Fuzzy mathematics and data experiment

模糊数学和数据实验

陆成刚 编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

模糊数学和数据实验

陆成刚 编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

模糊数学和数据实验 / 陆成刚编著. —杭州：浙江大学出版社，2017.5
ISBN 978-7-308-16940-0

Ⅰ.①模… Ⅱ.①陆… Ⅲ.①模糊数学 Ⅳ.①O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 108767 号

内容概要

本书主要介绍模糊数学的基本理论和概念，并讨论了模糊积分在符合主观的图像度量设计方面以及模糊数据聚类处理等方法的应用。基于增强工程动手能力的理念，本书还介绍了一些数据处理编程中的程序设计方法。本书的理论部分和应用部分从内容上都力求自我包含，读者不需要借助于额外的参考资料、技术书籍。本书适合于自学，也适合于理工科类本科生、研究生以及信息技术爱好者学习模糊数学及作为工程实践指导的参考书。

模糊数学和数据实验

陆成刚 编著

责任编辑	王 波
责任校对	汪荣丽
封面设计	续设计
出版发行	浙江大学出版社 (杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007) (网址：http://www.zjupress.com)
排 版	杭州隆盛图文制作有限公司
印 刷	浙江省良渚印刷厂
开 本	710mm×1000mm 1/16
印 张	5
字 数	87 千
版 印 次	2017 年 5 月第 1 版 2017 年 5 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-308-16940-0
定 价	20.00 元

前言

FOREWORD

笔者在为浙江工业大学机械学院研究生上“模糊数学”课以及为理学院数学系本科生上“软件设计”课时，常常为课程的工程项目选题而踌躇。选择适合学生专业背景和工程实践能力培养的项目主题是一个值得深入探讨的课题。在大数据时代，为培养学生的数据处理的理论背景和实践动手的工程能力，我认为数理统计、智能计算和数据处理软件开发等主题的内容讲授是需要进一步加强的。本书主要从模糊数学的图像度量方法应用和数据聚类处理方面，结合实际软件代码实现的工程角度做了一个新的课程设计的尝试。限于作者的水平，书中错误之处或不可避免，望请读者不吝指教。

陆成刚

2017 年 1 月于浙江工业大学

目录

CONTENTS

第1章 模糊集合基本理论

第1节 集合论

集合是任意确定的对象组成的整体，特别地，数学家关心在数学上有联系的一些对象组成的整体。现代集合论的概念肇始于19世纪70年代德国数学家康托的研究，今天其已经成为所有数学对象描述的基本用语。

传统集合论讨论一个对象和若干对象组成的集合之间的关系是二元的，即要么属于、要么不属于，例如元素 $a \in A$ 或者 $a \notin A$。对于集合和集合之间的关系则有包含的关系，例如 $A \subseteq B$ 表示 A 是 B 的子集合，如果又有 $A \supseteq B$，即 B 也是 A 的子集，则 $A=B$；当 A 是 B 的子集合且 $A \neq B$ 时，称 A 是 B 的真子集，记作 $A \subset B$。

集合有交、并、补、笛卡尔乘积、和幂集等运算。集合的表示方式有枚举法、解析描述法和特征函数表示法等若干种形式。例如集合 A 枚举表示为 $A=\{1,2,3,4\}$，全集 X 可枚举表示为 $X=\{1,2,3,4,5,6\}$，集合 A 使用定义于全集的特征函数表示为 $\chi_A(1)=1, \chi_A(2)=1, \chi_A(3)=1, \chi_A(4)=1, \chi_A(5)=0, \chi_A(6)=0$。即属于 A 的元素取值1，否则取值为0，这正反映了传统集合论中元素的二元属性。解析描述法可以表示元素数目无穷的集合，例如圆心在坐标原点的单位圆周点集可以表示为 $\{(x,y) \mid x^2+y^2=1, x,y \in \mathbf{R}\}$。枚举法并非不可表述无穷数目元素的集合，例如 $\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$ 表示自然数集，$\{0,2,4,\cdots,2n,\cdots\}$ 表示非负偶数集合。但是使用枚举法能表示的无穷数目元素的集合其无穷等级是可数无限，一般无法枚举不可数无限的元素的集合，例如 $[0,1]$ 单位区间的实数全体是无法枚举的。最初集合论就是为探究无穷无限的数学本质而诞生的。

