WEIJIFEN

微积分（第二版）

下 册

主　编　林举翰　杨荣领

副主编　詹涌强　陈妙玲　杨春侠
黄业文　黄　婷　李　菁
冯　兰　吴丽镐　卢　珍

华南理工大学出版社
SOUTH CHINA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

微 积 分

（下册　第二版）

主　编　林举翰　杨荣领

副主编　詹涌强　陈妙玲　杨春侠

黄业文　黄　婷　李　菁

冯　兰　吴丽镐　卢　珍

华南理工大学出版社

SOUTH CHINA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

·广州·

图书在版编目(CIP)数据

微积分.下册/林举翰,杨荣领主编.—2版.—广州:华南理工大学出版社,2017.1

ISBN 978-7-5623-5166-5

Ⅰ.①微… Ⅱ.①林… ②杨… Ⅲ.①微积分-高等学校-教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第009485号

微积分(下册 第二版)

林举翰 杨荣领 主编

出 版 人:卢家明

出版发行:华南理工大学出版社

(广州五山华南理工大学17号楼,邮编510640)

http://www.scutpress.com.cn E-mail:scutc13@scut.edu.cn

营销部电话:020-87113487 87111048(传真)

策划编辑:欧建岸 乔 丽

责任编辑:欧建岸

印 刷 者:广州市怡升印刷有限公司

开 本:787mm×960mm 1/16 印张:12.75 字数:227千

版 次:2017年1月第2版 2017年1月第2次印刷

印 数:5001~8000册

定 价:27.50元

前　言

本《微积分》（下册）教材内容包括定积分及其应用、微分方程、多元函数微积分、无穷级数等．本教材适用于独立学院经济类与管理类专业本科学生，为学生学习各类专业后续课程或今后工作中更新数学知识、学习现代数学方法奠定良好的基础．

本教材参照教育部数学与统计学教学指导委员会重新修订的全国“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，根据经管类培养应用型、创新型人才的需要，结合我们最近十多年的教学实践经验和教训，在对教案进行研讨、整理完善的基础上编写而成．其特点是：

1. 本教材在讨论微积分的研究对象——函数的过程中，概括给出学习微积分常用的初等数学知识，以加强中学数学与大学数学的衔接，增强入学新生学习微积分的热情和信心．

2. 本教材以微积分从诞生到严密化的发展进程为主线，系统介绍了微积分的基本概念、基本理论和基本运算方法及微积分在经管类专业的应用．一般来说，研究型人才应具有较扎实的数学理论基础，而应用型人才应掌握必学内容的数学思想和数学方法．本教材尽可能从实践经验与直观背景出发，提出数学问题，以便于学生了解数学知识的来由和发展，使学生通过多思考、多讨论、多练习和多总结获得提高应用数学思想方法分析和解决实际问题的能力．与此同时，本教材通过精选实例，使学生逐步学会逻辑推理方法，学习严格、严密和精确的数学科学特有的精神．例如，通过学习极限的思想、定积分的元素法、无穷级数敛散概念等，经过逻辑推理让学生知道，它们是互相联系的，且这种联系是必然的．

3. 本教材每节配有习题，每章配有复习题，并配有期中测验和期末测验．习题中不仅有常规的用来检查“学”“思”“练”是否到位的习题，也包括一些要求有某种程度独立见解、有能动性和创造性的习题．

全书分为上、下两册，共8章．课时拟定为96学时，课内与课外及作业时数比为1∶2左右．

全书由林举翰、杨荣领主编，负责全书统稿、定稿．参加编写的人员有：第一、五章，杨荣领、冯兰；第二、六章，黄婷、李菁、卢珍；第三、八章，詹涌强、黄业文；第四、七章，杨春侠、陈妙玲、吴丽镐．

华南理工大学广州学院领导非常关心和支持学校教材建设，多次派出数学教师参加本省的数学教学经验交流会和全国的大学数学课程报告论坛学习．在本书编写过程中，数学/信息与计算机科学教研室的领导提出了许多宝贵意见，华南理工大学出版社为本书的出版付出了辛勤的劳动．在此，我们表示诚挚的谢意．

