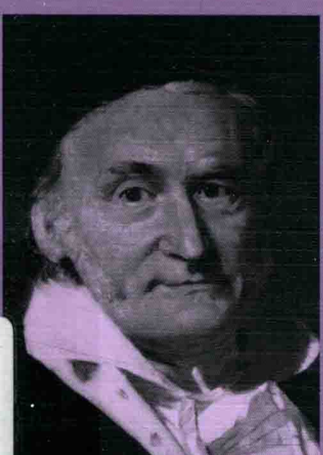
献给热爱研读数学的朋友们

Johann Carl Friedrich Gauss

从代数基本定理到超越数

一段经典数学的奇幻之旅

冯承天◎著



代数基本定理、超越数的存在，以及“π和e都是超越数”，这些曾是数学上的重要课题.高斯等对代数基本定理的证明，康托尔、刘维尔对超越数存在的证明，以及埃尔米特和林德曼如何分别证明了“π和e是超越数”，这些都应该系统、简洁且完美地介绍给广大数学爱好者.

只要勤于思考，你一定能掌握上述各定理的证明；只要乐于思考，你一定能掌握多项式理论、域论、尺规作图理论，以及用分析法和反证法去解决数学问题的一些方法.

上海市著名商标
华东师范大学出版社
全国百佳图书出版单位

Johann Carl Friedrich Gauss

从代数基本定理到超越数

一段经典数学的奇幻之旅

冯承天◎著

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

从代数基本定理到超越数：一段经典数学的奇幻之旅/冯承天著.
—上海：华东师范大学出版社，2016
ISBN 978-7-5675-5858-8

Ⅰ.①从… Ⅱ.①冯… Ⅲ.①数学—普及读物
Ⅳ.①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 273566 号

从代数基本定理到超越数

——一段经典数学的奇幻之旅

著　　者　冯承天
策划组稿　王　焰
项目编辑　王国红
特约审读　陈　跃
封面设计　卢晓红

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　常熟高专印刷有限公司
开　　本　787×1092　16 开
印　　张　10.25
字　　数　152 千字
版　　次　2017 年 4 月第 1 版
印　　次　2017 年 4 月第 1 次
书　　号　ISBN 978-7-5675-5858-8/O·272
定　　价　35.00 元

出 版 人　王　焰

献给热爱研读数学的朋友们

内 容 简 介

本书共分六个部分，十四个章节，是论述代数基本定理以及证明“π 与 e 是超越数”的一本入门读物，也是一次经典数学的奇幻之旅.

在第一部分中，我们从多项式方程的解和数系的扩张讲起，详述了有理数与循环小数，讨论了在黄金分割与黄金三角形，以及斐波那契数列中出现的无理数，由二元数的观点引入复数，最后阐明了代数基本定理的内容. 在第二部分中，我们用三种不同的方法说明或证明了代数基本定理，这就表明了复数域是代数闭域. 在第三部分中，我们从定义圆周率 π 以及自然对数的底 e 开始，最后严格地证明了它们是无理数. 在第四部分中，我们阐明了关于多项式的一些概念和理论，其中有贝祖等式、高斯引理、艾森斯坦不可约判据，以及对称多项式基本定理等，也详述了有关扩域的一些理论，包括代数元、代数元域，以及单代数扩域等. 在第五部分中，我们主要研究了代数扩域与有限扩域，并应用这些理论讨论了三大古典几何作图问题. 在第六部分中，我们讲解了康托尔的对角线法，并依此证明了超越数的存在，简洁地证明了刘维尔定理以及刘维尔数是超越数，进而严格地证明了 e 是超越数的埃尔米特定理，以及 π 是超越数的林德曼定理.

本书还有两个附录，其中附录 1 导出了斐波那契数列的通项公式——比奈公式，而附录 2 则对正文中要用到的线性方程组的求解作了简要的说明.

本书起点较低，叙述详尽，论证严格，举例丰富，前后呼应，数学内容自成体系，是一本深入浅出，既可供数学爱好者系统地学习和掌握新知识和方法，扩展视野，又能使他们欣赏到数学之美的可读性较强的读物.

前　言

学非探其花，要自拨其根.

——〔唐〕杜牧《留诲曹师等诗》

简略地说，本书讨论了“代数基本定理”、“圆周率 π 既是无理数又是超越数”，以及“自然对数的底 e 既是无理数又是超越数”这三大数学课题. 为此我们讨论了数系的扩张、复数的应用、解析函数的积分、多项式理论、扩域理论、代数数论，以及康托尔的对角线方法等. 当然，随之就有不少的“副产品”，如：对称多项式基本定理、代数元域、尺规作图，以及三大古典几何难题等.

