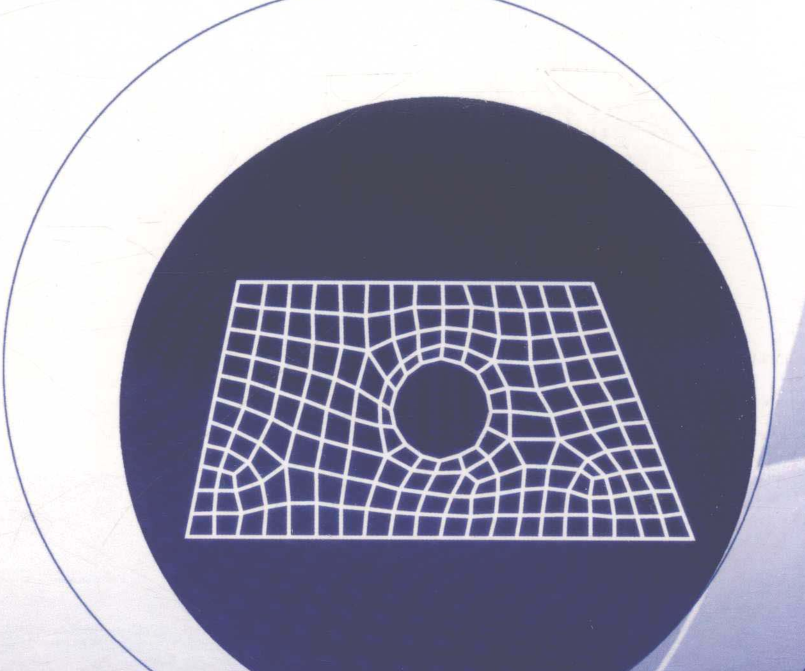
西安交通大学本科“十三五”规划教材
普通高等教育力学系列“十三五”规划教材

简明有限元教程

李录贤 文 毅 关正西 编



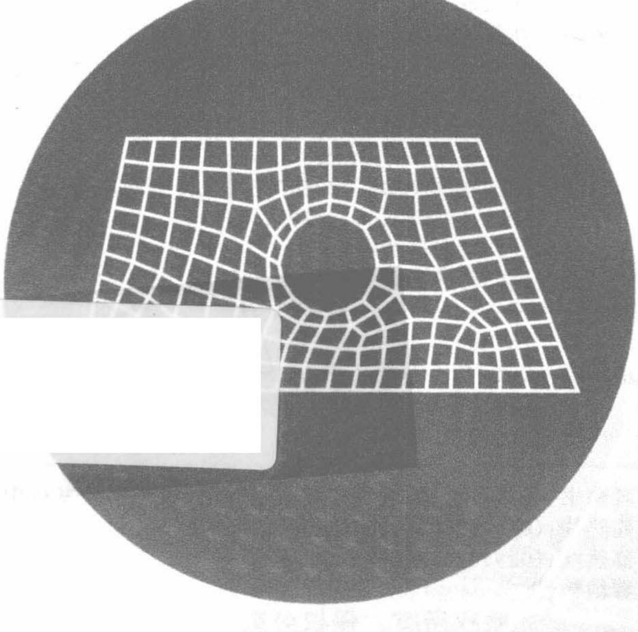
西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交通大学本科“十三五”规划教材

普通高等教育力学系列“十三五”规划教材

简明有限元教程

李录贤 文 毅 关正西 编



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

有限元方法是求解空间结构上偏微分方程边值问题的一种数值方法，其目的是通过结构离散求得物理量的近似解。由于具有严谨的数学理论基础和强大的灵活性，有限元方法已广泛应用于科学研究和工程应用的各个领域。

本书面向力学类专业高年级学生，以弹性静力学问题为主要对象，介绍有限元方法求解问题的基本思想和实施步骤，包含一维单元和计算过程、基本单元、变分法、加权残值法、等参单元等7章主要内容，每章辅以一定数量习题。附录中给出了两种典型二维有限单元程序的使用说明及源代码，供读者进行编程实践或求解简单实际问题。本教材介绍的有限元法可拓宽至力学领域的其他问题及其他领域偏微分方程的边值问题。

图书在版编目(CIP)数据

简明有限元教程/李录贤，文毅，关正西编. —西安：西安交通大学出版社，2016.4

ISBN 978-7-5605-8439-3

Ⅰ.①简… Ⅱ.①李… ②文… ③关… Ⅲ.①有限元法-高等学校-教材 Ⅳ.①O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 072969 号

