ln x$ 复合而成的复合函数，其定义域为$(0, +\infty)$.

定义 1-3 设 $y = f(u)$，而 $u = \varphi(x)$，且函数 $\varphi(x)$ 的值域包含在函数 $f(u)$ 的定义域内，那么 y 通过 u 的联系成为 x 的函数，称 y 为 x 的复合函数，记为

$$y = f[\varphi(x)].$$

其中，u 称为中间变量.

对于复合函数，做下面的几点说明.

(1) 不是任何两个函数都可以构成一个复合函数的，例如，$y = \lg u$ 和 $u = x - \sqrt{x^2+1}$ 就不能构成复合函数，因为 $u = x - \sqrt{x^2+1}$ 的值域是 $u < 0$，而 $y = \lg u$ 的定义域是 $u > 0$，前者函数的值域完全没有被包含在后者函数的定义域中. 再如，$y = \arcsin u$ 与 $u = x^2 + 2$ 也不能复合成一个复合函数.

(2) 复合函数不仅可以有一个中间变量，还可以有多个中间变量，这些中间变量是经过多次复合产生的. 例如，$y = \ln u$，$u = \sin v$，$v = x^2$ 经过两次复合构成函数 $y = \ln\sin x^2$.

(3) 复合函数通常不一定是由纯粹的基本初等函数复合而成的，而更多的是由基本初等函数经过四则运算形成的简单函数构成的，这样，复合函数的合成和分解往往是针对简单函数的.

例如，$y = \sin^2 x$ 可以看作由 $y = u^2$ 及 $u = \sin x$ 复合而成；

$y = \sqrt{1-x^2}$ 可以看作由 $y = u^{\frac{1}{2}}$ 及 $u = 1 - x^2$ 复合而成；

$y = \arcsin\sqrt{x^2+1}$ 可以看作由 $y = \arcsin u$，$u = \sqrt{v}$，$v = x^2 + 1$ 复合而成.

一般情况下，设 $y = f(u)$，$u = \varphi(v)$，$v = \psi(x)$，则复合函数为

$$y = f\{\varphi[\psi(x)]\}.$$

即先由 $u = \varphi(v)$，$v = \psi(x)$ 复合而成 $u = \varphi[\psi(x)]$，再将它代替 $y = f(u)$ 中的 u，得 $y = f\{\varphi[\psi(x)]\}$. 这里的中间变量是 u，v.

注意："复合函数"只是表明函数的一种表达方式，不是一类新型的函数. 如果要把一个复合函合函数分解(即将一个复合函数分成若干个函数)时，必须按照基本初等函数去分解，否则会给以后的微分、积分运算带来许多麻烦，这一点读者会逐步理解的.

学习本课程将会遇到大量复合函数的运算，因此，必须训练掌握函数的复合及复合函数的分解.

例 1 已知 $y = \ln u$，$u = 4 - v^2$，$v = \sin x$，将 y 表示成 x 的函数.

解 $y = \ln(4 - v^2) = \ln(4 - \sin^2 x)$.

例 2 指出下列复合函数是由哪些简单函数复合而成的.

(1) $y = \cos(x^3 + 4)$；　　(2) $y = e^{\sin(x^2+1)}$.

解 (1) 设 $u = x^3 + 4$，则函数 $y = \cos(x^3 + 4)$ 由 $y = \cos u, u = x^3 + 4$ 复合而成.

(2) 设 $u = \sin(x^2 + 1)$，则 $y = e^u$，设 $v = x^2 + 1$，则 $u = \sin v$，所以函数 $y = e^{\sin(x^2+1)}$ 由 $y = e^u, u = \sin v, v = x^2 + 1$ 复合而成.

3. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合所构成的并可用一个解析式表示的函数称为初等函数.

