

刘彦佩

半闲数学集锦

**Semi-Empty Collections
in Mathematics by Y.P.Liu**

第廿二编

时代文化出版社

刘彦佩

半闲数学集锦

**Semi-Empty Collections
in Mathematics by Y.P.Liu**

第廿二编



时代文化出版社

半闲数学集锦（第廿二编）

作 者：刘彦佩

出版单位：时代文化出版社

地 址：香港湾仔骆克道骆基中心23楼C座

编辑设计：北京时代弄潮文化发展有限公司

地 址：北京市海淀区中关村创业大街25号家谱传记楼

电 话：010-68920114 13693651386

网 址：www.grcsw.com

印 刷：京冀印刷厂

开 本：880×1230 1/16

版 次：2016年9月第1版

书 号：ISBN 978-988-18455-0-4

定 价：全套 1890.00元（共22编）



版权所有 翻印必究

第 廿二 编序

本编的两部分: 第一部分由文 22.01[501]—22.04[504], 4 篇组成.

特别地, 需要指出, 文 22.01[501]—22.04[504], 反映我对于多面性理论([396], 15.01—15.21)的最新发展. 核心在于, 通过在多面形上, 揭示各种要求的变换(拓扑的, 或非拓扑的!), 以图更接近所需要的目标.

在我的研究工作中, 早在 30 余年前, 就曾注意到, 在多面形上, 选择合适的变换, 以一步一步地, 接近所预想的目标. 例如, 1.07[009], 1.08[010] 和 1.12[016], 为确定图的最大亏格; 2.08[135] 和 3.18[141], 为判定纽结在平面上的投影等.

同时, 开始通过图上的双迁覆盖, 用多面形表示图在 2-流形(特别地, 曲面)上的嵌入, 使我最终发现了, 图上的一对新的, 同调与上同调定理(参见, 2.05[137]), 3.15[141], 5.07[438], 17.06[400], 以及 19.07[473] 等), 不仅统一了由 Lefschetz, MacLane 和 Whitney, 分别独立地, 所创建的三条, 辨别图平面性的理论路线, 还曾令人不解地, 提供了识别, 图在任一给定亏格(非 0!)曲面上的, 可嵌入性(参见 5.16[141], pp.241—244; 19.30[486], pp.299—303; 18.53[453] 等).

对图双圈覆盖的注意, 源自文 13.11[193], 当时我想基于文 1.07[009] 提出那种 Euler 回, 通过逐步适当地, 消去圈的办法, 判定一个图, 双圈覆盖的存在, 从而完成双圈覆盖猜想. 因为未能证明, 只能导致在文 4.30[208] 中, 提出一批, 有关图曲面嵌入, 的猜想. 它们当中, 有些与双圈覆盖猜想等价, 有些形式上弱, 也有些形式上强. 例如, 弱嵌入猜想形式上强于双圈覆盖猜想, 但弱于强嵌入猜想.

文 22.01[501]—22.04[504], 就是经由确认弱嵌入猜想, 论证弱嵌入猜想与双圈覆盖猜想等价, 进而证明对于(节点)不可分离图, 强嵌入猜想与弱嵌入猜想等价, 导致强嵌入猜想成立. 为文 4.30[208] 中, 有关嵌入猜想的研究, 提供了一种理论基础, 也可以想象, 会为消圈法带来新的生机.

第二部分包含六款, 即款 22.05—22.10.

款 22.05 是我的自述纲要. 内含我的主要学术经历, 伴随当时的社会环境和历史条件. 从中可以看到, 不同时期, 工作重点的变迁, 以及对研究工作的影响. 特别是接触到, 我本人认识的, 在不利环境中, 如何前进, 也许对于留意的读者, 会有所启示.

其中心在于, 从我本人研究和指导研究生过程中, 提出了 165 个研究计划. 对每一项计划, 都或多或少地, 列出有关, 我所熟悉的, 研究文献, 以及可能的研究途径.

这些计划, 都有两个共同的特点: 不易完满地解决, 和有接近的途径. 所谓

完满是指, 要完成三个阶段: 理论系统化, 运行有效化和利用智能化.

我本人的工作, 虽然 有些已经进入, 或基本完成, 前两个阶段, 多半还只停留在第一阶段. 由于技术条件, 以及对其了解程度等的限制, 至今没有一项, 完成了第三阶段. 切望不久的将来, 能够出现一个完满完成的范例.

款 22.06—22.10, 都是为考虑各种不同需要, 查阅方便, 而设立的.

刘彦佩
2015 年 10 月
於北京上园村

第 廿二 编目录

22.01[501]	我所初识的高等图论(XXV): 迂的圈剖分	10543
22.02[502]	我所初识的高等图论(XXVI): 图的双圈覆盖	10564
22.03[503]	On Partition of a Travel by Circuits	10582
22.04[504]	Proofs of WEC, CDCC and SEC on Graphs	10605
22.05	自述纲要	10622
22.06	著作目录与国外摘评索引	10774
27.07	中文文选总目	10850
22.08	英文文选总目	10857
22.09	专著目录	10871
22.10	集锦总目录	10872

我所初识的高等图论(XXV): 迂的圈剖分

刘彦佩

(北京交通大学数学研究所, 北京 100044)

[提要] 圈叠就是两圈的并伴之公共边作为 2-重边. 本讲的主要目标, 在于讨论由两个圈组成的圈叠. 此二圈的每一个, 都有一边, 用一对互逆的文字表示, 例如一个为 $|a, a^{-1}|$ 和另一个为 $|b, b^{-1}|$. 给出使得这种圈叠存在由连 a 与 b 的两条路和一些长度不小于 3 的圈组成剖分的条件. 提供这种剖分在完成图弱嵌入、双圈覆盖和强嵌入三个猜想过程中, 不可忽视的作用.

