

电子与信息工程系列

# 天 线

ANTENNA

毛康侯 著

哈爾濱工業大學出版社  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

电子与信息二

# 天 线

ANTENNA

毛康侯 著

哈爾濱工業大學出版社  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 内容简介

本书是一部飞行器上天线理论和应用的著作,给出了飞行器天线边值问题的求解方法,即应用直接求解法和偶解法,详细推导出各类型公式,并给出了设计方法和实验结果,主要内容包括:正交曲线坐标系,天线中常用特殊函数,直接求解法和偶解法,半无穷大金属薄板附近天线,金属楔形体上天线,金属圆楔上天线,金属圆柱体上天线,金属圆锥体上天线,金属球体上天线,金属椭圆柱和楔形体上天线,金属椭球体上天线,天线中直接和偶解法通解,飞行器上天线和电磁兼容性。

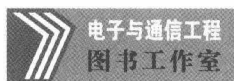
本书主要对象为电子工程系电磁场理论的微波技术的研究生和高年级本科生,也可供从事飞行器和从事宇航,航空航天,航空空间电子学的师生及工程技术人员阅读。

## 图书在版编目(CIP)数据

天线/毛康侯著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2017.4(2017.6重印)  
ISBN 978-7-5603-6263-2

I. ①天… II. ①毛… III. ①航空设备-天线  
②航天器天线 IV. ①V243.4 ②V443

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 254695 号



责任编辑 许雅莹

封面设计 卜秉利

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编 150006

传真 0451-86414749

网址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印刷 哈尔滨市石桥印务有限公司

开本 660mm×980mm 1/16 印张 20.25 字数 350千字

版次 2017年4月第1版 2017年6月第2次印刷

书号 ISBN 978-7-5603-6263-2

定价 68.00元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

# 前 言

本书是一部飞行器天线理论和应用的著作。随着飞机、火箭、导弹、核弹、宇宙飞船、航天器以及人造地球卫星等各种飞行器的发展,飞行器上装载着许多空间无线电设备,首先遇到飞行器天线的设计问题。由于飞行器上天线的设计是与飞行器的外形相关,为避免设计的盲目性必须对飞行器上的天线进行理论探讨和研究。为此目的,本书在内容选取方面,不单纯地摘录国内外已发表的论文或报告的结论,更不是一般介绍几种飞行器上天线边值问题的求解方法。应用直接求解法和偶解法是解决飞行器上天线边值问题的一种极好方法。因此,全书以此法推导出各类公式,也给出了工程上的设计实例;同时采用了感应电动势法和坡印亭矢量法计算了阻抗和方向图等。

全书内容如下:第1章正交曲线坐标系,第2章天线中常用的特殊函数概述;前两章为基础知识。从第3章起系统介绍直接求解法和偶解法,并直接在各章中介绍具体应用,第4章半无穷大金属薄板附近天线;第5章金属楔形体上天线;第6章金属圆楔上天线;第7章金属圆柱体上天线;第8章金属椭圆柱体上天线;第9章金属抛物柱面上天线;第10章金属圆锥体上天线;第11章金属球上天线;第12章金属椭圆柱和楔形体上天线;第13章金属椭球体上天线;第14章天线中直接和偶解法通解;第15章飞行器上天线和电磁兼容性,有些内容首先公开推导全过程,见文献[1]~[80]。

凡是具有一定电磁场基础知识和高等数学中数学物理方程知识的读者,均能阅读。本书主要对象为大学电子工程系电磁场理论和微波技术专业的研究生和高年级本科生,根据培养要求研究生尽可能熟练掌握推导方法,灵活运用,正确思维,必有创新。本书可作为从事飞行器和从事宇航、航天、航空空间电子学的师生及

工程技术人员参考书,也对从事无线电电子学专业的人员有一定的参考价值。

本书从1983年7月起,主要针对培养具有独立能力的研究生所编写,经过十余年教育实践证明,使研究生仅懂得公式与设计是不够的,要懂得公式的来龙去脉,遇到新问题时才能重新解决,才能有所创新。本书在原来的基础上不断修订与增减,到目前为止,由原来的11章增加到15章,第15章是新内容。我们利用三要素(空间、时间、频段)已经达到天线之间的电磁兼容性,即天线之间的隔离度的预测和实际测量,以提高总体和分系统之间的电磁兼容性。这里应特别提出天线不一定增益越高越好,频段不一定越宽越好。如果天线第一旁瓣直接影响天线之间的隔离度,使之达不到要求,可采取旁瓣抑制技术,即除主天线外,另增加一个相对宽的副天线方向图,以主副天线频率相同,相位相反的条件下相叠加,以降低主天线的旁瓣的影响,即使要损失天线一定增益也是值得的。