美国计算机控制论专家扎德教授在1965年提出“元素属于集合的隶属程度”的概念，打破了传统集合论的二元属性，为描述自然界和社会中的模糊性现象提供了有力的数学工具。

第2节　模糊集

人类在认识自然、宇宙和社会过程中，理性始终相伴左右，其背后就是强大的逻辑力量，而数学是依赖于排中律的二值化逻辑而演绎的。人们在使用计算技术解决实际问题时已经习惯了近似的方法，但是在很多情况下人们是知道或者能够评估精确值的，只是由于工具的局限而不得已使用近似方法（例如计算机的内存数据字节是有限的），人们甚至可以任意精度地靠近精确值。类似的，当人们在使用计算机等定量工具去表示一些系统或现象时，不可避免地碰到了一类模糊性的量化问题（例如怎么描述高个子的人的集合），解决思路是创立模糊的定量方法去分析。正如近似和精确的关系一样，模糊和精确的关系也不是矛盾的，模糊方法是完全建筑于精确分析的方法之上的。

我们来看怎么描述高个子的人。例如定义身高1.75m以上为高个子，这还是传统集合的定义方法，身高1.74m的就不是高个子，身高1.76m的就是高个子，尽管两者只差2cm。这样的分法是不令人满意的，符合人们主观认识的模糊性的定义是考虑身高为高个子的程度，这个程度值可以从0连续变动到1，取0表示肯定不是高个子，取1则表示完全为高个子，介于中间的表示“高”的程度。表1.1给出一个高个子的参考模糊定义。

表1.1　高个子的模糊定义

身高(m)	≤1.6	≤1.62	≤1.65	≤1.70	≤1.72	≤1.75	≤1.78	≤1.8	>1.8
“高”的程度	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.75	0.9	1

从上面的例子可以看出，如果从传统集合的特征函数的二值属性推广到取值，就可以定义一个新型的表示模糊集合的函数，我们称之为隶属度函数：

$$\mu_{\widetilde{A}}(x)\in[0,1], x\in X \tag{1.2.1}$$

式(1.2.1)中表示模糊集 $\widetilde{A}$ 中元素 x 的隶属度，X 相当于传统集合中的全集，这里称为论域。序偶$(X,\mu_{\widetilde{A}}(x))$称为模糊集 $\widetilde{A}$ 的一个定义。

例1.1　“很大于10的实数”的模糊集。

定义 $\widetilde{A}=\{(x,\mu_{\widetilde{A}}(x))\mid x\in X\}$ 且 $\mu_{\widetilde{A}}(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 10\\ [1+(x-10)^{-2}]^{-1} & x>10\end{cases}$，隶属度函数曲线如图 1.1 所示。

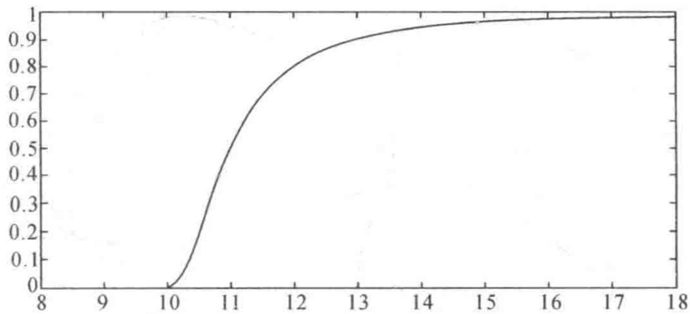

图 1.1 “很大于 10 的实数”的隶属度函数曲线

例 1.2 “非常近似 10 的实数”的模糊集。

定义 $\widetilde{A}=\{(x,\mu_{\widetilde{A}}(x))\mid \mu_{\widetilde{A}}(x)=[1+(x-10)^2]^{-1},x\in X\}$，隶属度函数曲线如图 1.2 所示。

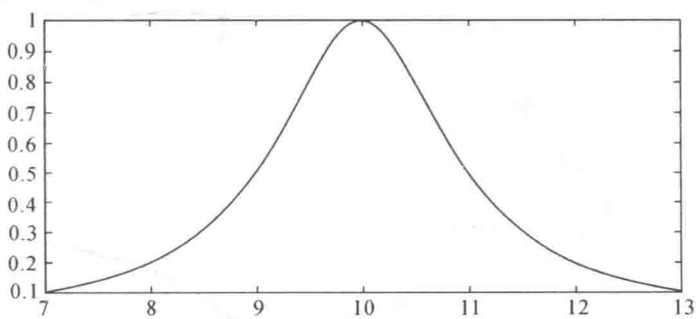

图 1.2 “非常近似 10 的实数”的隶属度函数曲线

模糊集合 $\widetilde{A}$ 的表示可写为

$$\widetilde{A}=\frac{\mu_{\widetilde{A}}(x_1)}{x_1}+\frac{\mu_{\widetilde{A}}(x_2)}{x_2}+\cdots+\frac{\mu_{\widetilde{A}}(x_n)}{x_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_{\widetilde{A}}(x_i)}{x_i} \text{ 或者} \int_X \frac{\mu_{\widetilde{A}}(x)}{x}\mathrm{d}x\text{ 。}$$