[关键词] 图, 多面形, 路, 圈, 圈叠, 剖分.

Advanced Graph Theory as I Have Initially Realized (XXV) —Partition by Two Paths with Circuits

Yanpei Liu

(Institute of Mathematics, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044)

Abstract — A *circuits fold* is the union of two circuits C_a and C_b with common edges as 2-edges. Each of the two circuits has an edge represented by a mutual inverse pair of a letter, i.g., $|a, a^{-1}|$ and $|b, b^{-1}|$. This lecture finds the condition for a circuit fold having a partition of two paths between $a = |a, a^{-1}|$ and $b = |b, b^{-1}|$ with circuits and then if any, construct such a partition. This result is shown to have particularly an importance in the proofs of Weak Embedding Conjecture(WEC), Circuit Double Cover Conjecture(CDCC) and Strong Embedding Conjecture(SEC) of graphs on the basis of an algebra established on polyhedra.

[Keywords] Graph, polyhedron, path, circuit, circuit fold, partition

§25.1 问题的描述

令 $C_a = (aAa)$ 和 $C_b = (bBb)$ 为两个圈, 各带一条边分别用 a 和 b 标示, 都在圈上出现两次.

- 圈叠: 两个圈的并, 使得每一条公共边都恰出现两次(视为 2-重边).

因为两个无公共边, 或仅有一条公共边, 圈的并, 对于这里所考虑的问题, 不是无意义, 就是另当别论, 总是讨论至少有两条公共边的圈叠. 这些公共边被称为叠边.

令 S_a 和 T_a 分别为沿 C_a 第一次和最后一次遇到的叠边之端. 同样地, 可知 S_b 和 T_b 的意义.

引理 1 在圈叠的基准图上, 删去所有公共边所得的图, 是无桥的.

证明 因为 $(C_a \cup C_b) - (C_a \cap C_b)$ 是圈边不交的并, 从而每一条边都在某圈上. 这就导致欲证的结论. $\square$

因为圈叠基础图的每个节点不是 2 次就是 4 次, 这个引理显示, 在圈叠上, 非公共边所生成的图, 为无公共点的圈之和.

引理 2 在 C_a 上, S_b 和 T_b 既不可出现在 S_a 之前, 又不可出现在 T_a 之后.

证明 否则, 就会与 S_a 和 T_a 在 C_a 上的意义, 产生矛盾. $\square$

可见, S_b 和 T_b 只能在 C_a 上, 落在 S_a 与 T_a 之间.

● **二路附圈剖分:** 在圈叠 $C_a \cup C_b$ 上的两条路 $L_{a\bar{b}}, L_{\bar{a}b}$ (或 $L_{ab}, L_{\bar{a}\bar{b}}$) 和一些圈 (不含由一条共边形成的长度为 2 的圈!), 它们彼此无公用的边, 并且它们的并就是这个圈叠本身.

引理 3 当 $T_a = T_b, S_a = S_b$ (或 $T_a = S_b, S_a = T_b$) 时, 圈叠有一个二路剖分.

证明 令圈叠由 $C_a = aA_0(S_a, T_a)A_1a$ 和 $C_b = bB_0(S_b, T_b)B_1b$ 构成. 事实上,

$$L_{ab} = aA_1(S_a, T_a)B_1b \text{ 和 } L_{\bar{a}\bar{b}} = \bar{a}\bar{A}_1(T_b, S_b)\bar{B}_0\bar{b}$$

就组成了这个圈叠的一个二路剖分. $\square$

相仿地, 当 $T_a = S_b, S_a = T_b$ 时, 有 $\{L_{a\bar{b}}, L_{\bar{a}b}\}$ 为一个二路剖分.

引理 4 在圈叠二路附圈剖分中, 无论一条路, 还是一个圈, 都不存在两相继非共边, 与一条共边有一端为三边共用.

证明 因为共边的任一端, 都恰关联两条非共边, 若引理的结论不成立, 必将导致, 有条共边的两次出现, 同在剖分中的一个路, 或一个圈上, 与路, 或圈, 矛盾. $\square$

这个引理启示我们, 在二路附圈剖分中, 路与圈都不可能出现, 两条在圈叠中无共边的极大段相继的情形.

引理 5 在圈叠中, 如果有至少两条公共边, 则 S_b 和 T_b 不可能为同一条公共边的两个端点.

证明 因为共边的任一端, 都恰关联两条非共边, 若引理的结论不成立, 必将导致, 有条共边的两次出现, 同在剖分中的一个路, 或一个圈上, 与路, 或圈, 矛盾. $\square$

这个问题追源于, 处理第 XXV 讲, 注 1 中的否则. 由于构形 A , 即 $(aAa^{-1}B) \cup (bCb^{-1}D)$ 中 $A \cup C$ 与 $B \cup D$ 的对称性, 允许我们只研究前者, 而不失一般性. 令 $A \cap C = \{c_1, c_2, \dots, c_l\}$, $l \geq 1$, 其中的自然序, 即沿 A 与 C 公共边出现的次序. 记

$$A = A_0 c_1 A_1 c_2 A_2 \cdots c_l A_l \text{ 和 } C = C_0 c_{i_1} C_1 c_{i_2} C_2 \cdots c_{i_l} C_l, \quad (1)$$

其中 i_j , 自然序 $j = 1, 2, \dots, l$ 为沿 C 与 A 公共边出现的次序.