在第15章中介绍的飞行器上天线之间隔离度的预测、指标要求和实测的内容,对总体方案中可避免全局反攻,达到飞行器上天线之间隔离度要求,也为预测和实测提供了方向。也可用于飞行器和大型飞机内外或发射筒内外天线之间的耦合度或者隔离度之间的预测与实测。

本书的出版特别感谢我的研究生赵志刚、王伟所提供的帮助;也感谢出版社编辑为本书出版付出的劳动。

本书在写作过程中不免有遗漏之处,望读者提出与指正。

毛康侯

2016年2月北京

# 目 录

第 1 章 正交曲线坐标系 .....	1
1.1 曲线坐标 .....	1
1.2 各种正交曲线坐标系 .....	2
1.3 麦克斯韦方程在正交曲线坐标下的形式 .....	9
第 2 章 天线中常用的特殊函数概述 .....	10
2.1 伽马函数和贝塔函数 .....	10
2.2 贝塞尔函数 .....	15
2.3 勒让德函数 .....	21
2.4 鞍点法及其应用 .....	30
2.5 $\delta$ 函数简述 .....	35
2.6 马切函数 .....	37
2.7 抛物柱函数 .....	38
第 3 章 天线中直接和对偶解法概述 .....	41
3.1 直接求解法 .....	41
3.2 对偶解法 .....	45
第 4 章 半大无穷金属薄板附近天线 .....	47
4.1 采用圆柱坐标时的方程 .....	47
4.2 应用直接求解法求振子天线远区场 .....	48
4.3 小振子天线辐射电阻公式推导 .....	52
4.4 两个垂直小振子天线互阻抗公式推导 .....	56
4.5 小振子天线远区间场强计算 .....	59
4.6 利用坡印亭矢量法求辐射电阻 .....	65
4.7 不对称线分布电容与分布电感的计算 .....	66

4.8	不对称线基本方程的计算推导	73
4.9	在金属薄板附近振子天线设计	78
4.10	金属薄板附近开槽天线	81
<b>第5章</b>	<b>金属楔形体上天线</b>	<b>85</b>
5.1	小振子天线远区场强计算	85
5.2	小振子天线的辐射电阻计算公式	88
5.3	楔形体上天线远区场、辐射电阻和方向性系数的计算公式	92
5.4	小振子天线理论的应用	97
5.5	在楔形体上开槽举例	99
5.6	在楔形体上单向辐射纵槽天线辐射电导的推导	102
5.7	单向辐射纵向开槽天线方向性系数的推导	103
5.8	在楔形体上单向辐射横槽天线远区场强电导计算	105
<b>第6章</b>	<b>金属圆楔上天线</b>	<b>107</b>
6.1	金属圆楔上阵子天线	107
6.2	振子天线在金属圆楔内场强	108
6.3	金属圆楔内振子天线远区场强	112
6.4	金属圆楔内振子天线的辐射电阻	114
6.5	在圆楔内任意长度水平振子天线辐射	118
6.6	应用对偶解法求圆楔上磁流源	121
6.7	圆楔内开槽天线远区场强	125
<b>第7章</b>	<b>金属圆柱体上天线</b>	<b>128</b>
7.1	直接求解法求圆柱体上振子天线	128
7.2	金属圆柱体上振子天线远区场强	132
7.3	在金属圆柱体上振子天线辐射电阻的计算	134
7.4	在金属圆柱体上振子天线的设计方法举例	137
7.5	在金属圆柱体上小振子天线实例	139
7.6	在金属圆柱体上小振子天线方向图计算	141
7.7	在金属圆柱体上开槽天线	143
7.8	小圆柱体开槽天线的电导和方向性系数的理论计算	145