例如，例 1.2 中的模糊集可表示为

$$\widetilde{A}=\int_R \frac{1}{1+(x-10)^2}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\text{ 。}$$

再引入几个有关模糊集的概念：

(1)正则模糊集：如果隶属度函数值的上确界取到 1，即 $\sup\limits_{x\in X}\mu_{\widetilde{A}}(x)=1$，称

$\widetilde{A}$ 为正则模糊集。

(2)模糊集 $\widetilde{A}$ 的支撑集 $S(\widetilde{A})=\{x \mid \mu_{\widetilde{A}}(x)>0\}$，即所谓具有非零隶属度的全体元素所成的集合，是一个传统集合。

(3)α 水平截集 $A_\alpha=\{x\in X \mid \mu_{\widetilde{A}}(x)\geqslant\alpha\}$，强 α 水平截集 $A'_\alpha=\{x\in X \mid \mu_{\widetilde{A}}(x)>\alpha\}$，都是传统集合。

(4)模糊集 $\widetilde{A}$ 的凸性：$\mu_{\widetilde{A}}(\lambda_1 x_1+(1-\lambda_2)x_2)\geqslant\min\{\mu_{\widetilde{A}}(x_1),\mu_{\widetilde{A}}(x_2)\}$，$x_1,x_2\in X,\lambda\in[0,1]$。

(5)$\widetilde{A}$ 的基数 $|\widetilde{A}|=\sum\limits_{x\in X}\mu_{\widetilde{A}}(x)$，$\widetilde{A}$ 的相对基数 $\|\widetilde{A}\|=\dfrac{|\widetilde{A}|}{|X|}$。

例 1.3 “很凉快”日常用语的模糊定义是满足凸性的。

定义 $\widetilde{A}=\{(x,\mu_{\widetilde{A}}(x)) \mid x\in X\}$ 且 $\mu_{\widetilde{A}}(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 15\\ 1-\dfrac{1}{64}(x-23)^2 & 15<x<31\\ 0 & x\geqslant 31\end{cases}$，“很凉快”模糊集的隶属度函数曲线如图 1.3 所示。

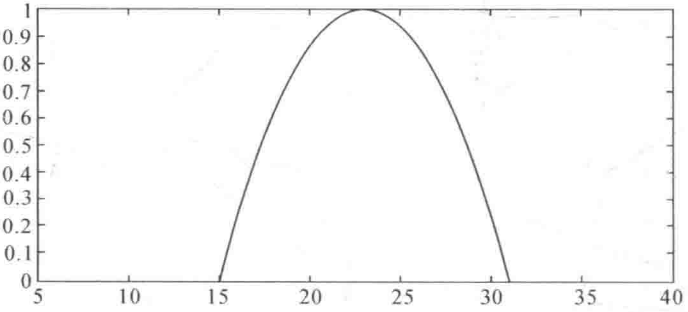

图 1.3 “很凉快”模糊集的隶属度函数曲线

易知若采用传统的凸性定义 $\mu_{\widetilde{A}}(\lambda_1 x_1+(1-\lambda_2)x_2)\geqslant\lambda\mu_{\widetilde{A}}(x_1)+(1-\lambda)\mu_{\widetilde{A}}(x_2)$，$\lambda\in[0,1]$，例 1.3 的隶属度函数曲线是非凸的。

第 3 节 模糊集的运算

模糊集的包含关系是基于隶属度函数来定义的，$\widetilde{A}\subseteq\widetilde{B}$ 当且仅当 $\mu_{\widetilde{A}}(x)\leqslant\mu_{\widetilde{B}}(x)$，$\forall x\in X$；而 $\widetilde{A}=\widetilde{B}$ 当且仅当它们的隶属度函数相同。交运算定义为 $\widetilde{A}\cap\widetilde{B}=\{(x,\mu_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}}(x)) \mid \mu_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}}(x)=\min\{\mu_{\widetilde{A}}(x),\mu_{\widetilde{B}}(x)\},x\in X\}$；并运算定义为 $\widetilde{A}\cup\widetilde{B}=\{X,\mu_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}(x)) \mid \mu_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}(x)=\max\{\mu_{\widetilde{A}}(x),\mu_{\widetilde{B}}(x)\},x\in X\}$；补运算