假若已经得到圈叠 $(aAa^{-1}) \dot{+} (bCb^{-1})$ 的一个二路附圈剖分 $\{L_{a\bar{b}}, L_{\bar{a}b}, T_j, j = 1, 2, \dots, k_1\}$ 其中 $L_{a\bar{b}}$ 为从 a 到 $\bar{b}$ 的路, 和 T 为圈. 同样地, 也可得到圈叠 $(a^{-1}Ba) \dot{+} (b^{-1}Db)$, $(A \cup C) \cap (B \cup D) = \emptyset$, 的一个二路附圈剖分 $\{L'_{a\bar{b}}, L'_{\bar{a}b}, T'_j, j = 1, 2, \dots, k_2\}$. 由此, 即可得这两个圈叠之并的一个双迂附圈剖分 $\{T_i | i = 0, 1, \dots, k_1 + k_2 + 1\}$, 其中

$$\begin{cases} T_0 = L_{a\bar{b}} \cup L'_{\bar{b}a}; \\ T_{k_1+k_2+1} = L_{\bar{a}b} \cup L'_{ba}; \\ T_{k_1+j} = T'_j, j = 1, 2, \dots, k_2. \end{cases} \quad (2)$$

在这里, 迂 T_0 和迂 $T_{k_1+k_2+1}$ 也是圈. 因此, 这个双迂附圈剖分, 就是圈剖分.

- 黑-白框: 如果将 A_i 和 $B_i, i = 0, 1, 2, \dots, l$, 都视为边, 这样在圈叠上的边, 就被分为两类: 公共边, 记为黑边; 其它, 记为白边. 如此所得的图, 被称为黑-白框.

在黑-白框中, 还有两条需要特别说明的边, 即用 $aa^{-1} = a\bar{a}$ 和 $bb^{-1} = b\bar{b}$ 表示, 被称为灰边. 一条黑边与白边相间的路, 被称为交错路. 自然, 可知交错圈的意义.

引理 6 在圈叠二路附圈剖分中, 两条路都是灰端交错路, 和圈都是交错圈.

证明 实际上, 就是引理 4 的一个直接结果. □

因为在黑-白框上, 上面的迂剖分, 就是圈剖分, 这就是为何也尽直称之为圈剖分, 以示白边所对应的途径, 在运算中不变.

§25.2 一条公共边

引理 7 对于圈叠 $(aAa) \dot{+} (bAb)$, 若 $A \cap B = \{c_1\}$, 则它只有二路剖分.

证明 因为 $A \cap B = \{c\}$, 有 $(aAa) \cup (bAb) = (aA_0 c_1 A_1 a) \cup (bB_0 \bar{c}_1 B_1 b)$. 这就导致, $L_{a\bar{b}} = \langle aA_0 c_1 (bB_0)^{-1} \rangle = \langle aA_0 c_1 \bar{B}_0 \bar{b} \rangle$ 和 $L_{\bar{a}b} = \langle (c_1 A_1 a)^{-1} B_1 b \rangle = \langle \bar{a} \bar{A}_1 \bar{c}_1 B_1 b \rangle$ 是两条路. 容易验证, $\{L_{a\bar{b}}, L_{\bar{a}b}\}$ 提供这个圈叠的一个剖分. □

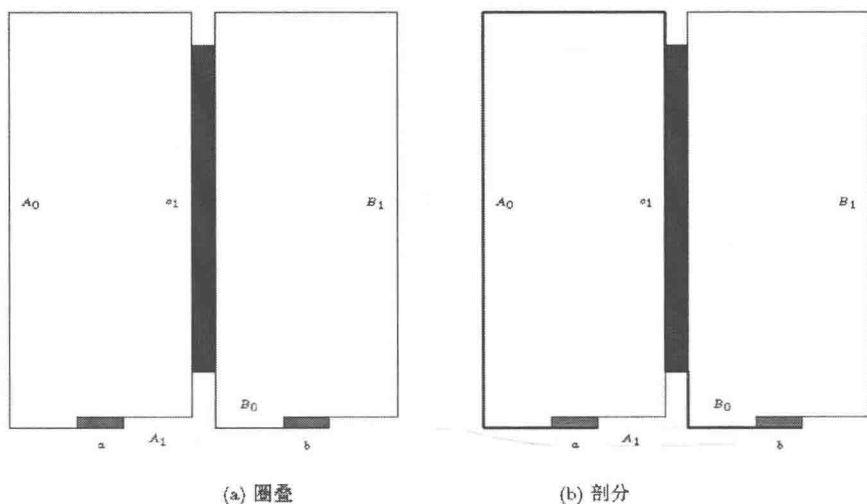


图 2.1 一条公共边

在图 2.1 中, (a) 给出这个圈叠, 和 (b) 以黑实线表示 L_{ab} .

§25.3 两条公共边

由引理 3, 只需考虑 $|\langle S_b, T_b \rangle| < |\langle S_a, T_a \rangle|$ 的情形. 因为只有两条黑边, $|\langle S_a, T_a \rangle| = 3$, 只需考虑 $|\langle S_a, T_a \rangle| = 1$, 或 2, 两种情形.

由 S 和 T 两个端口之间的对称性, 此后总限定, 在圈 C_a 上, $S_a \preceq T_b \prec S_b \preceq T_a$, 而不失普遍性.

当 $|\langle S_a, T_a \rangle| = 1$ 时, 由引理 5, 只能 T_b 与 T_b 为一条白边的两端. 从而, 只能 $\langle T_b, S_b \rangle = A_1$. 如图 3.1 所示, (a) 给出圈叠, 和 (b) 提供了剖分 $\{L_{ab} (= \langle aA_0c_1B_2b \rangle), L_{ab} (= \langle \bar{a}\bar{A}_2\bar{c}_2B_0\bar{b} \rangle), C_1 (= \langle c_1A_1c_2B_1 \rangle)\}$.