7.9	圆柱体上两个槽以上时远区场强	151
<b>第8章</b>	<b>金属圆柱体上天线</b>	153
8.1	应用直接求解法求椭圆柱上振子天线	153
8.2	磁振子在金属圆柱体上的一般表达式	160
8.3	金属圆柱体上开槽天线	161
<b>第9章</b>	<b>金属抛物柱面上天线</b>	164
9.1	抛物柱体面上开槽天线场的积分表达式	164
9.2	抛物柱面上振子天线场的积分表达式	172
9.3	抛物柱面边缘附近放置小振子天线时辐射电阻推导	173
9.4	抛物柱面上纵槽时的辐射电导公式推导	177
9.5	抛物柱面上天线的远区场公式	182
<b>第10章</b>	<b>金属圆锥体上天线</b>	185
10.1	金属圆锥体上的任意形状开槽天线场强表达式	185
10.2	金属圆锥体上开槽天线远区场强	193
10.3	金属圆锥体上开槽天线的辐射电导	200
10.4	金属圆锥体上振子天线远区场	203
10.5	金属圆锥体上电振子天线辐射电阻	208
<b>第11章</b>	<b>金属球上天线</b>	211
11.1	金属球上开槽天线场强普遍表达式	211
11.2	金属球上开槽天线远区场强表达式	221
11.3	金属球上开槽天线辐射电导推导	224
11.4	金属球上开槽天线方向性系数	226
11.5	金属球上磁流源场强表达式	226
<b>第12章</b>	<b>金属圆柱体与楔形体上天线</b>	228
12.1	应用直接求解法求椭圆楔体上电流波表达式	228
12.2	金属椭圆楔体上电振子的一般表达式	233
12.3	应用对偶解法求金属椭圆楔体上磁流源表达式	236
12.4	金属椭圆楔体上天线远区场中的一个积分公式	237
12.5	金属椭圆楔体上振子天线	239



---

12.6	金属椭圆楔体上水平电振子天线和纵向开槽 .....	240
12.7	金属椭圆楔体上的径向振子天线 .....	243
12.8	金属椭圆楔体上横向振子 .....	246
<b>第 13 章</b>	<b>椭球体上天线</b> .....	<b>249</b>
13.1	引言 .....	249
13.2	金属长旋转椭球体上天线的严格解 .....	251
13.3	金属长旋转椭球附近的辐射 .....	268
13.4	金属长椭球侧电偶极子辐射场的数值计算 .....	276
13.5	金属长旋转椭球附近振子辐射实验及分析 .....	279
<b>第 14 章</b>	<b>天线中直接对偶解法通解</b> .....	<b>282</b>
14.1	天线直接求解法的通用表达式 .....	282
14.2	天线对偶解法中通用表达式 .....	284
14.3	直接对偶解法应用举例 .....	286
14.4	结论 .....	289
<b>第 15 章</b>	<b>飞行器上天线与电磁兼容性</b> .....	<b>290</b>
15.1	电磁干扰与天线的新定义 .....	290
15.2	天线耦合度与电磁兼容性 .....	292
15.3	天线系统配置时电磁兼容性的预测分析 .....	293
<b>附录 1</b>	<b>习题集</b> .....	<b>296</b>
<b>附录 2</b>	<b>Gamma 函数表</b> .....	<b>304</b>
<b>参考文献</b>	.....	<b>309</b>

# 第 1 章 正交曲线坐标系

虽然描述电磁现象的一般规律采用矢量形式,因而与坐标系无关;但在解决具体问题时,采用与其相适应的坐标系并将矢量方程分解为标量方程是比较便利的。

## 1.1 曲线坐标

令

$$u_1 = f_1(x, y, z), u_2 = f_2(x, y, z), u_3 = f_3(x, y, z) \quad (1.1)$$

为  $x, y, z$  的单值独立的连续函数。解式(1.1)得

$$x = F_1(u_1, u_2, u_3), y = F_2(u_1, u_2, u_3), z = F_3(u_1, u_2, u_3) \quad (1.2)$$

同样它们也是  $u_1, u_2, u_3$  的单值独立的连续函数。因此,对于空间角一点  $P(x, y, z)$ ,就有 3 个数  $u_1, u_2, u_3$  与之相对应,反之,对于每三个数  $u_1, u_2, u_3$  就有一固定点。函数  $u_1, u_2, u_3$  称为广义坐标或者曲线坐标,如图 1.1 所示。

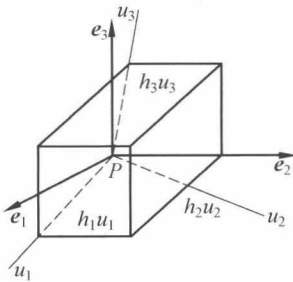


图 1.1

当  $u_1 = f_1(x, y, z) = \text{常数}$ ,  $u_2 = f_2(x, y, z) = \text{常数}$ ,  $u_3 = f_3(x, y, z) = \text{常数}$  的面积为坐标图,在坐标图上的各点,一个坐标为常数,另外两个坐标为变数。两个坐标面相交于一条曲线成为坐标曲线(见图 1.1 中用  $u_1, u_2, u_3$  表示的曲线)。