定义为 $C\widetilde{A}=\{(X,\mu_{C\widetilde{A}}(x))\mid\mu_{C\widetilde{A}}(x)=1-\mu_{\widetilde{A}}(x),x\in X\}$。下面我们证明传统集合论中的棣摩根法则仍旧满足，即 $\overline{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}}=\overline{\widetilde{A}}\cup\overline{\widetilde{B}}$ 以及 $\overline{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}=\overline{\widetilde{A}}\cap\overline{\widetilde{B}}$。以前者为例，只要证明 $1-\min\{\mu_{\widetilde{A}}(x),\mu_{\widetilde{B}}(x)\}=\max\{1-\mu_{\widetilde{A}}(x),1-\mu_{\widetilde{B}}(x)\}$ 对任意固定的 x，不妨假设 $0\leqslant\mu_{\widetilde{A}}(x)<\mu_{\widetilde{B}}(x)\leqslant 1$，代入计算可得等式成立。

也可以定义交运算 $\widetilde{A}\cap\widetilde{B}=\{(X,\mu_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}}(x))\mid\mu_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}}(x)=\mu_{\widetilde{A}}(x)\cdot\mu_{\widetilde{B}}(x),x\in X\}$；定义并运算 $\widetilde{A}\cup\widetilde{B}=\{(X,\mu_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}(x))\mid\mu_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}(x)=1-\mu_{\widetilde{A}}(x)\cdot\mu_{\widetilde{B}}(x),x\in X\}$。请读者考虑此时棣摩根法则是否成立。

例 1.4 “大房子”房间数目的隶属度分布 $=\frac{0}{1}+\frac{0}{2}+\frac{0.2}{3}+\frac{0.4}{4}+\frac{0.6}{5}+\frac{0.8}{6}+\frac{1.0}{7}+\frac{1.0}{8}$；“4 口之家的舒适房子”的房间数目 $=\frac{0.2}{1}+\frac{0.5}{2}+\frac{0.8}{3}+\frac{1}{4}+\frac{0.7}{5}+\frac{0.3}{6}+\frac{0.2}{7}+\frac{0.1}{8}$，求交并运算模糊集。

“既是大房子又是舒适房子” $=\frac{0}{1}+\frac{0}{2}+\frac{0.2}{3}+\frac{0.4}{4}+\frac{0.6}{5}+\frac{0.3}{6}+\frac{0.2}{7}+\frac{0.1}{8}$。

“或者是大房子，或者是舒适房子” $=\frac{0.2}{1}+\frac{0.5}{2}+\frac{0.8}{3}+\frac{1}{4}+\frac{0.7}{5}+\frac{0.8}{6}+\frac{1.0}{7}+\frac{1.0}{8}$。

例 1.5 求“很大于 10 的实数”以及“非常近似 11 的实数”的交并。

“很大于 10 的实数”$\widetilde{A}$ 定义同例 1.1；“非常近似 11 的实数”的定义如下：

$$\widetilde{B}=\{(x,\mu_{\widetilde{B}}(x))\mid\mu_{\widetilde{B}}(x)=[1+(x-11)^4]^{-1},x\in X\}。$$

所以，$\widetilde{A}\cap\widetilde{B}$ 的隶属度函数为

$$\mu_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}}(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 10\\ \min\{[1+(x-10)^{-2}]^{-1},[1+(x-11)^4]^{-1}\} & x>10\end{cases}。$$

$\widetilde{A}\cup\widetilde{B}$ 的隶属度函数为

$$\mu_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}(x)=\begin{cases}\max\{[1+(x-10)^{-2}]^{-1},[1+(x-11)^4]^{-1}\} & x>10\\ [1+(x-11)^4]^{-1} & x\leqslant 10\end{cases}。$$

它们的隶属度函数曲线如图 1.4、图 1.5 所示。

为下一章讨论分解定理做准备，本节最后再引入水平截集的若干性质。

性质 1 对论域 X 上的模糊集 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\lambda\in[0,1]$，有

$$(\bigcup_{i=1,\cdots,n}A_i)_\lambda=\bigcup_{i=1,\cdots,n}(A_i)_\lambda \tag{1.3.1}$$