书　　名　简明有限元教程
编　　者　李录贤　文　毅　关正西
责任编辑　刘雅洁　李　佳

出版发行　西安交通大学出版社
（西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049）
网　　址　http://www.xjtupress.com
电　　话　(029)82668357　82667874(发行中心)
(029)82668315(总编办)
传　　真　(029)82668280
印　　刷　虎彩印艺股份有限公司

开　　本　787mm×1092mm　1/16　**印张**　11.5　**字数**　273 千字
版次印次　2017 年 2 月第 1 版　2017 年 2 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5605-8439-3
定　　价　28.00 元

读者购书、书店添货，如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
订购热线：(029)82665248　(029)82665249
投稿热线：(029)82665640
读者信箱：lg_book@163.com

版权所有　侵权必究

序

本教材根据第三作者翻译、第一作者校译的《有限元分析的概念及应用》(西安交通大学出版社,2007)第 1 至 7 章内容编写而成。

有限元方法是科学研究的重要工具,也已成为解决大型复杂工程问题的最有效途径。有限元方法是一种独立的方法,不脱离应用背景、又体现有限元方法独立性,是讲授这门课程的艺术,是一个需要研究的有趣的教学法。

R . Cooke 教授编写的英文原著《Concepts and Applications of Finite Element Analysis》不但语言优美,而且符合学生的认知和学习规律,是一本经典的有限元教材和专著;本书第三作者将其翻译并引入到国内,可谓是有限元领域教育教学和研究者们的幸事。

为实现真正的双语教学,选取合适的教材是必须解决的第一个现实问题。作者们研究发现,《有限元概念及应用》的前 7 章内容,体系和内容上较为系统,可同时满足双语课程教学和学生学习有限元知识两方面的需要。因而,以《有限元分析的概念及应用》的 7 章内容为蓝本,形成本教程,其框架和主体内容也与英文原著的相应章节基本保持一致。十余年来,本书第一、二作者利用该教程为西安交通大学工程力学和工程与结构分析两个专业的学生进行了课堂教学实践,因而在编写过程中,也加进去了作者们自己的一些理解和思考,同时对原著和译著中的个别谬误和不完善之处进行了修改和补充。

这本教材的成型,得益于第三作者的中文译本。另外,该教材的雏形是课堂教学的课件,如果里面还留有口语化的地方,敬请谅解。

编著本教材的目的纯粹是为高年级大学生计算力学双语课堂的学习提供便利,如果本教材还为其他人员的学习、工作和研究提供了帮助,作者们将不胜荣幸。

本教材与相应外文教材具有良好的对应性。另外,本书的出发点也不是追求有限元知识的大而全。

还需要在此特别说明的是,由于有限元教材、专著及文献非常庞杂,基本方法也已相当成熟,为了保持整体叙述的连贯性,本书中没有列出参考文献,希望严谨的考究者知情。

本书后所附程序源代码是在《计算力学教程》(1992 年 6 月第 1 版,殷家驹,张元冲)附录 A 和附录 B 基础上修改而成,在此表示感谢。这些代码经西安交通大学力硕 05 白乐园同学和 2013 级硕士生田成之同学修改、调试并最终完成,在此

一并表示感谢。

本书得到国家自然科学基金项目(编号:11672221,11272245,11321062)资助,在此表示感谢。

由于作者水平所限,其中难免仍有不少差错和谬误,敬请指正。

谢谢!

编　者

2016年9月于西安

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

目　录

第1章 绪 论

本章的目的是对有限元方法(Finite Element Element, FEM)进行概述。同时,将解决这样三个问题:①什么是有限元方法?②有限元方法可用于哪些问题?③怎样使用有限元方法?

1.1 有限元方法概述

有限元方法,也常称为有限单元分析(FEA),它是求解场问题数值解的一种方法。

场问题泛指需要确定物理量空间分布的问题,该物理量可以是标量,也可以是具有多个分量的向量。例如,确定一台发动机内部某个部件(如活塞)上的温度分布,或者确定混凝土石板路面的位移和应力分布,都属于场问题;前者的温度是标量场,而后者的位移则为向量场。

在数学上,一个场问题由微分方程或者积分方程描述,称为控制方程;在施加相应的边界条件后将形成一个完整的数学问题。这两种数学描述形式,都可用来建立有限元方程。

通用有限元分析软件已包含目前几乎所有常用的有限元方程,且具有亲切友好的用户界面和功能强大的前后处理功能。因此,即使人们对有限元知识或者对所求解问题知之甚少,也可运用它们。但是,如果缺乏足够的有限元知识,就很有可能造成小到令人烦恼、大到产生灾难的后果。

单个的有限单元可看作是结构的一小片。"有限"这个词界定了这种小片和微积分学中无穷小微元间的区别,并非与无限大等概念的区别;换句话说,"有限"是指这个"小片"具有实实在在的"体积",其上可进行积分等运算。