例如，$y = e^{x+2}$，$y = 2\cos^2 x$，$y = \sqrt{\cot\dfrac{x}{2}}$ 等都是初等函数. 有时也会遇到一些用分段函数表示的非初等函数. 如 $y = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ 2x, & x \geqslant 0 \end{cases}$ 不是初等函数.

1.2.2 建立函数关系式

在解决工程技术问题、经济问题等实际应用中，经常需要先找出问题中变量之间的函数关系，然后再利用有关的数学知识、数学方法去分析、研究、解决这些问题. 一般可以这样着手解决：

第一步：应先把题意分析清楚，有时也可以画出草图，借草图分析和理解题意.

第二步：应根据题意确定哪个是自变量，哪个是因变量，如果总体变量多于两个，还要进一步分析，找出除因变量以外的其他若个变量之间的关系. 因为在这里是建立一元函数的关系式，最终应归结为一个自变量和一个因变量(即函数) 的关系式.

例 3 某水泥厂生产水泥 1000 吨，定价 90 元 / 吨，总销售不大于 800 吨时，按定价出售，超过 800 吨时，超过部分打 9 折，试将销售收入作为销售量的函数，列出函数关系式.

解 根据题意可列出函数关系式为

$$y = \begin{cases} 72000, & x \leqslant 800 \\ 72000 + 81(x - 800), & 800 < x \leqslant 1000 \end{cases}.$$

例 4 旅客乘坐火车可免费携带不超过 20kg 的物品，超过 20kg 而不超过 50kg 的部分每千克交费 a 元，超过 50kg 的部分每千克交费 b 元. 求运费与携带物品重量的函数关系.

解 设物品重量为 $x$kg，应交运费为 y 元. 由题意可知，这时应考虑三种情况：

第一种情况是：重量不超过 20kg，这时 $y = 0, x \in [0,20]$；

第二种情况：重量大于 20kg，但不超过 50kg，这时

$$y = (x - 20)a, \quad x \in [20,50] \quad ;$$

第三种情况：重量超过 50kg，这时

$$y = (50 - 20)a + (x - 50)b, \quad x \in (50, +\infty).$$

因此，所求的函数是一个分段函数

$$y = \begin{cases} 0, & x \in [0,20] \\ a(x - 20), & x \in (20,50] \\ (50 - 20)a + (x - 50)b, & x \in (50, +\infty) \end{cases},$$

化简，得 $$y=\begin{cases}0, & x\in[0,20]\\ ax-20a, & x\in(20,50]\\ bx+30a-50b, & x\in(50,+\infty)\end{cases}.$$

例 5 某厂生产某种产品 1600 件，定价为 150 元/件，销售量在不超过 800 件时，按原价出售，超过 800 件时，超过部分按八折出售. 试求销售收入与销售量之间的函数关系.

解 按题意，设销售收为 R，显然，当 $0\leqslant x\leqslant 800$ 时，$R=150x$.

当 $800\leqslant x\leqslant 1600$ 时，收入由两部分组成：800 件部分的收入为 150×800；超过 800 件的部分的收入为 $150\times 0.8(x-800)$；$R=150\times[800+0.8(x-800)]=24000+120x$；

于是 R 与 x 之间的函数关系如下：

$$R=\begin{cases}150x, & 0\leqslant x\leqslant 800\\ 120x+24000, & 800<x\leqslant 1600\end{cases}.$$

1.3 极限的概念

➢知识目标

掌握函数极限的概念；理解函数极限的性质；熟悉函数极限的四则运算法则.

➢能力目标

能运用函数极限的概念、性质和四则运算法则求函数的极限.

➢知识正文

1.3.1 函数的极限

对于给定的函数 $y=f(x)$，因变量 y 随着自变量 x 的变化而变化. 若当自变量 x 无限接近于某个"目标"（一个数 x_0，$+\infty$ 或 $-\infty$）时，因变量 y 无限接近于一个确定的常数 A.