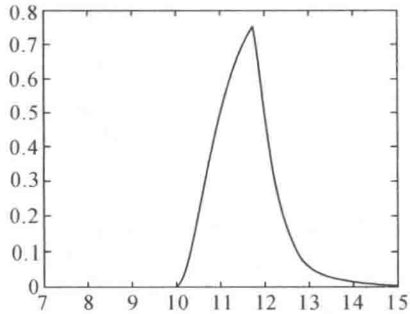

图 1.4 “很大于 10 且非常近似 11 的实数”的隶属度函数曲线

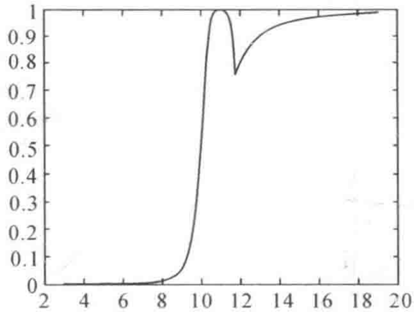

图 1.5 “很大于 10 或者非常近似 11 的实数”的隶属度函数曲线

$$(\bigcap_{i=1,\cdots,n} A_i)_\lambda = \bigcap_{i=1,\cdots,n} (A_i)_\lambda \qquad (1.3.2)$$

性质 2 对论域上的模糊集 A，$\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$，如 $\lambda_1\leqslant\lambda_2$，则 $A_{\lambda_2}\subseteq A_{\lambda_1}$。

性质 3 对论域上的模糊集 A，$\lambda_t\in[0,1]$，$t\in T$，有 $A_{\max\limits_{t\in T}\lambda_t}=\bigcap\limits_{t\in T}A_{\lambda_t}$。

性质 4 对论域上的模糊集 A，$\lambda\in[0,1]$，有 $(CA)_\lambda=C(A'_{1-\lambda})$，$(CA)'_\lambda=C(A_{1-\lambda})$。

我们证明式(1.3.1)，其他作为练习留给读者。从 $\mu_{\cup_i A_i}(x)\geqslant\lambda$ 知 $\max\limits_i \mu_{A_i}(x)\geqslant\lambda$，故存在 i_0 使得 $\mu_{A_{i_0}}(x)\geqslant\lambda$；反之如 $\mu_{A_{i_0}}(x)\geqslant\lambda$，则 $\max\limits_i\mu_{A_i}(x)\geqslant\lambda$，从而 $\mu_{\cup_i A_i}(x)\geqslant\lambda$。故式(1.3.1)成立。值得指出，当 n 趋于无穷时该等式不成立，应为 $(\bigcup\limits_{i=1,\cdots,n}A_i)_\lambda\supseteq\bigcup\limits_{i=1,\cdots,n}(A_i)_\lambda$，但式(1.3.2)还是成立的。

第 4 节 分解定理

首先引入“截积”的概念。令模糊集 A(也可以是分明集)的 λ 截积记为 λA,隶属度函数为 $\mu_{\lambda A}(x)=\min\{\lambda,\ \mu_A(x)\}=\lambda\wedge\mu_A(x)$。$\lambda A_\lambda$ 也是模糊集,隶属度函数为 $\mu_{\lambda A_\lambda}(x)=\begin{cases}\lambda & \mu_A(x)\geqslant\lambda\\ 0 & \mu_A(x)<\lambda\end{cases}$。

分解定理 1 A 是以 X 为论域的模糊集,则

(1)$A=\bigvee\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda$;

(2)$A=\bigvee\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda A'_\lambda$;

(3)令 H 为映射:$\begin{aligned}[0,1]&\to P(X)=\{B:B\subset X\}\\ \lambda&\to H(\lambda)\end{aligned}$,对 $\forall\lambda\in[0,1]$,$A'_\lambda\subset H(\lambda)\subset A_\lambda$,则 $A=\bigvee\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)$。

证明:

(1)设 $\mu_A(x)=\tilde{\lambda}$,则 $\mu_{\tilde{\lambda}A_{\tilde{\lambda}}}(x)=\tilde{\lambda}$,即有

$$\begin{aligned}\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda&=\max\{\max\nolimits_{\tilde{\lambda}<\lambda}\{\lambda A_\lambda\},\tilde{\lambda},\max\nolimits_{\tilde{\lambda}>\lambda}\{\lambda A_\lambda\}\}\\&=\max\{0,\tilde{\lambda},\max\nolimits_{\tilde{\lambda}>\lambda}\{\lambda\}\}=\tilde{\lambda}。\end{aligned}$$

(2)设 $\mu_A(x)=\tilde{\lambda}$,则 $\mu_{\tilde{\lambda}A'_{\tilde{\lambda}}}(x)=0$,即有

$$\begin{aligned}\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\lambda A'_\lambda&=\max\{\max\nolimits_{\tilde{\lambda}<\lambda}\{\lambda A'_\lambda\},0,\max\nolimits_{\tilde{\lambda}>\lambda}\{\lambda A'_\lambda\}\}\\&=\max\{0,0,\max\nolimits_{\tilde{\lambda}>\lambda}\{\lambda\}\}=\tilde{\lambda}。\end{aligned}$$