另外,在每个有限单元中,场量一般假定仅有简单的空间变化。例如,由最多二次的多项式予以描述,虽然这个假定在最近十余年不断地得以扩充和完善,但是,由于单元涵盖的区域内其实际物理场的变化常常很复杂,因此,有限元方法提供的仅是近似解。寻求近似解,是有限元方法的初衷;近似解是解的一种形式,它并非不正确的解。

连接单元的点叫做"结点",特定的单元排列称为一种网格剖分,图 1.1-1 是典型轮齿结构的一个有限元网格。这样,整个结构上的场量,将以分段形式逐单元地得到近似表示。

除非简单得不需有限元方法求解的问题,有限元方法计算得到的结果一般都不是精确解。但是,这种有限元方法的近似解可通过增加单元数量而提高其精度。

与其他数值方法相比,有限元方法具有通用性强、物理概念清晰等优点,具体表现在以下7个方面:

· 适用于任何场问题,例如热传导、应力分析、电磁场问题等。

· 不受结构几何形状限制,所分析的物体或区域可以具有任何形状。

· 分析的问题不受边界条件和载荷的限制。例如:在应力分析中,物体的任意部分都可以被支撑,分布力或集中力可施加在支撑以外的其他任何部分。

· 材料性质并不限于各向同性,也可以在单元间、甚至单元内发生变化。

· 不同性态和数学描述的部件可以结合起来,例如,单个有限元模型可以包含杆、梁、板、缆索和接触等多种单元。

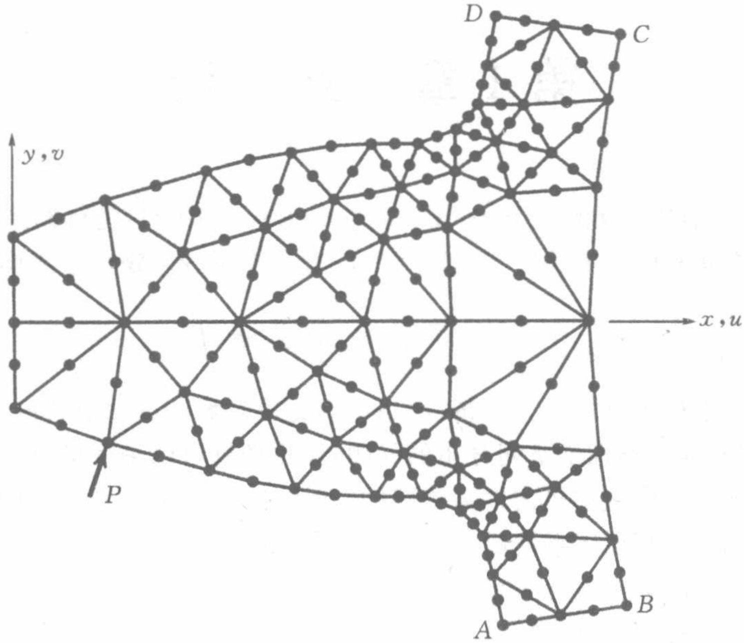


图 1.1-1 有限元方法中的单元、结点和网格

· 有限元分析的结构可与所分析的物体或区域尽可能地接近。

· 近似精度可通过网格细化容易地得到改善，即在梯度大的区域采用较高的网格密度、更多的单元可显著地提高精度。

自有限元方法出现以来，还相继出现了其他数值方法，但从目前看来，有限元方法在以上 7 个方面的综合品质最为优良。

多年来，有限元方程的建立及分析步骤经过了反复的修改、扩充以及细致的调整，可以说已臻完善。本书主要介绍有限元方法最基本的概念、最常用的单元，以打基础为宗旨。至于更新、更全面的细节，需要进一步阅读相关文献。

需要说明的是，随着信息技术、数字技术突飞猛进的发展，有限元方法的每个环节都已模块化或标准化，发展得非常成熟，且已成为众多科技工作者的必备技术，使用有限元方法已解决了许许多多大型复杂问题。因此，有限元方法的任何一点点实质性研究进展，都将具有深远意义。

1.2 问题的分类、建模及离散

1.2.1 问题的分类

求解一个物理问题的第一步是识别这个问题，即对问题进行分类。对一个物理问题进行分类，需关注以下 5 个方面：

· 问题涉及的物理现象是什么？

· 问题是否与时间有关？

· 问题是否是非线性的？要采用迭代求解吗？

· 问题要求什么样的结果？

· 问题要求多高的精度？

对这些问题的回答将关系到收集哪些信息，如何对问题建模，以及采用何种求解方法。

1.2.2 问题的建模

通过分类弄清问题后，就可以开始建立分析所需的模型。建立模型（简称建模）是指去除繁琐的细节，保留所有主要的特征，以使所求解的问题简化，但却能以足够精度得到原问题的结果。