设  $e_1, e_2, e_3$  (图 1.1) 为决定坐标曲线方向的单位矢量。一般来说,在空间的不同点上,它们是不相同的。如果曲线坐标的坐标线在空间每一点都

互相垂直,则这种曲线坐标就称为正交曲线坐标。设  $\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$  为  $P$  点的径矢,它是从坐标原点到  $P$  点的矢量,它的增量可以写成

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} du_3$$

现在来求导数  $\partial \mathbf{r} / \partial u_1$ 。因为对  $u_1$  微分时  $u_2, u_3$  不变,矢量  $(\partial \mathbf{r} / \partial u_1) du_1$  的方向是沿着  $u_1$  的方向,因而

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} = h_1 \mathbf{e}_1$$

其中  $h_1(u_1, u_2, u_3)$  是  $(\partial \mathbf{r} / \partial u_1)$  的长度,因此

$$d\mathbf{r} = h_1 du_1 \mathbf{e}_1 + h_2 du_2 \mathbf{e}_2 + h_3 du_3 \mathbf{e}_3 \quad (1.3)$$

其中  $h_i(u_1, u_2, u_3), i=1, 2, 3$  称为度规系数,它们决定于正交曲线坐标的具体形式; $h_1 du_1$  是坐标的微分长度。因此,  $d\mathbf{r}$  的长度  $dl$  的平方为

$$(dl)^2 = h_1^2 (du_1)^2 + h_2^2 (du_2)^2 + h_3^2 (du_3)^2 = \sum_{i=1}^3 h_i^2 (du_i)^2 \quad (1.4)$$

沿坐标  $u_1, u_2, u_3$  方向的微分长度分别是

$$dl_1 = h_1 du_1, \quad dl_2 = h_2 du_2, \quad dl_3 = h_3 du_3 \quad (1.5)$$

由此可见,度规系数  $h_i = dl_i / du_i$  应该理解为,当  $u_i$  有单位变化时,沿  $u_i$  方向坐标曲线的长度变化。

## 1.2 各种正交曲线坐标系

一个正交曲线坐标系是以其度规系数为特征的,因此,确定各种正交曲线坐标系的度规系数是十分重要的。

$u_i$  的方向余弦(对  $x, y, z$  的)  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  的表示式及它们之间的关系式为

$$\alpha_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial x}{\partial u_i}, \quad \beta_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial y}{\partial u_i}, \quad \gamma_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial z}{\partial u_i} \quad (1.6)$$

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1, \quad i=1, 2, 3 \quad (1.7)$$

从而得

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i}\right)^2} \quad (1.8)$$

### 1.2.1 直角坐标系

在直角坐标系中,  $u_1 = x, u_2 = y, u_3 = z$ ; 利用式(1.8)得  $h_1 = h_2 = h_3 = 1$ ,

从而

$$\nabla\varphi = \mathbf{i} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad (1.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (1.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{i} \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \quad (1.11)$$

### 1.2.2 圆柱坐标系

在图 1.2 中的  $P$  点,沿坐标  $r, \theta, z$  方向的单位矢量设为  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}_r, \mathbf{e}_2 = \mathbf{i}_\theta, \mathbf{e}_3 = \mathbf{i}_z, u_1 = r, u_2 = \theta, u_3 = z$  称为圆柱坐标,它们与直角坐标之间的关系是:  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$ ,从  $P$  点沿任何方向的微分距离  $dl$  可以写成

$$(dl)^2 = (dr)^2 + (rd\theta)^2 + (dz)^2 \quad (1.12)$$

由式(1.8)得  $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = 1$ ,因此得

$$\nabla\varphi = \mathbf{i}_r \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \mathbf{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \mathbf{i}_z \frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad (1.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (1.14)$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{i}_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial\theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) + \mathbf{i}_\theta \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \mathbf{i}_z \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial\theta} \right) \quad (1.15)$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \quad (1.16)$$