(3)$A'_\lambda\subset H(\lambda)\subset A_\lambda$,则 $\lambda A'_\lambda\subset\lambda H(\lambda)\subset\lambda A_\lambda$,则 $\bigvee\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda A'_\lambda\subset\bigvee\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)\subset\bigvee\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda A_\lambda$。由(1)、(2)两式两边夹,知 $\bigvee\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)=A$。

例 1.6 设 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$,且

$$A_\lambda=\begin{cases}\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\} & 0\leqslant\lambda\leqslant0.3\\ \{x_1,x_3,x_5,x_6\} & 0.3<\lambda\leqslant0.6\\ \{x_1,x_5,x_6\} & 0.6<\lambda\leqslant0.8\\ \{x_6\} & 0.8<\lambda\leqslant1\end{cases},求 A。$$

解:$A=\dfrac{0.8}{x_1}+\dfrac{0.3}{x_2}+\dfrac{0.6}{x_3}+\dfrac{0.3}{x_4}+\dfrac{0.8}{x_5}+\dfrac{0.6}{x_6}$。

其次引入“模糊点”的概念。定义模糊集 A(A 为论域 X 上的模糊集)限

制的模糊点，设 $\mu_A(x)=\lambda$，记 $\lambda_x=\lambda*\{x\}$ 为模糊点，满足 $\mu_{\lambda_x}(y)=\begin{cases}\lambda & y=x\\ 0 & y\neq x\end{cases}$。模糊点 λ_x 即为 $\lambda_x=A\cap\{x\}$。另 $\mu_{\mu_A(x)*\{x\}}(x)=\mu_A(x)$，而 $\mu_{\mu_A(x)*\{x\}}(y)=0$ $(y\neq x)$。

分解定理 2 A 在论域 X 上是模糊集，则 $A=\bigcup\limits_{x\in X}\mu_A(x)*\{x\}$。

证明略。

分解定理 1 是并形式的分解，下面给出交形式的分解。首先引入“截和”的概念，截和 $\lambda\circ A_\lambda$ 的隶属度函数为 $\mu_{\lambda\circ A_\lambda}(x)=\lambda\vee\mu_{A_\lambda}(x)$。

分解定理 3 A 在论域 X 上是模糊集，则

(1) $A=\bigwedge\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda\circ A_\lambda$；

(2) $A=\bigwedge\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda\circ A'_\lambda$；

(3) 令 H 为映射：$\begin{matrix}[0,1]\to P(X)=\{B:B\subset X\}\\ \lambda\to H(\lambda)\end{matrix}$，对 $\forall\lambda\in[0,1]$，$A'_\lambda\subset H(\lambda)\subset A_\lambda$，则 $A=\bigwedge\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda\circ H(\lambda)$。

证明：

(1) 设 $\mu_A(x)=\tilde{\lambda}$，则 $\mu_{\tilde{\lambda}\circ A_{\tilde{\lambda}}}(x)=\tilde{\lambda}$；当 $\lambda>\tilde{\lambda}$ 时，$x\notin A_\lambda$，则 $\mu_{\lambda\circ A_\lambda}(x)=\lambda\vee 0=\lambda$；当 $\lambda<\tilde{\lambda}$ 时，$x\in A_{\tilde{\lambda}}\subseteq A_\lambda$，则 $\mu_{\lambda\circ A_\lambda}(x)=\lambda\vee 1=1$，故 $\mu_{\bigwedge\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda\circ A_\lambda}(x)=\tilde{\lambda}$。

(2) 设 $\mu_A(x)=\tilde{\lambda}$，当 $\lambda\geqslant\tilde{\lambda}$ 时，$\mu_{\lambda\circ A'_\lambda}(x)=\lambda\vee 0=\lambda$；当 $\lambda<\tilde{\lambda}$ 时，$x\in A'_\lambda$，则 $\mu_{\lambda\circ A'_\lambda}(x)=\lambda\vee 1=1$；故 $\mu_{\bigwedge\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda\circ A'_\lambda}(x)=\tilde{\lambda}$。

(3) 用夹逼法，$\lambda\circ A'_\lambda\subset\lambda\circ H(\lambda)\subset\lambda\circ A_\lambda$，

则 $\bigwedge\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda\circ A'_\lambda\subset\bigwedge\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda\circ H(\lambda)\subset\bigwedge\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda\circ A_\lambda$，