建模中首先建立问题的数学模型，包括问题的控制微分方程和边界条件。有些问题的数学模型还包含诸如连续性、均匀性、各向同性、材料特性不变性、小应变和小转动等假设。有限元方法只是模拟给定的数学模型，如果数学模型不恰当，那么，即使有限元方法非常精确，得到的结果也与物理现实不一致。

数学模型根据分析者对问题的认识，对各种因素都进行了相应的理想化处理，例如：

· 在应力分析中，材料常常被认为是连续的、均匀的、各向同性和线弹性的，但实际中的材料并非都是如此。

· 分布在小片面积上的载荷认为是作用于某一点的集中载荷，这在物理上是不可能的。

· 支撑常常被认为是固定的，而实际中并没有完全刚性的支撑。

· 考虑了凹角，但却忽略了带来的应力集中，因为此时分析的重点在其他位置。

· 接近扁平的结构可简化为二维的平面问题（假定应力沿厚度不变）或板问题（假定应力沿厚度线性变化）来建模。

· 轴对称的压力容器问题，壁厚时用轴对称弹性方程控制、壁薄时则用轴对称的壳方程控制。

1.2.3 结构的离散

离散就是将数学模型中的结构划分成具有多个有限单元的网格，数学上就是将完全连续的物理场用有限个结点量及单元上的简单插值予以近似。显然，离散引入了离散误差。

一般来说，数值分析中的误差有以下 4 种来源：

一是建模误差，是指从实际问题到完成数学建模所带来的误差，这部分误差与有限元方法无关。

二是离散误差，即连续的物理问题用离散问题近似所带来的误差，与有限元方法相关。

三是数值计算误差，即计算设备、手段由于精度限制或算法差异带来的误差，后半部分与有限元方法有关，前半部分与计算条件有关。

四是解释误差，即对结果由于分析和解释产生的误差，这是一种新引入的误差概念。“仁者见仁、智者见智”，这部分与分析者所掌握的知识和技能有关。

图 1.2－1 以台形柱体问题为例，展示了一个实际物理问题从分类、建模到有限元离散的全过程。

图 1.2－1(a)是一个实际物理问题。图 1.2－1(b)是一个建好的数学模型，与图 1.2－1(a)相比，实际的“地基”简化成了“固定支撑”，载荷简化成了“集中力”，并考虑到横截面尺寸比轴向长度小很多，在物理上将该问题简化成了一个沿轴向的一维拉压问题。图 1.2－1(c)为

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

有限元方法中的离散，由于截面有明显的变化，离散的三个单元具有不同的横截面。图 1.2-1(d)是用有限元方法中的术语和概念所描述的最终模型。

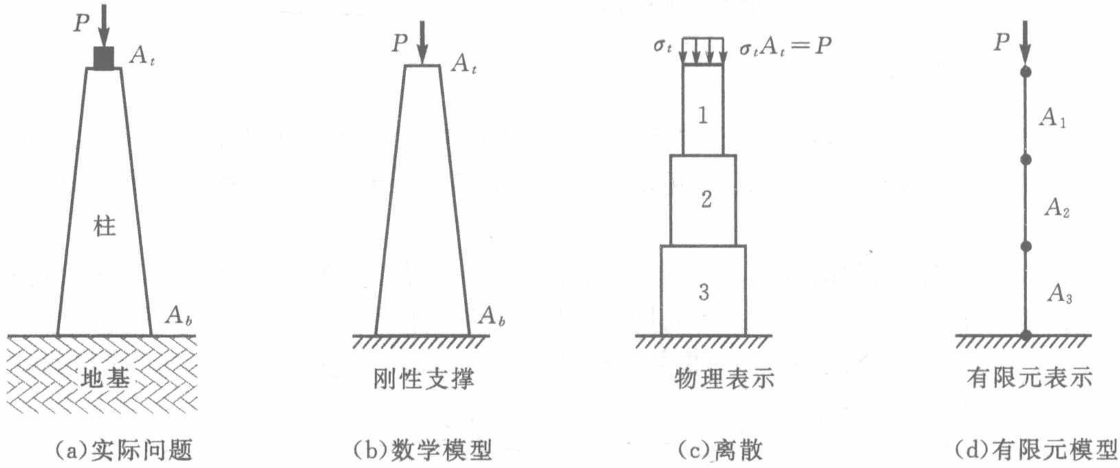


图 1.2-1　台形柱体问题的有限元建模过程

在完成有限元分析之后，对结果进行基本评估极其必要。例如，上述问题的轴向应力应介于 P/A_b 和 P/A_t 之间，是最基本的规律。实际上，即使这样简单的评估，也可帮助分析者发现由于数据输入等原因而导致的较大谬误。