当 $|\langle S_a, T_a \rangle| = 2$ 时, 由引理 6, 只能 T_b 与 T_b 为由一条白边和一条黑边组成路的两端. 从而, 由对称性, 只能 $\langle T_b, S_b \rangle = A_1c_2$. 如图 3.2 所示, (a) 给出圈叠, 和 (b) 提供了剖分 $\{L_{ab} (= \langle aA_0c_1A_1c_2B_0\bar{b} \rangle), L_{ab} (= \langle \bar{a}\bar{A}_2\bar{c}_2B_1c_1B_2b\bar{b} \rangle)\}$.

引理 8 当圈叠只有两条公共边时, 如果没有两路剖分, 就有一个二路附圈剖分.

证明 当 $\langle T_b, S_b \rangle = 1$ 和 2 时, 图 3.1—图 3.2 显示了引理的结论. 当 $\langle T_b, S_b \rangle = 3$ 时, 由引理 3 给出. $\square$

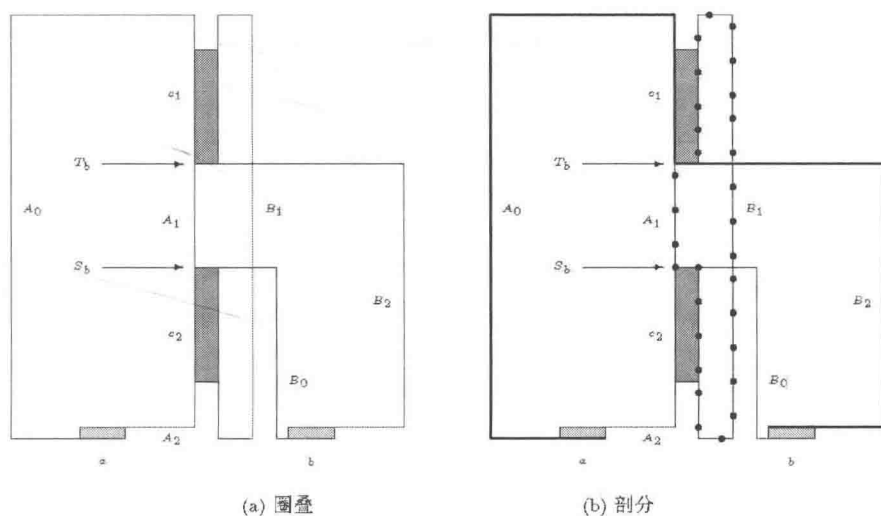


图 3.1 $\langle T_b, S_b \rangle = A_1$

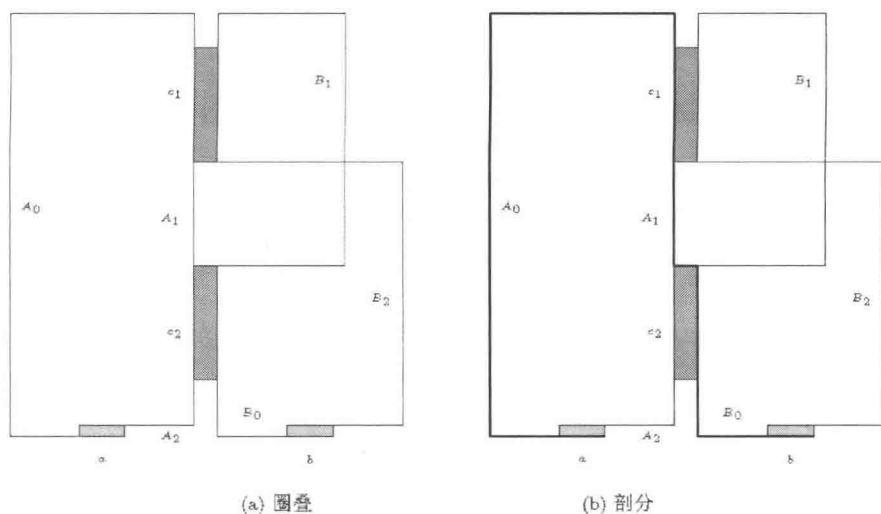


图 3.2 $\langle T_b, S_b \rangle = A_1 e_2$

§25.4 三条公共边

由引理 3, 只需考虑 $|\langle S_a, T_a \rangle| < |\langle S_a, T_a \rangle|$ 的情形. 因为只有三条黑边, $|\langle S_a, T_a \rangle| = 5$, 需要考虑 $|\langle S_a, T_a \rangle| = 1, 2, 3$ 和 4, 计四种情形.

当 $|\langle S_a, T_a \rangle| = 1$ 时, 由引理 5, 只能 T_b 与 T_b 为一条白边的两端. 从而, 有 $\langle T_b, S_b \rangle = A_1$ 或 A_2 . 考虑对称性, 只需讨论 $\langle T_b, S_b \rangle = A_2$. 如图 4.1, 根据 B_2 两种不同出口, 而分为 (a) 和 (b). 其中, (a) 提供的剖分为 $\{L_{ab}(\langle aA_0c_1B_2c_2B_3b \rangle), L_{\bar{a}\bar{b}}(\langle \bar{a}\bar{A}_3\bar{c}_3\bar{B}_0\bar{b} \rangle), C_1(\langle c_3B_1c_1B_2c_2A_2 \rangle)\}$ 和 (b) 为 $\{L_{ab}(\langle aA_0c_1A_1c_2B_3b \rangle), L_{\bar{a}\bar{b}}(\langle \bar{a}\bar{A}_3\bar{c}_3\bar{B}_0\bar{b} \rangle), C_1(\langle c_3B_1\bar{c}_1B_2c_2A_2 \rangle)\}$.