由于编者水平有限，书中难免存在不妥之处，恳请读者批评指正．

编　者

2016年10月

目　录

第五章　定积分及其应用 …… 1

第一节　定积分的概念与性质 …… 1

一、引例 …… 1

二、定积分的定义 …… 4

三、定积分的几何意义 …… 6

四、定积分的性质 …… 7

习题 5 - 1 …… 10

第二节　微积分基本定理 …… 11

一、变速直线运动的路程函数与速度函数的联系 …… 12

二、变上限的积分及其导数 …… 12

三、牛顿 - 莱布尼茨公式 …… 14

习题 5 - 2 …… 17

第三节　定积分的换元法与分部积分法 …… 18

一、定积分的换元法 …… 18

二、定积分的分部积分法 …… 23

习题 5 - 3 …… 25

第四节　定积分的应用 …… 26

一、定积分的元素法 …… 26

二、定积分在几何中的应用举例 …… 28

三、经济应用问题举例 …… 35

习题 5 - 4 …… 38

第五节　广义积分 …… 39

一、无穷区间的广义积分 …… 39

二、无界函数的广义积分 …… 42

习题 5 - 5 …… 45

第五章复习题 …… 45

第六章　微分方程 …… 48
第一节　微分方程的基本概念 …… 48
一、引例 …… 48
二、微分方程的基本概念 …… 50
习题6-1 …… 52
第二节　一阶微分方程 …… 53
一、可分离变量的微分方程 …… 53
二、齐次方程 …… 56
三、一阶线性微分方程 …… 59
习题6-2 …… 63
第三节　可降阶的高阶微分方程 …… 64
一、$y''=f(x)$ 型微分方程 …… 64
二、$y''=f(x, y')$ 型微分方程 …… 65
三、$y''=f(y, y')$ 型微分方程 …… 66
习题6-3 …… 67
第六章复习题 …… 68
期中测验 …… 69

第七章　多元函数微积分 …… 71
第一节　空间解析几何基础知识 …… 71
一、空间直角坐标系 …… 71
二、空间两点间的距离公式 …… 73
三、曲面及其方程 …… 74
习题7-1 …… 80
第二节　多元函数的基本概念 …… 81
一、平面区域的概念 …… 81
二、二元函数的定义 …… 83
三、二元函数的几何意义 …… 84
四、二元函数的极限 …… 85
五、二元函数的连续性 …… 88
习题7-2 …… 89
第三节　偏导数与全微分 …… 90

一、偏导数的概念及其计算 …… 90
二、高阶偏导数 …… 95
三、全微分的概念及其计算 …… 96
习题 7－3 …… 102
第四节　多元复合函数的求导法则与隐函数求导 …… 103
一、多元复合函数的求导法则 …… 103
二、隐函数的求导公式 …… 106
习题 7－4 …… 109
第五节　偏导数的应用 …… 109
一、多元函数的极值 …… 110
二、多元函数的最大值和最小值 …… 112
三、条件极值　拉格朗日乘数法 …… 114
习题 7－5 …… 116
第六节　二重积分 …… 117
一、二重积分的概念 …… 117
二、二重积分的性质 …… 121
三、二重积分的计算 …… 122
习题 7－6 …… 136
第七章复习题 …… 137

第八章　无穷级数 …… 139
第一节　常数项级数的概念与性质 …… 139
一、常数项级数的概念 …… 139
二、收敛级数的基本性质 …… 143
习题 8－1 …… 147
第二节　常数项级数的审敛法 …… 148
一、正项级数及其审敛法 …… 148
二、交错级数及其审敛法 …… 154
三、绝对收敛与条件收敛 …… 157
习题 8－2 …… 158
第三节　幂级数 …… 159
一、函数项级数的一般概念 …… 159
二、幂级数及其敛散性 …… 160
三、幂级数的运算性质 …… 165

四、幂级数的分析运算性质 …… 165
习题 8 - 3 …… 167
第四节　函数展开成幂级数 …… 168
一、泰勒中值定理 …… 168
二、泰勒级数 …… 169
三、函数展开成幂级数 …… 171
四、幂级数在近似计算中的应用 …… 175
习题 8 - 4 …… 177
第八章复习题 …… 178
期末测验 A …… 180
期末测验 B …… 182

参考答案 …… 184

第五章　定积分及其应用

积分学包括不定积分和定积分及其应用．上册第四章介绍了不定积分．不定积分是求导数(或微分)运算的逆运算．这里介绍定积分，它是一种特殊的和式极限．

本章先从实际问题入手建立定积分的概念，再揭示定积分与不定积分的联系，最后讨论定积分的计算与其应用问题．

第一节　定积分的概念与性质

一、引例

1．求曲边梯形的面积

先看一个特例：

例 1　求曲线 $y=x^2$、直线 $x=1$ 和 x 轴所围成的曲边三角形 OAB 的面积 A，如图 5－1 所示．

我们知道，对于某些规则的平面图形，如矩形、梯形等，求其面积有公式可用．但对于一些曲边或不规则的平面图形，要求其面积时，在初等数学中没有理想的面积公式可用，于是只好将曲边或不规则的平面图形分割成规则的图形，实际上是把整体分成了许多局部．就整体来说，其周边是曲的或不规则的，但就其局部来说，小段曲线或不规则的部分可以近似地“以直代曲”，再把这些局部图形加起来就近似地得到整体．分割得越细，所得的近似值就越精确．