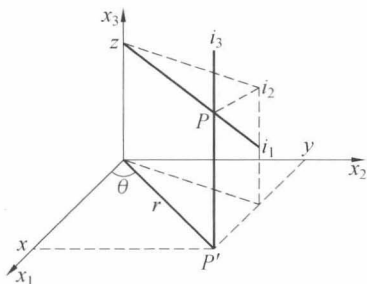


图 1.2

### 1.2.3 球坐标系

在球坐标系中,空间任一点  $P$  的三个坐标  $u_1 = r, u_2 = \theta, u_3 = \varphi$ ,它们与直角坐标系的关系(见图 1.3)是  $x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta$ ,从

P 点沿任何方向的微分距离  $dl$  为

$$(dl)^2 = (dr)^2 + (rd\theta)^2 + r^2 \sin^2\theta (d\Phi)^2 \quad (1.17)$$

由式(1.17) 或式(1.8) 得度规系数  $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = \sin\theta$ , 因而得

$$\nabla\varphi = \mathbf{i}_r \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \mathbf{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \mathbf{i}_\Phi \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial\varphi}{\partial\Phi} \quad (1.18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta V_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial V_\Phi}{\partial\Phi} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V} = & \frac{1}{r\sin\theta} \left[ \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta V_\Phi) - \frac{\partial V_\theta}{\partial\Phi} \right] \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial V_r}{\partial\Phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r V_\Phi) \right] \mathbf{i}_\theta + \\ & \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial\theta} \right] \mathbf{i}_\Phi \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\nabla_\varphi^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\Phi^2} \quad (1.21)$$

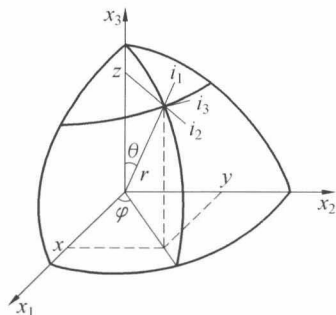


图 1.3

### 1.2.4 椭圆柱坐标

设在  $x$  轴上的固定点  $F_1(x=c)$  和  $F_2(x=-c)$  为一系列同轴同焦距椭圆的二焦点。设  $r_1$  和  $r_2$  为在  $Z$  平面上的一点  $P$  到  $F_1$  和  $F_2$  的距离, 如图1.4 所示。用

$$\xi = \frac{r_1 + r_2}{2c}, \quad \eta = \frac{r_1 - r_2}{2c} \quad (1.22)$$

定义为

$$u_1 = \xi, \quad u_2 = \eta, \quad u_3 = z$$

称为椭圆柱坐标, 坐标面  $\xi = \text{常数}$  是一系列以  $F_1$  和  $F_2$  为公共焦点的椭圆柱面, 其横线为椭圆, 后者的长半轴和短半轴分别为

$$a = c\xi, \quad b = c\sqrt{\xi^2 - 1}$$

而其偏心率则为

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\xi}$$

$\eta = \text{常数}$  的坐标面是一系列以  $F_1$  和  $F_2$  为公共焦点的双曲线柱面。显而易见

$$\xi \geq 1, -1 \leq \eta \leq 1$$

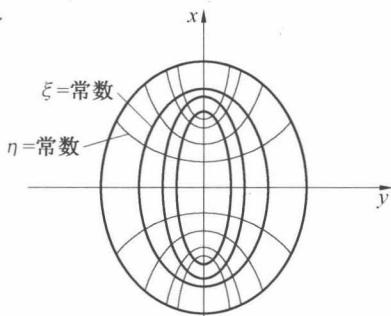


图 1.4

在椭圆柱的横截面上形成一组长焦的椭圆和一组与之正交的共焦双曲线，它们的方程分别为

$$\frac{x^2}{\xi^2} + \frac{y^2}{\xi^2 - 1} = c^2$$

$$\frac{x^2}{\eta^2} - \frac{y^2}{1 - \eta^2} = c^2$$

从而得到其与直角坐标的关系如下

$$x = c\xi\eta, \quad y = c(\xi^2 - 1)^{\frac{1}{2}}(1 - \eta^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad z = z$$

从上式和式(1.8)得度规系数如下

$$h_1 = c(\xi^2 - \eta^2)^{\frac{1}{2}}(\xi^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}, \quad h_2 = c(\xi^2 - \eta^2)^{\frac{1}{2}}(1 - \eta^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad h_3 = 1 \quad (1.23)$$