为了叙述问题的方便，我们规定：

当 x 从 x_0 的左右两侧无限地接近于 x_0 时，用记号 $x\to x_0$（读作 x 趋于 x_0）表示；

当 x 从 x_0 的右侧无限地接近于 x_0 时，用记号 $x\to x_0^+$ 表示；

当 x 从 x_0 的左侧无限地接近于 x_0 时，用记号 $x\to x_0^-$ 表示；

当 x 无限增大时，用记号 $x\to+\infty$（读作 x 趋于正无穷）表示；

当 x 无限减小时，用记号 $x\to-\infty$（读作 x 趋于负无穷）表示.

下面，我们根据自变量 x 无限接近于"目标"的方式不同，分别介绍函数的极限.

1. $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

为了便于读者理解 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 极限的定义，我们先从图形上观察两个具体的函数.

从图 1-7 和图 1-8 中不难看出，当 $x\to 1$ 时，函数 $f(x)=x+1$ 无限接近于 2；当 $x\to$

1 时，$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 无限接近于 2. 函数 $f(x)=x+1$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 是两个不同的函数，前者在 $x=1$ 处有定义，后者在 $x=1$ 无定义. 这就是说，当 $x\to 1$ 时，$f(x)$，$g(x)$ 有极限是否存在与其在 $x=1$ 处是否有定义无关.

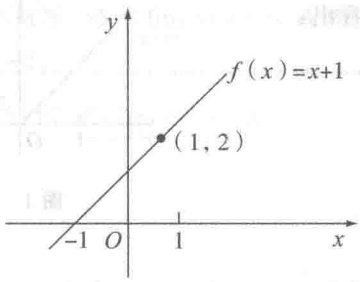


图 1－7

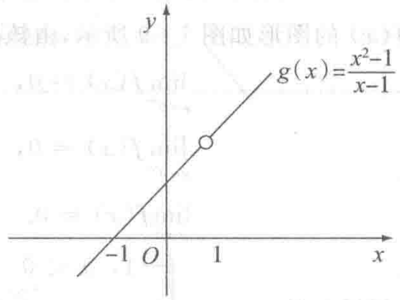


图 1－8

这里先介绍一下领域的概念：开区间 $(x-\delta,x+\delta)$ 称为以 x 为中心，以 $\delta(\delta>0)$ 为半径的邻域，简称为点 x 的邻域，记为 $N(x,\delta)$.

一般地说，为了使 $x\to x_0$ 时函数极限的定义适用范围更广泛，我们不必要求 $f(x)$ 在 x_0 点有定义，只需要求 $f(x)$ 在 x_0 的某一空心邻域 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)(\delta>0)$ 内有定义即可，以后用 $N(\bar{x},\delta)$ 表示 x_0 的空心邻域.

定义 1－4　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一空心邻域 $N(\bar{x},\delta)$ 内有定义，当自变量 x 在 $N(\bar{x},\delta)$ 内无限接近 x_0 时，相应的函数值无限接近于常数 A，则 A 为 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

由定义 1－4 可知，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$，$\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$.

2. $x\to x_0^+$ 时函数 $f(x)$ 的极限

定义 1－5　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的右半邻域 $(x_0,x_0+\delta)$ 内有定义，当自变量 x 在此半邻域内无限接近于 x_0 时，相应的函数值 $f(x)$ 无限接近于常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的右极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$，或 $f(x)\to A(x\to x_0^+)$.

3. $x\to x_0^-$ 时函数 $f(x)$ 的极限

定义 1－6　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的左半邻域 $(x_0-\delta,x_0)$ 内有定义，当自变量 x 在此半领域内无限接近于 x_0 时，相应的函数值 $f(x)$ 无限接近于常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$，或 $f(x)\to A(x\to x_0^-)$.

例 1 若 $f(x)=\begin{cases}-x, & x<0\\ 1, & x=0\\ x, & x>0\end{cases}$，画出该函数的图形，并讨论 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 是否存在.