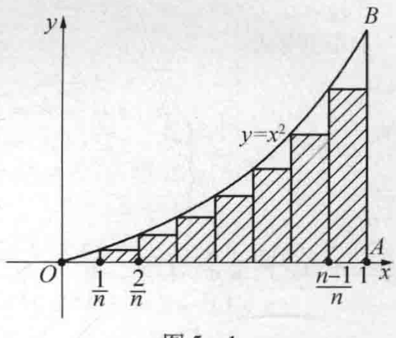

图 5－1

现在按上述思路用

$$矩形面积=高\times底$$

的公式来解决求曲边三角形的面积问题. 如图 5-1 所示，先把曲边三角形 OAB 分成 n 个窄曲边梯形，而每一个窄曲边梯形的面积可以用一个窄矩形的面积来近似代替. 注意到每个窄矩形与窄曲边梯形有相同的底，但每个窄矩形的高是不同的，这时可以取每个窄曲边梯形底边的左端点处的高作为窄矩形的高，整个曲边三角形的面积就可以用窄矩形面积之和，即阶梯形的面积来近似代替.

具体地说，就是将区间[0, 1]分为 n 个相等的小段，其横坐标分别为

$$0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n},1$$

每一小段的长为$\frac{1}{n}$，而高分别为

$$0,\left(\frac{1}{n}\right)^2,\left(\frac{2}{n}\right)^2,\cdots,\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

得到 n 个窄矩形，其面积的总和(图 5-1 的阴影部分) A_n 为

$$\begin{aligned}A_n &= 0\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}\\&=\frac{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3}\\&=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \quad ①\\&=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\end{aligned}$$

①注：
利用恒等式

$$(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$$

得

$$\begin{cases}(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1\\ n^3-(n-1)^3=3(n-1)^2+3(n-1)+1\\ \qquad\vdots\\ 3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1\\ 2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1\end{cases}$$

把这 n 个等式两端分别相加，得

$$(n+1)^3-1=3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3(1+2+\cdots+n)+n$$

由于 $1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$，代入上式得

$$n^3+3n^2+3n=3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+\frac{3}{2}n(n+1)+n$$

整理后得

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

A_n 是曲边三角形 OAB 面积的近似值．当 n 越大，相应地近似值越接近精确值．若要求出精确值，应让 $n\to\infty$ 取极限，得所求面积 A 为

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty} A_n \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)=\frac{1}{3} \end{aligned}$$

例2　求由连续曲线 $y=f(x)$，$f(x)\geqslant 0$，x 轴及直线 $x=a$，$x=b$ 所围成的曲边梯形的面积 A.

按例 1 的思路，把解决这个问题用数学语言表述为以下四个步骤：

①分割．将区间 $[a,\ b]$ 任意分成 n 个小区间，设分点为

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

每个小区间的长度为

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

它们不一定相等．过每个分点作平行于 y 轴的直线把原来的曲边梯形分成 n 个窄曲边梯形(图 5－2)，它们的面积分别记为 $\Delta A_1,\Delta A_2,\cdots,\Delta A_n$.

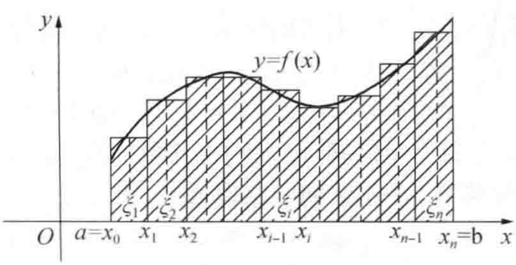

图 5－2

②近似代替．在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 $\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$，用矩形面积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 近似代替第 i 个窄曲边梯形面积 ΔA_i，即

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

③求和．将 n 个窄矩形的面积加起来，得到该曲边梯形面积 A 的一个近似值

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

④取极限．显然，上面的和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 与区间 $[a,\ b]$ 的分割方法及 ξ_i 的取法有关，但是只要分得越细，所得的近似值就越接近于精确的面积 A. 如果用 λ 表示分割的小区间中长度最大者，即 $\lambda=\max\{\Delta x_1,$

Δx_2，$\cdots$，$\Delta x_n\}$，则当 $\lambda\to0$ 时(这时分段数 n 无限增多，即 $n\to\infty$)，近似值就转化为精确值 A，即

$$A=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

2. 求变速直线运动的路程

例 3 设某物体做变速直线运动，已知速度 $v(t)$ 是时间 t 的连续函数，且 $v(t)\geqslant0$，求它在时间间隔 $[T_0, T_1]$ 上所经过的路程 s.