### 1.2.5 抛物柱面坐标系

如图 1.5 所示，可用下式定义该面上两个正交抛物线系：

$$\xi = \sqrt{2r} \sin \frac{\theta}{2}, \quad \eta = \sqrt{2r} \cos \frac{\theta}{2} \quad (1.24)$$

$\xi = \text{常数}$  与  $\eta = \text{常数}$  的面是二系列正交抛物柱面，其轴和  $Z$  轴平行，则

$$u_1 = \xi, \quad u_2 = \eta, \quad u_3 = -Z$$

称为抛物柱面坐标。如用直角坐标来表示式(1.24)中的  $r$  和  $\theta$ ，则

$$\xi^2 = \sqrt{x^2 + y^2} - x, \quad \eta^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + x$$

由上式可得抛物柱面与直角坐标系之间的关系如下：

$$x = \frac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2), y = \xi\eta, Z = -Z$$

由式(1.8) 和上式得度规系数如下

$$h_1 = h_2 = (\xi^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}}, h_3 = 1 \tag{1.25}$$

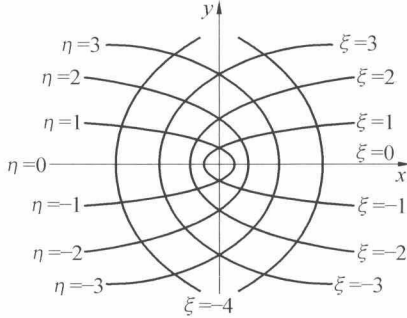


图 1.5

### 1.2.6 长椭圆旋转坐标系

如在一平面上沿共焦点的椭圆的长轴旋转，则得一系列共焦的长椭圆旋转面。在同轴上作与之正交的双曲线旋转面，以上两组坐标面和通过  $x$  轴的一组平面组成长椭圆旋转坐标系的三组正交坐标面。图 1.4 也可以代表这种坐标系的通过长轴的一个截面。设  $\Phi$  为通过考虑点和  $x$  轴的平面与  $xy$  平面所夹的角， $r$  为考虑点到  $x$  轴的垂直距离，这时

$$y = r \cos \Phi, z = r \sin \Phi \tag{1.26}$$

式(1.8) 和式(1.26) 所定义的

$$u_1 = \xi, u_2 = \eta, u_3 = \Phi \tag{1.27}$$

称为长椭圆旋转坐标。

长椭圆旋转坐标面和双曲线旋转坐标面的方程分别为

$$\frac{x^2}{\xi^2} + \frac{r^2}{\xi^2 - 1} = c^2, \frac{x^2}{\eta^2} - \frac{r^2}{1 - \eta^2} = c^2. \tag{1.28}$$

从而得

$$\begin{aligned} x &= c \xi \eta, y = c (\xi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} (1 - \eta^2)^{\frac{1}{2}} \cos \Phi \\ z &= c (\xi^2 - 1)^{\frac{1}{2}} (1 - \eta^2)^{\frac{1}{2}} \sin \Phi \end{aligned} \tag{1.29}$$

并且

$$\xi \geq 1, -1 \leq \eta \leq 1, 0 \leq \Phi \leq 2\pi. \tag{1.30}$$

由式(1.8)和式(1.29)得度规系数为

$$h_1 = c\sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}}, h_2 = c\sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}}, h_3 = c\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \quad (1.31)$$

### 1.2.7 扁椭圆旋转坐标系

如果将图 1.4 中同焦点的椭圆系和双曲线系绕  $y$  轴旋转,则得到扁椭圆旋转坐标系。设  $r, \Phi, y$  为圆柱坐标,则

$$z = r\cos \Phi, x = r\sin \Phi \quad (1.32)$$

这时图 1.4 中将是  $c$  为半径的焦线圆与  $\Phi = \text{常数}$  的平面的二交点。 $\xi$  和  $\eta$  仍由式(1.22)所定义,但坐标面的方程变为

$$\frac{r^2}{\xi^2} + \frac{r^2}{1 - \xi^2} = c^2, \frac{r^2}{\eta^2} - \frac{r^2}{1 - \eta^2} = c^2 \quad (1.33)$$

由式(1.33)和扁椭圆旋转坐标

$$u_1 = \xi, u_2 = \eta, u_3 = \Phi \quad (1.34)$$

得直角坐标

$$x = c\xi\eta\sin \Phi, y = c(\xi^2 - 1)^{\frac{1}{2}}(1 - \eta^2)^{\frac{1}{2}}, z = c\xi\eta\cos \Phi \quad (1.35)$$