解 $f(x)$ 的图形如图 1－9 所示，由该图不难看出：

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=0,$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=0,$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=0.$$

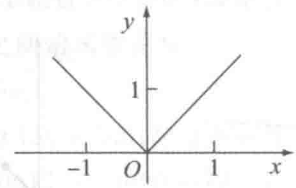


图 1－9

例 2 符号函数 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$，画图讨论 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\operatorname{sgn}x$，$\lim\limits_{x\to x_0^-}\operatorname{sgn}x$，$\lim\limits_{x\to x_0}\operatorname{sgn}x$ 是否存在.

解 函数 $\operatorname{sgn}x$ 的图形如图 1－10 所示，不难看出：

$$\lim_{x\to x_0^+}\operatorname{sgn}x=1,$$

$$\lim_{x\to x_0^-}\operatorname{sgn}x=-1,$$

$\lim\limits_{x\to x_0}\operatorname{sgn}x$ 不存在.

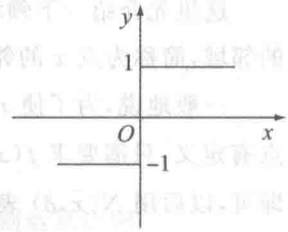


图 1－10

由左右极限的定义及上述的两个例子不难看出，左右极限存在如下关系：

定理 1－1 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

4. $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

定义 1-7 设函数 $f(x)$ 在 $|x|>a$ 时有定义（a 为某个正实数），如果自变量 x 的绝对值无限增大时，相应的函数值 $f(x)$ 无限接近于常数 A，则称 A 为当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$.

由图 1－11 可知：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

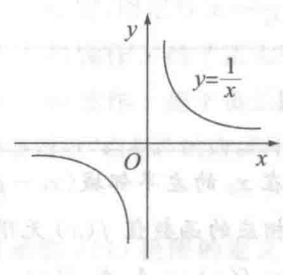


图 1－11

5. $x \to +\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

定义 1-8　设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内有定义（a 为某个正实数），如果自变量 x 无限增大时，相应的函数值 $f(x)$ 无限接近于常数 A，则称 A 为当 $x \to +\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记作 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A(x \to +\infty)$.

由图 1-12 知：$\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$.

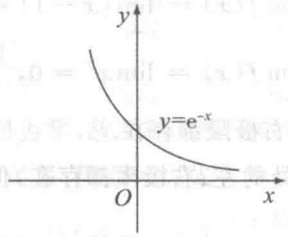


图 1-12

6. $x \to -\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

定义 1-9　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 内有定义（a 为某个正实数），如果自变量 x 无限变小（或者 $-x$ 无限变大）时，相应的函数值 $f(x)$ 无限接近于常数 A，则称 A 为当 $x \to -\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记作 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A(x \to -\infty)$.

由图 1-11 可知：$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

不难证明，函数 $f(x)$ 在 $x \to \infty$ 时的极限与在 $x \to +\infty$，$x \to -\infty$ 时的极限有如下关系：

定理 1-2　$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

例 3　根据极限定义说明下列各式：

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$；　　(2) $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$；　　(3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$.

解　(1) 当自变量 x 趋于 x_0 时，作为函数的 x 也趋于 x_0，于是依照定义有 $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

(2) 无论自变量取何值，函数都取相同的值 c，那么它当然趋于常数 c，所以 $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$.

这两个结论以后可以直接使用.

(3) 首先要明确，本题不是求自变量 $x=1$ 时的函数 $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的函数值，而是求 $x \to 1$ 时 $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的极限值. $x \to 1$ 是 x 无限趋近于 1，但始终不取 1，故此时 $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} = x+1$. 当 x 无限趋近于 1 时，$x+1$ 趋近于 2. 所以 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$.

例 4 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0\\ x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1, & x>1\end{cases}$.求:

(1) 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右极限是否存在?

(2) 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的极限是否存在?

(3) 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的极限是否存在?