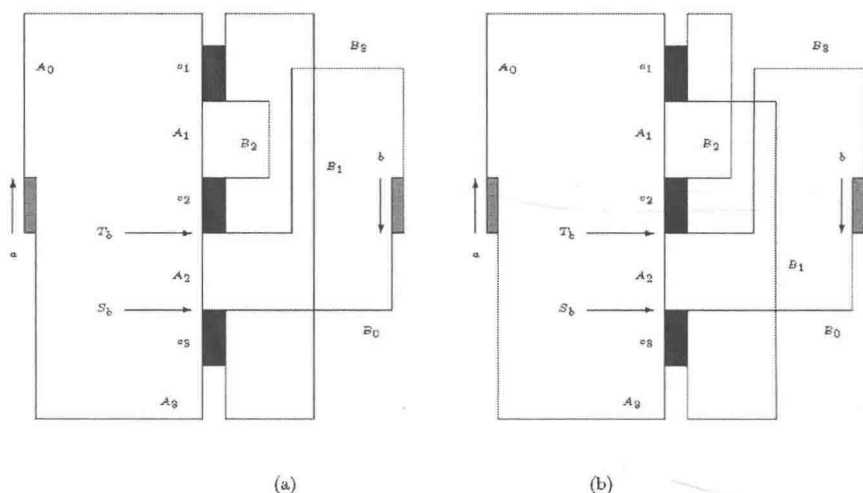


图 4.1 $\langle T_b, S_a \rangle = A_2$

当 $|\langle S_a, T_a \rangle| = 2$ 时, 根据方向对称性, 只需考虑 $\langle T_b, S_a \rangle = A_2c_3$ 和 c_2A_2 两种情形. 它们分别如图 4.2 和图 4.3 所示.

在图 4.2 中, 由 B_1 两种引入 c_1 的方式, 而被分为 (a) 和 (b). 其中, (a) 的剖分为

$$\{L_{\bar{a}\bar{b}}(\langle aA_0c_1A_1c_2A_2c_3\bar{B}_0\bar{b} \rangle), L_{ab}(\langle \bar{a}\bar{A}_3\bar{c}_3B_1c_1B_2c_2B_3b \rangle)\}$$

和 (b) 的剖分, $\{L_{\bar{a}\bar{b}}(\langle aA_0c_1A_1c_2A_2c_3\bar{B}_0\bar{b} \rangle), L_{ab}(\langle \bar{a}\bar{A}_3\bar{c}_3B_1c_1B_2c_2B_3b \rangle)\}$. 这两个, 在形式上, 是一样的!

在图 4.3 中, 同样由 B_1 两种引入 c_1 的方式, 而被分为 (a) 和 (b). 其中, (a) 的剖分为

$$\{L_{ab}(\langle aA_0c_1B_2\bar{B}_3b \rangle), L_{\bar{a}\bar{b}}(\langle \bar{a}\bar{A}_3\bar{c}_3\bar{B}_0\bar{b} \rangle), C_1(\langle \bar{c}_1\bar{B}_1\bar{c}_3\bar{A}_2\bar{c}_2\bar{A}_1 \rangle)\}$$

和 (b) 的剖分, $\{L_{\bar{a}\bar{b}}(\langle aA_0c_1B_1\bar{B}_0\bar{b} \rangle), L_{ab}(\langle \bar{a}\bar{A}_3\bar{c}_3\bar{A}_2\bar{c}_2B_3b \rangle), C_1(\langle c_1A_1c_2\bar{B}_2 \rangle)\}$.