1.3　有限元插值：单元、结点和自由度

有限元方法的实质是对场量进行分片插值近似，而且通常采用多项式插值。先看一个一维例子，以展示有限元方法的基本特征。

分析如图 1.3-1(a)所示的台形杆受拉问题。图 1.3-1(b)所示为受拉台形杆的有限元模型，台形杆被分为 3 个长度都为 L 的单元，有限元网格中有 1、2、3 和 4 共 4 个结点；每个结点有 1 个轴向位移 u(规定向右为正)，称为自由度；有 3 个单元，用连接结点表示为 1-2、2-3 和 3-4。

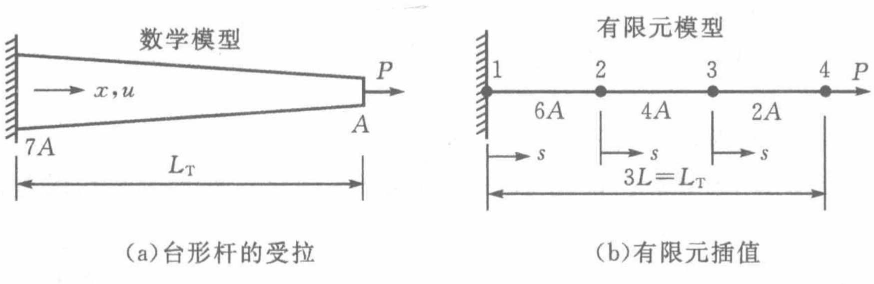


图 1.3-1　台形杆的受拉及有限元插值

以 2-3 单元为例，单元上的位移插值为

$$u = \left(1 - \frac{s}{L}\right)u_2 + \frac{s}{L}u_3 \tag{1.3-1}$$

式中：s 为单元的局部坐标，$s \in [0, L]$。

本构关系为

$$\sigma = E\varepsilon \tag{1.3-2}$$

根据本构关系，单元上的应力分别为(假定结点 1 受约束，即 $u_1=0$)

$$\begin{cases} \sigma_{1-2} = E\dfrac{u_2}{L} \\ \sigma_{2-3} = E\dfrac{u_3-u_2}{L} \\ \sigma_{3-4} = E\dfrac{u_4-u_3}{L} \end{cases} \tag{1.3-3}$$

一维问题非常简单，不需使用有限元方法中的矩阵运算(后面章节将会讲到)，仅利用材料力学知识就可简单地求得各结点位移为

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = \dfrac{PL}{6AE} \\ u_3 = u_2 + \dfrac{PL}{4AE} \\ u_4 = u_3 + \dfrac{PL}{2AE} \end{cases} \tag{1.3-4}$$

这样，利用插值，就可逐单元地得到整个杆的位移，结果是如图 1.3-2 所示的分段线性关系。进而根据式(1.3-3)，可得到 3 个单元上的应力，在各自单元上是个常值，如图 1.3-3 所示。

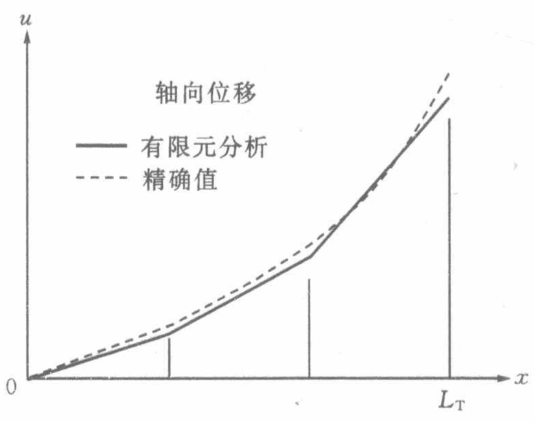


图 1.3-2　台形杆受拉问题的有限元位移结果

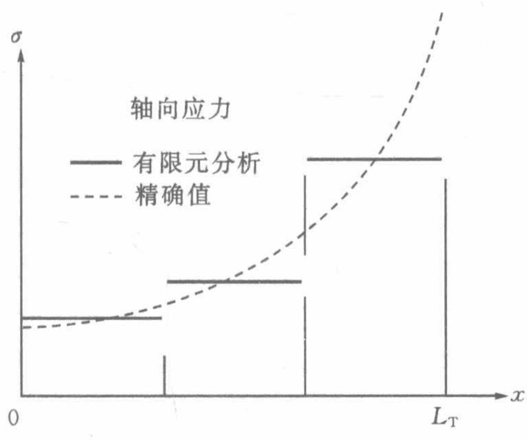


图 1.3-3　台形杆受拉问题的有限元应力结果

从图 1.3-2 可看出，结点上的场量(位移)值一般并非真实值，与精确值不一致，这是由于离散产生的误差所致。但从图 1.3-3 可以看出，本例中单元中心处的应力值却是准确的(应该是个极特殊的偶然)，在其他位置处，一般都比位移的精度更差，后续章节将会介绍这个结果的必然性。