解 (1) 根据函数左、右极限的定义,可得

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x^2=0,$$

所以,$f(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右极限都存在.

(2) 由(1) 知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右极限都存在,但不相等,所以由定理 1-1 可知,$f(x)$ 在 $x=0$ 处的极限不存在.

(3) 根据函数左、右极限的定义可得

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}x^2=1,$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}1=1.$$

即 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=1$,所以,$f(x)$ 在 $x=1$ 处的极限存在,且有 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$.

1.3.2 极限的四则运算法则

定理 1-3 若 $\lim u(x)$ 和 $\lim v(x)$ 都存在(假定 x 在同一变化过程中),且 $\lim u(x)=A$,$\lim v(x)=B$,则有下列运算法则:

(1) $\lim[u(x)\pm v(x)]=\lim u(x)\pm \lim v(x)=A\pm B$.

(2) $\lim[u(x)\cdot v(x)]=\lim u(x)\cdot \lim v(x)=A\cdot B$.

(3) 当 $\lim v(x)=B\neq 0$ 时,

$$\lim\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{\lim u(x)}{\lim v(x)}=\frac{A}{B}.$$

上述运算法则(1)和(2),可以推广到有限多个函数的代数和及乘法的情况,此外还有以下推论.

推论 设 $\lim u(x)$ 存在,c 为常数,n 为正整数,则有:

(1) $\lim[cu(x)]=c\lim u(x)$.

(2) $\lim[u(x)]^n=[\lim u(x)]^n$.

在使用这些法则时,必须注意以下两点:

(1) 法则要求每个参与运算的函数的极限存在.

(2) 商的极限的运算法则有一个重要前提,即分母的极限不能为零.

当上面两个条件不具备时,不能使用极限的四则运算法则.

例 5　求极限$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+5)$.

解　$$\lim_{x\to 1}(x^2-2x+5)=\lim_{x\to 1}(x^2)-\lim_{x\to 1}(2x)+\lim_{x\to 1}5$$
$$=\lim_{x\to 1}(x^2)-2\lim_{x\to 1}x+5=8.$$

例 6　求极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+5}{x^2+7}$.

解　当 $x\to 1$ 时，分母极限不为零，可直接用极限的运算法则.
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+5}{x^2+7}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+5)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+7)}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

例 7　计算极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2+x-2}$.

解　当 $x\to 1$ 时，分母的极限为零，故不能直接用极限的运算法则知，当 $x\to 1$ 时的极限与函数在 $x=1$ 点有无定义没有关系，因而可以先分解因式化简后再求极限.
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+2)}=\frac{3}{3}=1.$$

注意：以下解法是错误的$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2+x-2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x^3-1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x-2)}=\dfrac{0}{0}=0$.

先对分子、分母进行因式分解或恒等变形来消去零因子，再求极限，这种方法在求一些“$\dfrac{0}{0}$”型极限时经常用到. 由于“$\dfrac{0}{0}$”型的极限可能存在，也可能不存在，因此这种极限也称为不定式(不定型).

例 8　求极限$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2-\sqrt{2-x}}{2x+4}$.

解　当 $x\to -2$ 时，分子、分母的极限都为零，不能直接利用商的极限法则. 先对分子有理化，然后再进行极限运算.
$$\lim_{x\to -2}\frac{2-\sqrt{2-x}}{2x+4}=\lim_{x\to -2}\frac{(2-\sqrt{2-x})(2+\sqrt{2-x})}{(2x+4)(2+\sqrt{2-x})}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{4-(2-x)}{(2x+4)(2+\sqrt{2-x})}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{(2+x)}{(2x+4)(2+\sqrt{2-x})}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{1}{2(2+\sqrt{2-x})}=\frac{1}{8}.$$

例 9　求极限$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$.

解　因为$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}=\infty$，所以不能用差的极限运算法则. 先将函数进行通分，化成$\dfrac{0}{0}$型不定式，再利用因式分解化简消零因子的方法计算.