如果物体做匀速直线运动，有公式

$$路程 = 速度 \times 时间$$

现在速度是变量，不能直接套用公式．但因速度 $v(t)$ 是连续变化的，在一段很短的时间内，可以近似地看作不变．因此，如果把时间间隔分成很小的时段，在每个小时段内速度以“不变代变”，求得物体运动路程的近似值．最后，通过对时间间隔无限细分的极限过程求得变速直线运动的路程的精确值．具体步骤如下：

①分割．将区间 $[T_0, T_1]$ 任意分成 n 个小区间，设分点为

$$T_0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=T_1$$

$$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

②近似代替．在每个小区间 $[t_{i-1},t_i]$ 上任取一点 $\tau_i(i=1,2,\cdots,n)$，用乘积 $v(\tau_i)\Delta t_i$ 近似代替第 i 个小区间的路程 Δs_i，即

$$\Delta s_i\approx v(\tau_i)\Delta t_i$$

③求和．所有小区间上的近似路程之和近似等于路程 s，即

$$s\approx\sum_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i$$

④取极限．将 $[T_0, T_1]$ 无限细分，即令 $\lambda=\max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n\}$，$\lambda\to0$，则得路程的精确值

$$s=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i$$

二、定积分的定义

上面引例，前两个是几何问题，最后一个是物理问题，实际背景完全不同，但它们都取决于一个函数及其自变量的变化区间，即曲边梯形的高 $y=f(x)$ 及其底边上的点的变化区间 $[a, b]$，如直线运动的速度 $v=v(t)$ 及时间 t 的变化区间 $[T_0, T_1]$，并且解决问题的方法都是按照“分割、近似代

替、求和、取极限”的步骤求一个特殊的和式极限.

在自然科学和工程技术中，许多实际问题都可归结为这种极限. 抛开这些问题的具体意义，抓住它们在数量关系上的共同本质与特性加以概括，可以抽象出定积分的定义：

定义 1　设函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上有界，用分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

将区间$[a, b]$任意分成 n 个小区间$[x_{i-1}, x_i]$$(i=1, 2, \cdots, n)$，每个小区间的长度为

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上任取一点$\xi_i(x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i)$，作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{1-1}$$

记$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$，如果当$\lambda\to 0$时和式(1-1)的极限存在，且此极限值不依赖于对$[a, b]$的分法和点$\xi_i$的取法，则称函数$f(x)$在$[a, b]$上可积，并称此极限值为$f(x)$在$[a, b]$上的定积分，记作

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{1-2}$$

其中$f(x)$称为被积函数，$f(x)\,\mathrm{d}x$称为被积表达式，x称为积分变量，$[a, b]$称为积分区间，a称为积分下限，b称为积分上限.

根据定积分的定义，前面引例中，曲边梯形的面积A就是曲边函数$y=f(x)$ $(f(x)\geqslant 0)$在区间$[a, b]$上的定积分，即

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

变速直线运动的路程s就是速度函数$v(t)$ $(v(t)\geqslant 0)$在时间间隔$[T_0, T_1]$上的定积分

$$s = \int_{T_0}^{T_1} v(t)\,\mathrm{d}t$$

定积分定义的几点说明：

(1)定积分$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$表示一个数值，这个数值完全由被积函数$f(x)$和积分区间$[a, b]$确定，它与积分变量用什么字母表示无关，即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$

(2)在定积分的定义中，我们假设 $a<b$. 下面对于 $a>b$ 与 $a=b$ 的情形作如下规定：

当 $a>b$ 时，

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

当 $a=b$ 时，

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

这样规定以后，不论 $a<b$，$a>b$ 或 $a=b$，定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 都有定义.

(3)关于函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上满足什么条件才可积，这里不作深入讨论，只给出以下两个充分条件：

①设 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上可积.

②设 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上有界，且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上可积.