代数基本定理——$n(>0)$次复系数多项式方程有 n 个复数根，是 1799 年高斯在他的博士论文中首次较严格地证明的. 高斯以后的数学家们用了一百多种不同的方法证明了该定理，这足以说明该定理在代数学上的重要性. 在本书中，我们用三种不同的方法或阐明或证明了这一定理.

关于圆周率 π，我们应用了我国魏晋时数学家刘徽的光辉的割圆术思想证明了它是一个与圆半径无关的常数，然后先证明它是一个无理数，并最终证明了埃尔米特定理：π 是一个超越数.

对于自然对数的底 e，我们先从它的极限定义出发得出了有关它的一些重要公式及应用，接着再证明它是一个无理数，并最终证明了林德曼定理：e 是一个超越数.

为了能与广大数学爱好者一起学习这些重大定理，以及为了证明它们所必须研读的经典数学中的一些精彩内容，并与大家一起分享其中的数学之美，笔者撰写的这本书起点较低，从数系的扩张和运算讲起；把有关的多项式理论与域的理论尽量讲得详尽且深入浅出；书中包括许多实例和应用，可供

读者消化、推敲和练习，而且尽力做到前呼后应. 为了克服论述这些专题的各种文献中的种种晦涩难懂、叙述过简与不清，我们用一种“详述”的方式，同时也尽量使本书在数学内容上自成体系.

不过，笔者还是在书后的参考文献中列出了笔者在研读这些专题和撰写本书时读过的部分好书与文献，希望对那些想继续深入研究的读者有所帮助.

一系列的数学实践使笔者深信，一位有高中数学基础且掌握微积分初步概念的读者，只要勤于思考，一定能理解书中的这些在其他数学分支中也极有用的基础数学知识和定理，从而提高自己的数学修养；只要乐于思考，也就一定能掌握本书中所使用的数学方法，同时给自己带来数学之美的享受.

最后，感谢首都师范大学栾德怀教授的长期关心、教导和鞭策. 感谢上海师范大学数学系陈跃副教授，他推荐了许多参考资料，仔细审读了手稿，并提出了许多宝贵的意见和建议. 感谢华东师范大学出版社的王焰社长及各位编辑，他们为本书的出版给予极大的支持与帮助.

希望本书能成为广大数学爱好者学习和掌握上述课题的可读性较强的读物，也极希望得到大家的批评与指正.

2016 年 8 月于上海师范大学

目　录

第一部分　从求解多项式方程到代数基本定理

第二部分　代数基本定理的证明

第五部分 代数扩域、有限扩域以及尺规作图

第六部分 π以及e是超越数

第一部分
从求解多项式方程到代数基本定理

在这一部分中，我们从自然数系与一元一次方程的求解讲起，讨论了数系的扩张：从自然数、整数、有理数、实数，一直到复数，而且讲述了代数基本定理，即复数系是代数封闭的.

对于有理数，我们详细地讨论了有理数与循环小数的关系，以及它与可公度线段概念的联系. 从黄金分割、黄金三角形、黄金矩形，以及斐波那契数列等方面，阐明了引进无理数的必要性. 我们从二元数的概念引入复数，这样就能使原来在实数系中无解的多项式方程有解了.

最后，我们在复数系的基础上引入了近代数学中有重要意义的域的概念.

第一章

从自然数系到有理数系

§1.1　自然数系与一元一次方程的求解

人类从计数物件之需得出了正整数系 $\mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, \cdots\}$. 数字 0 由玛雅人在公元一世纪首先引入，而在 500 年以后古印度人使用了零. 这样，人们就有了自然数系 $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$. 在 $\mathbf{N}$ 中我们有加法(+) 运算，这指的是任意两个自然数的和，仍然是一个自然数，即对任意 $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$，有 $n_1 + n_2 \in \mathbf{N}$. 我们把这一事实简称为 $\mathbf{N}$ 对加法运算是封闭的. 同样，在 $\mathbf{N}$ 中我们还有乘法(×)运算. $\mathbf{N}$ 对乘法运算也是封闭的. 不过 $\mathbf{N}$ 对四则运算(+, −, ×, ÷) 中的减法(−) 运算和除法(÷) 运算而言，它就不再封闭了. 例如对 $3, 5 \in \mathbf{N}$，就有 $3-5 \notin \mathbf{N}$, $3 \div 5 \notin \mathbf{N}$. 所以为了使减法运算和除法运算也能封闭地进行，我们就必须扩充 $\mathbf{N}$，即把新的数添加到 $\mathbf{N}$ 中去，以形成更大的数系.