而 $\bigwedge\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda\circ A'_\lambda=A=\bigwedge\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda\circ A_\lambda$，故 $A=\bigwedge\limits_{\lambda\in[0,1]}\lambda\circ H(\lambda)$。

第 5 节　扩展原理和表现定理

扩展原理 1 由映射 f 诱导的模糊映射 Γ：映射 $\begin{matrix}f:x\to y\\ X\to Y\end{matrix}$ 导出模糊映射 $\begin{matrix}\Gamma:A\to\Gamma(A)\\ F(X)\to F(Y)\end{matrix}$，其中 $F(X)$ 和 $F(Y)$ 是分别以 X、Y 作论域的模糊幂集，$A\in F(X)$ 且 $\Gamma(A)\in F(Y)$，$\Gamma(A)(y)=\begin{cases}\bigvee\limits_{f(x)=y}\mu_A(x) & f^{-1}(y)\neq\varphi\\ 0 & f^{-1}(y)=\varphi\end{cases}$；逆映射

$$\begin{array}{l}\Gamma^{-1}: B \to \Gamma^{-1}(B) \\ \quad F(Y) \to F(X)\end{array}$$，即 $\Gamma^{-1}(B)(x)=\mu_B(f(x))$。

例 1.7 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_7\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_5\}$，给定分明映射 $f: X\to Y$，$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=y_1$，$f(x_4)=y_2$，$f(x_5)=y_3$，$f(x_6)=f(x_7)=y_4$。

(1)给出 X 上的模糊集 A

$$A=\frac{0.6}{x_1}+\frac{0.7}{x_2}+\frac{0.8}{x_3}+\frac{0.3}{x_4}+\frac{0.9}{x_5}+\frac{0.7}{x_6}+\frac{0.4}{x_7}。$$

则 $\Gamma(A)$ 为

$\Gamma(A)(y_1)=\mu_A(x_1)\vee\mu_A(x_2)\vee\mu_A(x_3)=0.8$；

$\Gamma(A)(y_2)=\mu_A(x_4)=0.3$；

$\Gamma(A)(y_3)=\mu_A(x_5)=0.9$；

$\Gamma(A)(y_4)=\mu_A(x_6)\vee\mu_A(x_7)=0.7$；

$\Gamma(A)(y_5)=0$。

(2)给出 Y 上的模糊集 B

$$B=\frac{0.8}{y_1}+\frac{0.7}{y_2}+\frac{0.5}{y_3}+\frac{0.6}{y_4}+\frac{1}{y_5}。$$

则 $\Gamma^{-1}(B)$ 为

$\Gamma^{-1}(B)(x_1)=\mu_B(f(x_1))=\mu_B(y_1)=0.8$；

$\Gamma^{-1}(B)(x_2)=\mu_B(f(x_2))=\mu_B(y_1)=0.8$；

$\Gamma^{-1}(B)(x_3)=\mu_B(f(x_3))=\mu_B(y_1)=0.8$；

$\Gamma^{-1}(B)(x_4)=\mu_B(f(x_4))=\mu_B(y_2)=0.7$；

$\Gamma^{-1}(B)(x_5)=\mu_B(f(x_5))=\mu_B(y_3)=0.5$；

$\Gamma^{-1}(B)(x_6)=\mu_B(f(x_6))=\mu_B(y_4)=0.6$；

$\Gamma^{-1}(B)(x_7)=\mu_B(f(x_7))=\mu_B(y_4)=0.6$。

下面给出基于模糊点的扩展原理：

扩展原理 2 映射 f、模糊映射 Γ 以及 Γ^{-1} 如前述，$\Gamma(A)=\bigcup\limits_{x\in X}\mu_A(x)*\{f(x)\}$，而 $\Gamma^{-1}(B)=\bigcup\limits_{f(x)\in Y}\mu_B(f(x))*\{x\}$。该原理与扩展原理 1 完全等价。

基于扩展原理 2 可以对模糊映射进行诱导。例如 $\tilde{f}: X\to F(Y)$ 为分明集到模糊集的模糊映射，可以诱导出模糊集 $F(X)$ 到模糊集 $F(Y)$ 的模糊映射，记 $\tilde{f}: F(X)\to F(Y)$，则 $\tilde{f}(A)=\bigcup\limits_{x\in X}\mu_A(x)*\tilde{f}(x)$，其中 $\mu_{\mu_A(x)*\tilde{f}(x)}(y)=\mu_A(x)\wedge\mu_{\tilde{f}(x)}(y)$，而 $\tilde{f}(A)\in F(y)$ 的隶属函数为 $\mu_{\tilde{f}(A)}(y)=\bigvee\limits_{x\in X}\mu_A(x)\wedge\mu_{\tilde{f}(x)}(y)$，