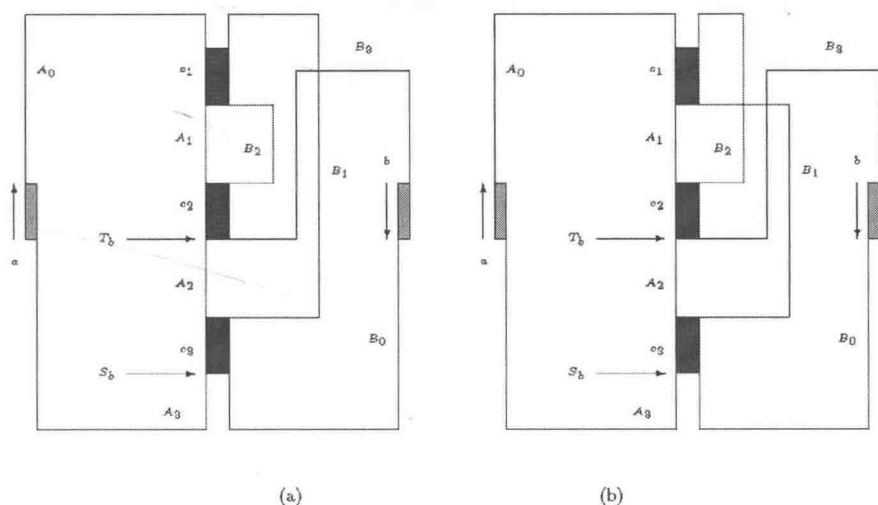


图 4.2 $\langle T_b, S_a \rangle = A_2c_3$

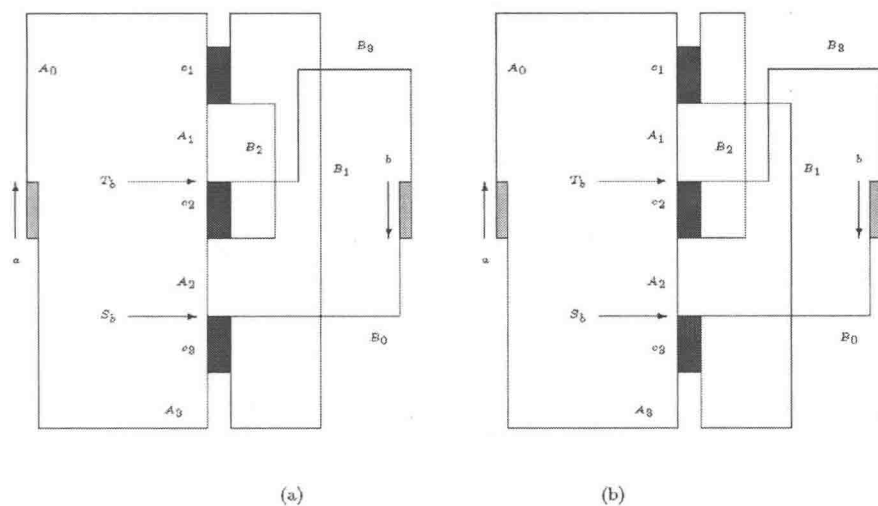


图 4.3 $\langle T_b, S_a \rangle = c_2A_2$

当 $| \langle S_a, T_a \rangle | = 3$ 时, 根据方向对称性, 只需考虑 $\langle T_b, S_a \rangle = c_2 A_2 c_3$ 和 $A_1 c_2 A_2$ 两种情形. 它们分别如图 4.4 和图 4.5 所示.

在图 4.4 中, 由 B_1 两种引入 c_1 的方式, 而被分为 (a) 和 (b). 其中, (a) 的剖分为

$$\{L_{a\bar{b}} (= \langle a A_0 c_1 A_1 c_2 A_2 c_3 \bar{B}_0 \bar{b} \rangle), L_{\bar{a}b} (= \langle \bar{a} \bar{A}_3 \bar{c}_3 B_1 c_1 B_2 \bar{c}_2 B_3 b \rangle)\}$$

和 (b) 的剖分, $\{L_{a\bar{b}} (= \langle a A_0 c_1 A_1 c_2 A_2 c_3 \bar{B}_0 \bar{b} \rangle), L_{\bar{a}b} (= \langle \bar{a} \bar{A}_3 \bar{c}_3 B_1 c_1 B_2 \bar{c}_2 B_3 b \rangle)\}$. 这两个, 在形式上, 是一样的! .

在图 4.5 中, 同样由 B_1 两种引入 c_2 的方式, 而被分为 (a) 和 (b). 其中, (a) 的剖分为

$$\{L_{ab} (= \langle a A_0 c_1 B_3 b \rangle), L_{\bar{a}\bar{b}} (= \langle \bar{a} \bar{A}_3 \bar{c}_3 \bar{B}_0 \bar{b} \rangle), C_1 (= \langle c_1 A_1 c_2 B_2 \rangle), C_2 (= \langle c_2 A_2 c_3 B_1 \rangle)\}$$

和 (b) 的剖分, $\{L_{a\bar{b}} (= \langle a A_0 c_1 A_1 c_2 \bar{B}_1 \bar{c}_3 \bar{B}_0 \bar{b} \rangle), L_{\bar{a}b} (= \langle \bar{a} \bar{A}_3 \bar{c}_3 \bar{A}_2 \bar{c}_2 B_2 c_1 B_3 b \rangle)\}$.

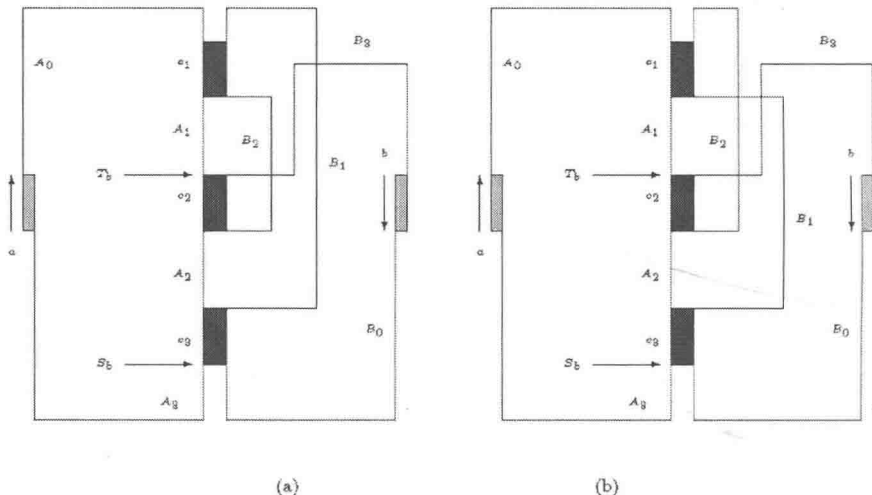
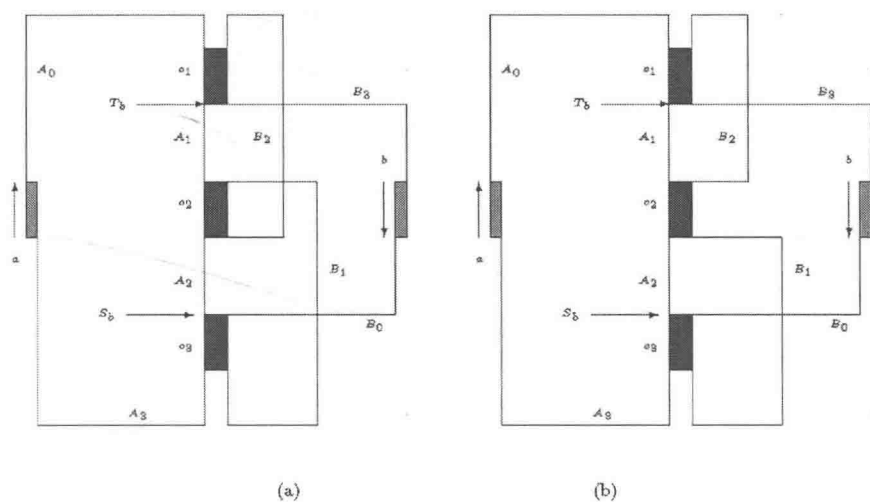
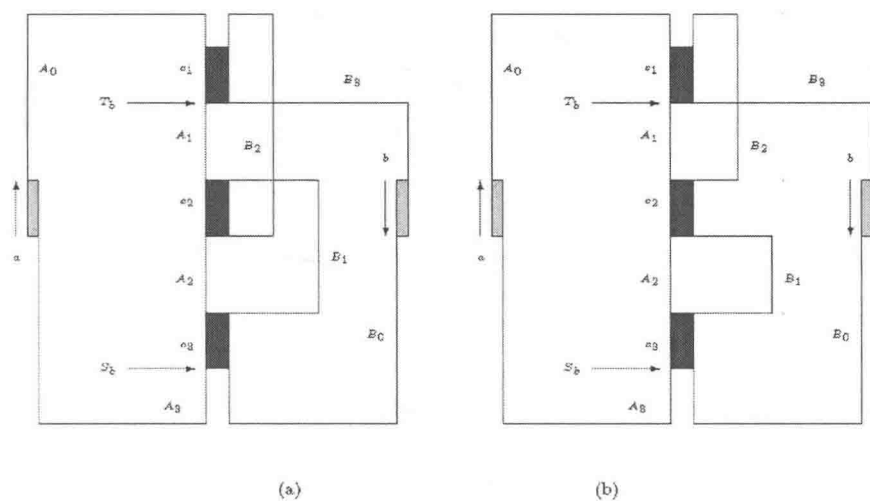