对二维问题，情形将更为复杂。单元的形状及结点数将随所选单元类型而不同；每个结点有 x 和 y 方向的位移 u 和 v，因而具有 2 个结点自由度；单元上的位移插值也将随单元类型而异。例如，对于图 1.3-4 所示的三角形单元和四边形单元，其插值形式分别为

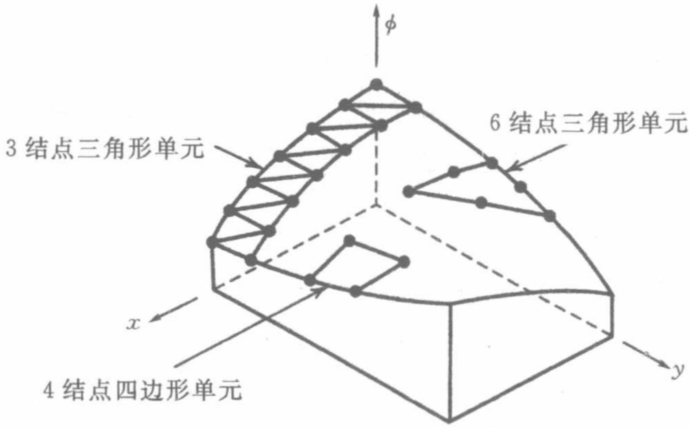


图 1.3-4 三种二维单元实例

$$\phi = a_1 + a_2 x + a_3 y \text{（对于 3 结点三角形单元）} \quad (1.3-5a)$$

$$\phi = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \text{（对于 4 结点矩形单元）} \quad (1.3-5b)$$

$$\phi = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 \text{（对于 6 结点三角形单元）} \quad (1.3-5c)$$

1.4 有限元方法发展简史

有限元方法的思想可以追溯到很久以前。但考虑到其实践性强的特点，有限元方法的发展，总体来说经历了以下几个重要阶段：

1851 年，Schellbach 把表面离散化成正三角形，得出了离散化面积的有限差分表达式，运用了离散化做法。

1906 年开始，研究者将杆系结构应用于平面弹性问题和板弯曲问题，运用了刚度矩阵概念，被认为是有限元分析的先驱，但还不能说此时已形成有限元方法的雏形。

1943 年，Courant 发表的论文标志着有限元方法的诞生。

1950 年代中叶，有限元方法实际上在航空工业已经取得了很大发展，但由于公司策略及商业利益等原因，这方面工作很晚才公开报道。

1960 年，Clough 提出了“有限单元”术语。

1963 年，通过拓宽经典 Rayleigh-Ritz 法，开始了有限元方法的数学理论研究，使得有限元方法真正成为一种科学的方法。

1965 年，利用有限元方法研究热传导和渗流问题。

19 世纪 60 年代末、70 年代初，出现了多用途的有限元方法计算机程序。

1967 年，OC Zienkiewicz 和 YK Cheung 出版了第一本有限元方法专著。

19 世纪 70 年代末以来，计算机图形学被用于有限元方法的程序中，开始有限元方法的前后处理功能研究，增添了有限元方法在实际应用中的吸引力。

19 世纪 90 年代，随着实际问题复杂程度的快速增加，有限元方法也得到了较大发展。例如：1991 年，Shi 基于有限元方法，提出了数值流形方法；1996 年，Babuska 提出了广义有限元方法；1997 年，Hou 提出了多尺度有限元方法；1999 年，Belytschko 提出了扩展有限元方法。

目前，有限元方法与计算机和程序语言同步发展、相得益彰，超过 100 万个自由度的有限

元分析已很常见。现在,关于有限元方法及应用的研究论文、会议论文已有很多,有限元方法已应用于科学研究和工程应用的每个领域和方方面面,多用途和特殊行业的专用有限元软件也不计其数。

1.5 运用有限元方法求解的主要环节

运用有限元方法求解任何问题都需要经过相同的主要环节,这是有限元方法能与计算机紧密结合的突出特征。

如图 1.5-1 所示,虚框内是有限元方法本身的实施步骤,包括前处理、求解及后处理三大块,我们将按黑箱一同看待,特别是求解部分,将是后续章节着重讲解的内容。下面对运用有限元方法求解的其他环节予以介绍。