必须指出, $\xi = \text{常数}$ 的面是一系列扁椭圆旋转面,而  $\eta = \text{常数}$ 的面是一系列单叶的双曲线旋转面。由式(1.8)和式(1.35)得度规系数为

$$h_1 = c\sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}}, h_2 = c\sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}}, h_3 = c\xi\eta \quad (1.36)$$

椭圆旋转坐标的应用在于,当偏心率趋近于 1 时,长椭圆旋转体变成棒形体,而扁椭圆旋转体则变成盘形体;当偏心率或焦距趋近零时,椭圆旋转体就变成球体,其坐标就变成球坐标。

### 1.2.8 旋转抛物面坐标系

如果将图 1.5 的抛物线系围绕  $X$  轴加以旋转,就得到一系列以原点的共焦的旋转抛物面坐标系。为了明确这种坐标与直角坐标之间的关系,用  $Z$  轴代替图 1.5 中的  $X$  轴。设  $R$  为从考虑点到原点  $O$  的距离, $r$  为抛物面与通过考虑点的  $Z$  平面的交线圆的半径。根据旋转抛物面的性质, $R + Z = b$ ,  $R - Z = a$ , 令

$$u_1 = \xi = \sqrt{R + Z}, u_2 = \eta = \sqrt{R - Z}, u_3 = \Phi \quad (1.37)$$

为旋转抛物面坐标,其中  $\xi = \sqrt{R + Z} = \text{常数}$ ,代表一系列共焦的旋转抛物面;  
 $\eta = \sqrt{R - Z} = \text{常数}$ ,代表一系列与正交的旋转抛物面; $u_3 = \Phi = \text{常数}$ ,代表通



过了轴的一系列平面。显然有

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.38)$$

因此,  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \xi\eta$ 。如果设  $\Phi$  为通过考虑点和  $Z$  轴的平面与  $XZ$  平面所夹的角, 则

$$x = \xi\eta \cos \Phi, \quad y = \xi\eta \sin \Phi, \quad z = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2) \quad (1.39)$$

由  $R + Z = b$  和  $R - Z = a$ , 并利用式(1.38)得二组旋转抛物面的方程如下

$$x^2 + y^2 + 2bz = b^2, \quad x^2 + y^2 - 2az = a^2 \quad (1.40)$$

由式(1.8)和式(1.39)得度规系数

$$h_1 = h_2 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad h_3 = \xi\eta \quad (1.41)$$

### 1.2.9 椭球坐标系

设  $a, b, c$  为椭球体的三个半轴的长度, 而且  $a > b > c$ , 则其表面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1.42)$$

与上式所代表的椭球面共焦的椭球面、单叶双曲面和双叶双曲面的方程分别如下

$$\frac{x^2}{a^2 + \xi} + \frac{y^2}{b^2 + \xi} + \frac{z^2}{c^2 + \xi} = 1 \quad (\xi > -c^2) \quad (1.43)$$

$$\frac{x^2}{a^2 + \eta} + \frac{y^2}{b^2 + \eta} + \frac{z^2}{c^2 + \eta} = 1 \quad (-c^2 > \eta > -b^2) \quad (1.44)$$

$$\frac{x^2}{a^2 + \zeta} + \frac{y^2}{b^2 + \zeta} + \frac{z^2}{c^2 + \zeta} = 1 \quad (-b^2 > \zeta > -a^2) \quad (1.45)$$

对于空间每一点, 都有以上三个面经过, 因而对该点就有三个数  $\xi, \eta, \zeta$  与之相对应。因此

$$u_1 = \xi, \quad u_2 = \eta, \quad u_3 = \zeta$$

称为椭球坐标。 $\xi = \text{常数}$ 是一系列椭球面,  $\eta = \text{常数}$ 是一系列单叶双曲面,  $\zeta = \text{常数}$ 是一系列双叶双曲面。由式(1.43)~(1.45)解  $x, y, z$  得

$$\left. \begin{aligned} x &= \pm \left[ \frac{(\xi + a^2)(\eta + a^2)(\zeta + a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ y &= \pm \left[ \frac{(\xi + b^2)(\eta + b^2)(\zeta + b^2)}{(c^2 - b^2)(a^2 - b^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ z &= \pm \left[ \frac{(\xi + c^2)(\eta + c^2)(\zeta + c^2)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (1.46)$$