图 4.4 $\langle T_b, S_a \rangle = c_2 A_2 c_3$

当 $| \langle S_a, T_a \rangle | = 4$ 时, 按照方向的对称性, 只需考虑 $\langle T_b, S_b \rangle = A_1 c_2 A_2 c_3$. 如图 4.6 所示. 因为 B_2 进入 c_1 有两种方式, 分别由图 4.6 中的 (a) 和 (b) 给出. 其中, (a) 提供剖分

$$\{L_{a\bar{b}} (= \langle a c_1 A_1 c_2 A_2 c_3 \bar{B}_0 \bar{b} \rangle), L_{\bar{b}} (= \langle \bar{a} \bar{A}_3 \bar{c}_3 B_1 c_2 B_2 c_1 B_3 b \rangle)\}$$

和 (b) 有剖分 $\{L_{a\bar{b}} (= \langle a c_1 A_1 c_2 A_2 c_3 \bar{B}_0 \bar{b} \rangle), L_{\bar{b}} (= \langle \bar{a} \bar{A}_3 \bar{c}_3 B_1 \bar{c}_2 B_2 c_1 B_3 b \rangle)\}$.

图 4.5 $\langle T_b, S_a \rangle = A_1 c_2 A_2$ 图 4.6 $\langle T_b, S_a \rangle = A_1 c_2 A_2 c_3$

引理 9 当圈叠有三条公共边时, 如果没有二路剖分, 就有一个二路附圈剖分.

证明 当 $1 \leq \langle T_b, S_b \rangle \leq 4$ 时, 由图 4.1—图 4.6 可以看出, 这个引理的结论成立. 当 $\langle T_b, S_b \rangle = 5$ 时, 由引理 3 导出. $\square$

§25.5 交错链与交错圈

- 特定迂. 在圈叠黑-白框上的一个交错迴 $C_0 = L_{a,\bar{b}} + L_{\bar{a},b}$, 或 $L_{a,b} + L_{\bar{a},\bar{b}}$. 其中, 灰边 a 和 b 被视为特定黑边.

引理 10 $\{L_{a,\bar{b}}, L_{\bar{a},b}, C_i, i = 1, 2, \dots, k\}$ 是圈叠上的一个二路附圈剖分当, 且仅当, $\{C_0, C_i, i = 1, 2, \dots, k\}$ 是黑-白框上的一个带特定迂的交错圈剖分, 其中 $c_0 = L_{a,\bar{b}} + L_{\bar{a},b}$ 为特定迂.

证明 根据引理 6, 圈叠上二路附圈剖分的元素都是交错的, 而且其中的两条路, 并成一个交错迴(那条灰边也被视为黑边!), 即得必要性. 反之, 只要将特定迂破为两条灰端交错路, 即可将带特定迂的交错圈剖分, 转换到圈叠上的二路附圈剖分. $\square$

这个引理, 允许我们只讨论黑-白框的圈剖分, 以致导出圈叠上的二路附圈剖分.

注意 1 在黑-白框上, 黑边同样被视为两条边, 即二重边.

注意 2 在黑-白框上, 虽然特定迂是交错的, 若将它剖分为圈, 这些圈未必是交错的.

引理 11 如果在黑-白框中, 除特定迂外, 没有交错圈, 则它所相应的圈叠, 只有二路剖分.

证明 在黑-白框 H 中, 除 a 和 b 的端都是 2 次节点外, 其它节点的次, 都为 4, 而且两边进入和两边发出. 令 C 是一个交错圈, 则由 H 的 2-连通性, $H' = H - C$ 也是 2-连通的. 如果 H' 中不再有交错圈, 则 H' 本身就是一个迴, 从而有两条以 a 和 b 为端, 无共边的路. 这就意味, 若 H 无交错圈, 就有一个二路剖分. $\square$

这个引理, 允许我们只考虑, 黑-白框有交错圈的圈叠, 就够了.