从解方程的角度来看，对于 $\mathbf{N}^*$ 上的一元一次方程

$$x + n = 0,\ n \in \mathbf{N}^* \tag{1.1}$$

而言，它的解$(-n)$就是一个负数. 所以为了使(1.1)的解仍封闭在所讨论的数系之中，我们就有必要把自然数系 $\mathbf{N}$ 扩张到整数系 $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$.

接下来要考虑的是 $\mathbf{Z}$ 上的一元一次方程

$$px + q = 0,\ p, q \in \mathbf{Z},\ p \neq 0 \tag{1.2}$$

对于 $\mathbf{Z}$ 中的元 p, q，会产生下列两种情况：(i) p 能整除 q，记作 $p \mid q$，此时 $q/p \in \mathbf{Z}$; (ii) p 不能整除 q，记作 $p \nmid q$，此时 $q/p \notin \mathbf{Z}$. 因此(1.2)的解 $x = -q/p$ 就不一定是 $\mathbf{Z}$ 中的元了. 所以，为了使 $-q/p\,(q, p \in \mathbf{Z}, p \neq 0)$ 也在所考虑的数系之中，我们就得进一步把整数系 $\mathbf{Z}$ 扩张为有理数系 $\mathbf{Q} = \left\{ \frac{q}{p} \mid q, p \in \mathbf{Z}, p \neq 0 \right\}$. 这样一来，$\mathbf{Q}$ 上的任意一元一次方程都可以解了.

§1.2 有理数与循环小数

设 $a \in \mathbf{Q}$,则 $a = \dfrac{q}{p}$, $q, p \in \mathbf{Z}$, $p \neq 0$. 考虑 $p \nmid q$ 这一情况,此时用 p 去除 q,则会产生两种情况:(i)若长除法至某一步时得出了为零的余数,则 q/p 是一个有限小数;(ii)若长除法能无限地进行下去,此时因为每次得出的余数都小于 p,而 p 是一个有限数,因此余数必会循环地出现. 所以此时 q/p 应是一个无限循环小数.

例 1.2.1 循环小数 $0.\dot{3}\dot{7}$ 的分数形式.

设 $x = 0.\dot{3}\dot{7} = 0.373737\cdots$,则 $100x = 37.3737\cdots = 37 + x$. 于是有 $99x = 37$,即 $x = \dfrac{37}{99}$.

例 1.2.2 $6.4\dot{3}\dot{7}$ 的分数形式.

$$6.4\dot{3}\dot{7} = 6 + \frac{4}{10} + \frac{0.\dot{3}\dot{7}}{10} = 6 + \frac{4}{10} + \frac{37}{990} = 6\,\frac{433}{990}.$$

由上述两例可知,对于任意循环小数,我们都可将其表达为 q/p 的形式,其中 $q, p \in \mathbf{Z}$, $p \neq 0$. 因此,我们可以说:有理数或是整数,或是有限小数,或是无限循环小数.

例 1.2.3 $1/109$ 是一个有理数. 它有一个长达 108 个数字构成的循环节(参见[18] §1.22).

例 1.2.4 构造数 $\xi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{100} + \dfrac{1}{10^6} + \cdots$ 这是一个无限不循环小数,因此 $\xi \notin \mathbf{Q}$. ξ 称为刘维尔数,我们将证明它是一个超越数(参见 §13.10).

§1.3 可公度线段

对于古希腊人来说,他们认为几何是整个数学,而毕达哥拉斯学派的信徒们一直就认为只有整数以及它们的比值才能描述任何的几何对象. 这也就是说,他们认为的数就只是有理数,而这一点又与下面的可公度这一概念密

切相关.

定义 1.3.1 对于线段 a, b,若存在线段 d,使得 $a=qd$, $b=pd$,其中 q, $p\in\mathbf{N}^*$,则称线段 a 和 b 是可公度的. d 称为它们的一个公度.

也就是说此时存在线段 d,使得 a 是 d 的整数 q 倍,以及 b 是 d 的整数 p 倍. 于是此时线段 a 的长度与线段 b 的长度之比就是有理数 q/p.

那么有没有不可公度的线段呢? 还有,例 1.2.4 中的刘维尔数不是有理数,那它又是什么数呢?