三、定积分的几何意义

(1)当 $f(x)\geqslant 0$ 且 $a<b$ 时，定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 在几何上表示由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积.

(2)当 $f(x)<0$ 时，曲边梯形位于 x 轴的下方. 由于 $\Delta x_i>0$，$f(\xi_i)<0$，和式中每项 $f(\xi_i)\Delta x_i<0$ ($i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$)，该定积分的值就是负的，且等于 $-A$，即 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-A$. 这里 A 仍表示曲边梯形的面积(图5－3)，或者说，定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 等于曲边梯形面积的负值(注：我们通常认为面积是正数).

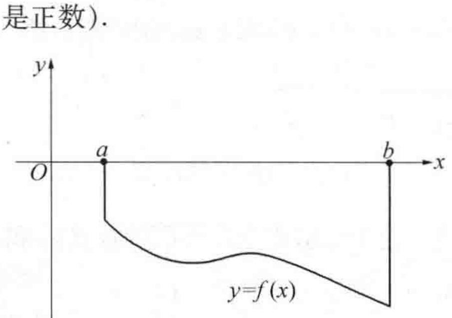

图 5－3

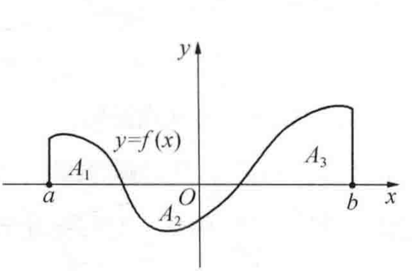

图 5－4

(3)当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有正有负时，那么定积分所表示的应该是由曲线 $y=f(x)$ 及直线 $x=a$，$x=b$，与 x 轴所围成的各个部分的面积的代数和（图 5－4），即

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3$$

其中 A_1，A_2，A_3 表示各部分的面积．

例 4　利用定积分的几何意义求下列定积分的值：

(1) $\int_{-1}^{2} x\,dx$；　　　　(2) $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

解　(1)在区间 $[-1, 2]$ 上作函数 $y=x$ 的图形，它与直线 $x=-1$，$x=2$ 及 x 轴围成两个三角形 A_1 与 A_2（图 5－5），其面积分别为 $A_1=\frac{1}{2}$，$A_2=2$. 由定积分的几何意义知

$$\int_{-1}^{2} x\,dx = -A_1 + A_2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

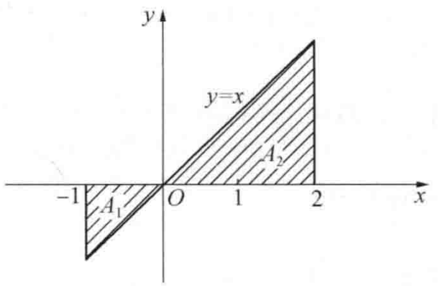

图 5－5

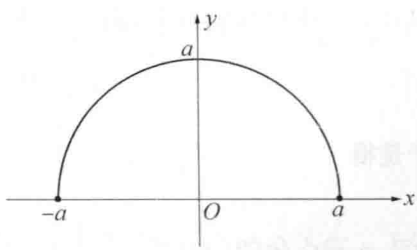

图 5－6

(2)由定积分的几何意义知定积分 $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ 表示由上半圆周 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 与直线 $x=-a$，$x=a$ 及 x 轴所围成的图形的面积，如图 5－6 所示．故有

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi a^2$$

四、定积分的性质

由定积分的定义

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

以及极限的运算法则与性质，可以得到定积分的几个基本性质．在下面的讨论中，我们假设函数在相关的区间上都是可积的．

性质1 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

证
$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i \\ &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i \\ &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

性质1对任意有限个函数都是成立的．类似地，可以证明：

性质2 $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$（$k$是常数）.

性质3 设 $a<c<b$. 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

按定积分定义的补充规定，对于 a、b、c 三点的任何位置，性质3仍然成立．例如当 $a<b<c$ 时，由于

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

于是得
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

性质3表明，定积分对于积分区间具有可加性．

性质4 如果在区间$[a, b]$上 $f(x)\equiv 1$，则

$$\int_a^b 1\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b-a$$

性质5 如果在$[a, b]$上 $f(x)\leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

证 因为 $f(\xi_i)\leqslant g(\xi_i)$ 及 $\Delta x_i \geqslant 0$（$i=1, 2, \cdots, n$），得

$$f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant g(\xi_i)\Delta x_i$$

相加得

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

令 $\lambda\to 0$，上式两边取极限即得到要证的不等式．