引理 12 一个黑-白框 H , 如果二灰端交错路 L_1 和 L_2 不是剖分, 则删去此路上所有边后, 未必有交错圈剖分.

证明 例如, 在图 4.5(b) 中, H 有两条灰端交错路 $L_{ab} = \langle aA_0c_1B_3b \rangle$ 和 $L_{\bar{a}\bar{b}} = \langle \bar{a}\bar{A}_3\bar{c}_3\bar{B}_0\bar{b} \rangle$. 但 $H' = H - \{L_{ab}, L_{\bar{a}\bar{b}}\}$ 只有一个交错迂 $(c_1A_1c_2A_2c_3B_1\bar{c}_2B_2)$, 不能剖分为交错圈. $\square$

从这个引理的证明中, 启示我们考察黑-白框 H 有交错迂 C (包括圈!), 使得删去这个迂后, $H'' = H - C$ 以 $\{a, b\}$ 为边割集.

令 H 为圈叠 $C_a \hat{+} C_b$ 的黑-白框. 其中, $C_a = (aA_0c_1A_1c_2A_2 \cdots c_nA_na)$ 和 $C_b = (bB_0c_{\tau_1}^{\alpha_1}B_1c_{\tau_2}^{\alpha_2}B_2 \cdots c_{\tau_n}^{\alpha_n}B_nb)$, 以及 $\tau: \{1, 2, \cdots, n\} \rightarrow \{1, 2, \cdots, n\}$ 和 $\alpha: \{1, 2, \cdots, n\} \rightarrow \{1, -1\}^n$ 使得对于 $1 \leq i \leq n$,

$$c_{\tau_i}^{\alpha_i} = \begin{cases} c_{\tau_i}, & \text{当 } \alpha_i = 1; \\ \bar{c}_{\tau_i}, & \text{当 } \alpha_i = -1. \end{cases} \quad (3)$$

可见, S_a, T_a 分别在 A_0 与 c_1, c_n 与 A_n 之间和 S_b, T_b 分别在 B_0 与 $c_{\tau_1}^{\alpha_1}, c_{\tau_n}^{\alpha_n}$ 与 B_n 之间. 而且在 C_a 上, $S_a \preceq T_b \prec S_b \preceq T_a$.

引理 13 一个黑-白框 H , 如果有一个交错圈 C , 使得删去这个圈后, $\{a, b\}$ 是 $H' = H - C$ 的一个割集, 则 H 有无共边的两条灰端交错路 $\{L_{ab}$ 和 $L_{\bar{a}\bar{b}}\}$.

证明 为叙述方便, 设 c 和 d 为 C 的两条边, 使得 $\{a, b, c, d\}$ 是 H 的一个割集. 因为黑边中两边不可能同在 C 中, c 和 d 都只能是白边. 而且, 一个是 A 型和另一个, B 型.

先证: 在 $H - C$ 中, S_b 和 T_b 不连通. 假若在 $H - C$ 中有一条连 S_b 与 T_b 的路, 则从 B_0 和 B_n 可知, b 的两端在 $H - C$ 中, 也有一条路. 与 $\{a, b\}$ 为 $H - C$ 的一个割集矛盾.

再证: 在 $H - C$ 的每一个连通片, 都有一条连 a 和 b 的路. 由除 a 和 b 的端点外, 所有节点不是 2 次就是 4 次, 考虑到每一个连通片都各有 a 和 b 的一端和引理 4, 即知连这两端的路都是交错的.

根据圈叠中四个端口所规定的次序, 这两条路为 L_{ab} 和 $L_{\bar{a}\bar{b}}$. □

§25.6 黑-白框的结构

• 有继 在黑-白框中, 存在两条黑边, 在 a 圈上相继, 在 b 圈上也相继. 否则, 无继.

令 c_i 和 c_{i+1} 为 a 圈 C_a 上的两条相继黑边, 即 $A_{i-1}c_iA_i c_{i+1}A_{i+1} \subset C_a$, 如果在 b 圈 C_b 上, 有 $B_{j-1}\bar{c}_{i+1}B_j\bar{c}_iB_{j+1} \subset C_b$, 则称这一结构为串行, 用 K_1^1 表示.

在 K_1^1 中, 将 $c_iA_i c_{i+1}$ 用 $c_{i,j}$ 代替, 同时将 $\bar{c}_{i+1}B_j\bar{c}_i$ 用 $\bar{c}_{i,j}$ 代替, 得 $\lambda_1(K_1^1)$, 称变换 λ_1 为串行运算, 如图 6.1(a) 所示.

引理 14 在黑-白框 H 上, 通过一次串行运算, 所得到的 $H' = \lambda_1(K_1^1)$, 仍是一个黑-白框. 不过, 后者比前者少了一条黑边.

证明 因为 H 是圈叠 $C_a \hat{+} C_b$ 的黑-白框, 令 $C_a = (aA_0 \cdots A_{i-1}c_iA_i c_{i+1}A_{i+1} \cdots A_na)$, 则 $C_b = (bB_0 \cdots B_{j-1}\bar{c}_{i+1}B_j\bar{c}_iB_{j+1} \cdots B_nb)$. 因为 $H' = \lambda_1(H)$, 根据串行运算的原理, 可知 H' 为圈叠 $C'_a \cup C'_b$ 的黑-白框, 其中 $C'_a = (aA_0 \cdots A_{i-1}c_{i,j}A_{i+1} \cdots A_na)$ 和 $C'_b = (bB_0 \cdots B_{j-1}\bar{c}_{i,j}B_j\bar{c}_{i,j}B_{j+1} \cdots B_nb)$. 因为串行运算, 将 H 中的两个黑边转变为 H' 中的一个黑边, 得 H' 比 H 少了一条黑边. □