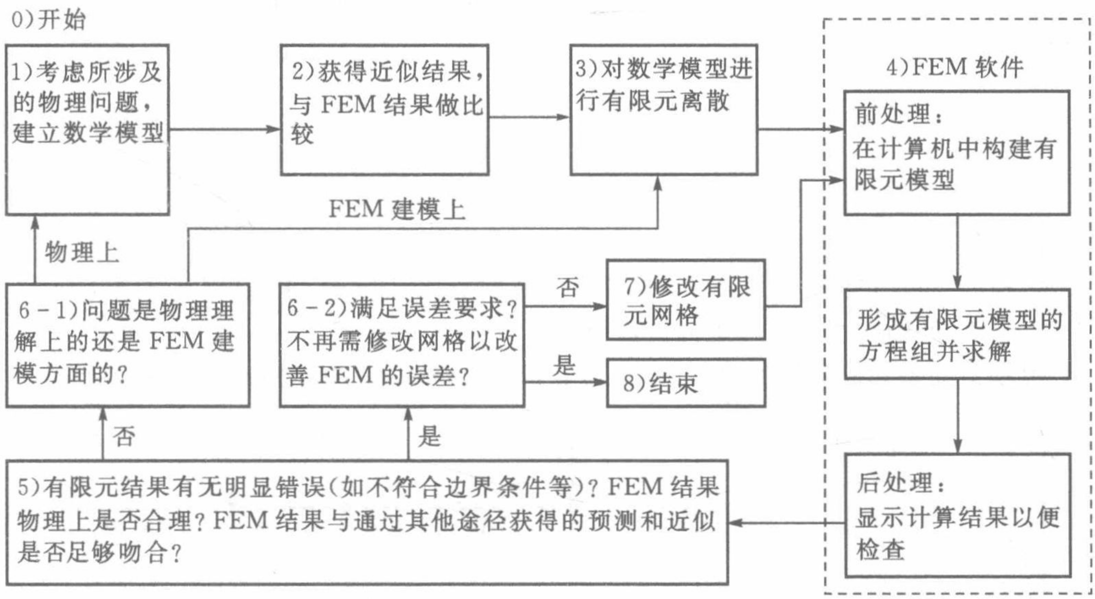


图 1.5-1 运用有限元方法求解的主要环节

这个过程可总结为以下 9 步:

Step 0,启动有限元方法求解过程。

Step 1,对所求解问题进行数学建模。

Step 2,对所求解问题给出总体评估。

Step 3,进行有限元离散,复杂问题可在 Step 4 中进行。

Step 4,有限元方法求解,包括三部分:复杂问题的离散和加载等前处理、有限元方程的建立及求解、结果的处理和显示等后处理。

Step 5,结合 Step 2,对所得结果进行总体评判。

Step 6,分两个分支:分支一 Step 6-1,此时 Step 5 中没通过总体评判,若归结为数学建模的问题则转入 Step 1,若归结为有限元离散的问题则转入 Step 3;分支二 Step 6-2,此时 Step 5 中通过了总体评判,进入下一步。

Step 7,通过了 Step 5 中的总体评判,但不满足精度要求,修改有限元网格,转入 Step 4。

Step 8,已满足精度要求,问题求解结束。

1.6 学习有限元方法的意义

时至今日,有限元方法的发展呈现这样三个特点:①多功能的分析程序很多;②已开发并研制出多种单元;③软件的适应性如此强大,以至于普通用户都可运用有限元方法获得问题的解答。

但为什么仍然要学习有限元方法呢?先看一组运用有限元方法的统计数据:

在 52 个发生错误的案例中,7 个是硬件错误,13 个是软件错误,30 个是由用户造成的错误,2 个是由其他原因引起的错误。其中用户造成的错误超过 50%。

可见,即使在今天,学习有限元方法仍具有十分重要意义,因为只有理解了有限元的基本原理,才能避免用户因滥用有限元方法而带来的错误。另一方面,只有学习了有限元知识,才能够主观能动地发现并修正在运用有限元方法进行建模、数据输入和软件选取等过程中可能出现的错误。

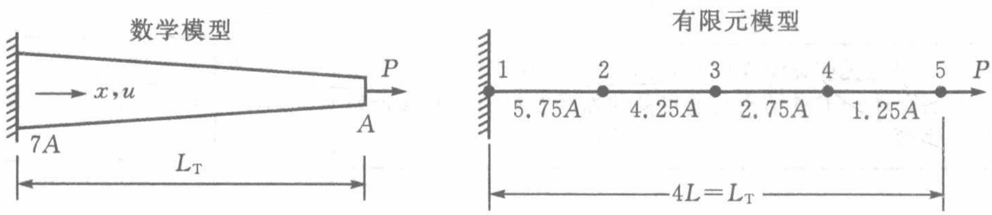
习题 1

1. 如题 1 图所示的受拉台形杆,材料的弹性模量为 E。

(1)按材料力学的方法求位移和应力的精确解(表达式);