$\forall y\in Y$。类似的，$\tilde{f}$ 可诱导出模糊集 $F(Y)$ 到模糊集 $F(X)$ 的逆模糊映射 $\tilde{f}^{-1}$，请读者写出其形式。

表现定理 首先引入集合套定义：设 $\lambda\in[0,1]\rightarrow H(\lambda)$ 且 $\lambda_1<\lambda_2\Rightarrow H(\lambda_1)\supseteq H(\lambda_2)$，称 $\{H(\lambda)\}$ 为集合套。接下来给出基于集合套的表现定理：

设 H 为 X 上的任何一个集合套，$A=\bigcup_{\lambda\in[0,1]}\lambda H(\lambda)$ 是 X 上的模糊集，且 $\forall\lambda\in[0,1]$，则

(1) $A'_\lambda=\bigcup_{\alpha>\lambda}H(\alpha)$；

(2) $A_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda}H(\alpha)$。

证明：

(1) $x\in A'_\lambda\Rightarrow\mu_A(x)>\lambda\Rightarrow\mu_{\bigcup_{\tilde{\lambda}\in[0,1]}\tilde{\lambda}H(\tilde{\lambda})}(x)>\lambda\Rightarrow\max_{\tilde{\lambda}\in[0,1]}\{\min\{\tilde{\lambda},\mu_{H(\tilde{\lambda})}(x)\}\}>\lambda$。当 $0\leqslant\tilde{\lambda}\leqslant\lambda\leqslant1$ 时，无论 $\tilde{\lambda}\leqslant\mu_{H(\tilde{\lambda})}(x)$，还是 $\tilde{\lambda}>\mu_{H(\tilde{\lambda})}(x)$，皆有 $\max_{\tilde{\lambda}\leqslant\lambda}\{\min\{\tilde{\lambda},\mu_{H(\tilde{\lambda})}(x)\}\}\leqslant\tilde{\lambda}\leqslant\lambda$；当 $1\geqslant\tilde{\lambda}>\lambda\geqslant0$ 时，要么 $\max_{\tilde{\lambda}>\lambda}\{\min\{\tilde{\lambda},\mu_{H(\tilde{\lambda})}(x)\}\}=\tilde{\lambda}$，要么 $\max_{\tilde{\lambda}>\lambda}\{\min\{\tilde{\lambda},\mu_{H(\tilde{\lambda})}(x)\}\}=\max_{\tilde{\lambda}>\lambda}\{\mu_{H(\tilde{\lambda})}(x)\}$，故 $\max_{\tilde{\lambda}>\lambda}\{\mu_{H(\tilde{\lambda})}(x)\}>\lambda$，证毕。

(2) $x\in A_\lambda\Rightarrow\mu_A(x)\geqslant\lambda$，对充分小的正数 ε，有 $\mu_A(x)>\lambda-\varepsilon$。由(1)，$\max_{\tilde{\lambda}>\lambda-\varepsilon}\{\mu_{H(\tilde{\lambda})}(x)\}>\lambda-\varepsilon$，而从集合套定义知 $\mu_{H(\lambda-\varepsilon)}(x)>\max_{\tilde{\lambda}>\lambda-\varepsilon}\{\mu_{H(\tilde{\lambda})}(x)\}$，则 $\mu_{H(\lambda-\varepsilon)}(x)>\lambda-\varepsilon$，故 $\min_{\varepsilon>0}\{\mu_{H(\lambda-\varepsilon)}(x)\}\geqslant\lambda$，证毕。

第 1 章习题

1. 证明 $\overline{\tilde{A}\cup\tilde{B}}=\bar{\tilde{A}}\cap\bar{\tilde{B}}$。

2. 证明第 3 节性质 1 的式(1.3.2)和性质 2、3 和 4。

3. 设计高个子模糊集、年轻人模糊集的隶属函数，并求它们的交并运算，解释其模糊含义。

4. 证明分解定理 2。

5. 使用扩展原理 2 写出模糊映射的逆映射形式。

参考文献

1. Zimmermann H J. Fuzzy set Theory and its applications[M]. 4th edition. Boston/Dordrecht/London, Kluwer Academic Publishers, 2001.

2. 孟广武.模糊数学的基本理论及其应用——截集、分解定理及扩展原理[J].聊城师院学报(自然科学版),2000,13(2).

3. 郭嗣琮.扩张原理的一种新的表现形式[J].模糊系统与数学,2003,17(3).