(2)将杆沿长度方向分为 4 等分,仿照 1.3 节的有限元方法,求 $x=L_T/4$、$x=L_T/2$、$x=3L_T/4$ 和 $x=L_T$ 处轴向位移和应力的近似值;

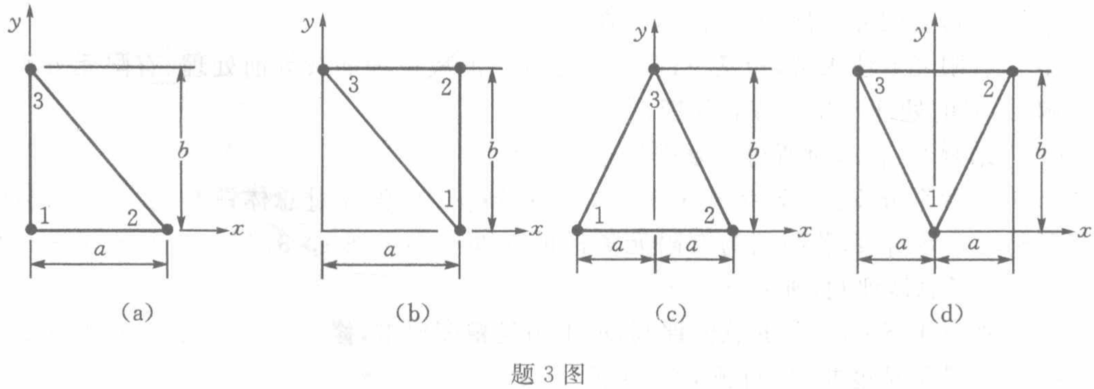
(3)根据精确解和近似值画出 u - x 曲线和 σ - x 曲线,验证有限元解的正确性。



题 1 图

2. 应变的计算公式为 $\varepsilon_x=\partial u/\partial x$,对于 4 结点平面单元,若位移插值为 $u=a_1+a_2x+a_3y+a_4xy$。(1)求 ε_x 的表达式;(2)考察 ε_x 在单元间的连续性。

3. 在 3 结点三角形单元中,场可用广义自由度 a_i 表示为 $\varphi=a_1+a_2x+a_3y$。



题 3 图

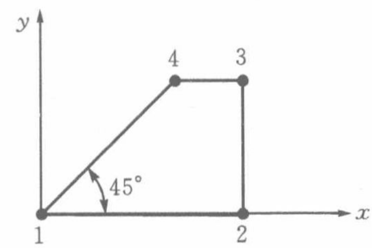
(1)对于题 3 图(a)所示的特殊三角形，将场表示为 $\phi = f_1\phi_1 + f_2\phi_2 + f_3\phi_3$ 的形式，即求 f_i $(i = 1 \sim 3)$ 的具体表达式；

(2)对题 3 图(b)、(c)、(d)所示的特殊三角形，求 $f_i(i = 1 \sim 3)$ 的具体表达式。

4. 对题 4 图示的平面四边形单元，假定用广义坐标 a_i 表示的场量为 $u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy$。

(1)求每条边上的 $\phi = \phi(x, y)$；

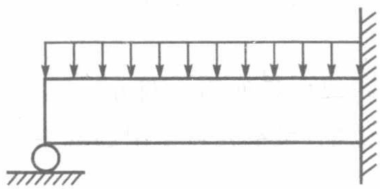
(2)试问该单元与相邻的单元协调吗？



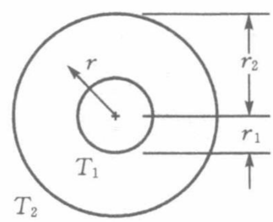
题 4 图

5. 题 5 图中是一个与材料力学教材中相仿的受均布载荷作用的带支承悬臂梁。试问：这个模型对实际情况都做了哪些理想化处理？

6. 圆柱管横截面如题 6 图示，内外壁的温度分别为 T_1 和 T_2。管内任意半径处温度的解析解为 $T = T_1 + (T_2 - T_1)\dfrac{\ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)}$。但是，实际情形和这一理想情况可能差别较大，使得上述解析解不再适合，而需要借助于有限元方法确定温度分布。试举出使上述解析解不适合的几个具体情形。



题 5 图



题 6 图

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com