

张宇



CLASSIC

考研数学 真题大全解

(解析分册·数学一)

主编: 张宇

副主编: 高昆轮

AUTHENTIC
EXAMINATION
PAPERS
WITH ANSWERS
□ Mr. Zhang

2017

张宇
▶

CLASSIC

考研数学 真题大全解

(解析分册·数学一)

张 宇 主编 高昆轮 副主编

编委 (按姓氏拼音排序): 高昆轮 刘宁 万金平 乌日罕 亦一 (笔名) 于吉霞
曾凡 (笔名) 张乐 张婷婷 张心琦 张宇 郑利娜 朱杰

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学真题大全解. 解析分册. 数学一 / 张宇主编. —北京: 北京理工大学出版社, 2016. 4

ISBN 978-7-5682-2167-2

I. ①张… II. ①张… III. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 076729 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(总编室)

(010)82562903(教材售后服务热线)

(010)68948351(其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 三河市天利华印刷装订有限公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 20

字 数 / 499 千字

版 次 / 2016 年 4 月第 1 版 2016 年 4 月第 1 次印刷

定 价 / 62.80 元(共 2 册)

责任编辑 / 梁铜华

文案编辑 / 多海鹏

责任校对 / 孟祥敬

责任印制 / 边心超

前言 (17版)

从1987年至2016年,整整三十个年头,三十余份真题试卷,全面反映了国家命制考研数学试题的特点、风格与水平,是考研备考学生必须认真研习的复习资料.

这一版本,相对于2016版,我们作了全面修订,主要体现在以下六个方面.

一,试卷分册依然按照考研实考顺序给出三十年的卷子,解析分册则按大纲的章节顺序进行试题解答归类,这将给考生提供两种做题方式,一是按套卷形式做,利于整体把握且便于测分,二是按章节顺序做,利于局部巩固且便于找到自己的薄弱环节,对症下药.

二,在解析分册的每一章节前增加“考点分布”一览表,清晰表明三十年来各知识点出现的年份、分值,既能把握重点,又对未来作出预测.

三,增加题前“考点点睛”,对每一知识点进行解题指导,给出关键的解题策略和重要结论、公式.大幅增加题后注解,强调考生做真题时应注意的细节,并加以延拓,有些题后注解是作者多年积累的解题经验,可立竿见影.

四,虽然数学一、二、三单独成书,但在每一本书中都增加了一些重要的交叉内容,比如数学二、三有些题虽未出现在数学一中,但未来有可能考,便补充一些这样的题放进数学一,便于考生更好地全面把握内容,同样地,数学二的书中也会出现一些数学一、三的试题,数学三的书中也会出现一些数学一、二的试题.

五,试卷分册中,在每一份试卷后增加“答案速查”,利于考生快速测分.

六,修改了上一版中的瑕疵与错误.

继续欢迎读者朋友们批评、指正.2017考研年,应是一个好机会.在国家命制考题将会“难度适中”的时候抓住这个机会,一战成功,是我们的共同目标.

张宇

2016年3月18日于
大连理工大学学术交流中心

张宇考研数学系列丛书详细说明

书名	出版日期	主要内容
张宇高等数学 18 讲	2016 年 1 月	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据,诠释考研数学中高等数学部分的全部考点,配以优秀的例题、习题和全部详细答案.原命题组组长参与.
张宇线性代数 9 讲	2016 年 1 月	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据,诠释考研数学中线性代数部分的全部考点,配以优秀的例题、习题和全部详细答案.原命题人参与.
张宇概率论与数理统计 9 讲	2016 年 1 月	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据,诠释考研数学中概率论与数理统计部分的全部考点,配以优秀的例题、习题和全部详细答案.原命题人参与.
张宇考研数学题源探析经典 1000 题	2016 年 2 月	以考研命题所使用的所有题目源头为依据,精心挑选和编制了 1000 道左右高仿真练习题,题目与考研无缝接轨,综合性强,知识相对混编,难易变化无常,利于考生复习过程中保持实战演练的状态.原命题组组长参与.
张宇考研数学真题大全解	2016 年 4 月	囊括考研数学命题以来所有考研真题,给读者提供原汁原味的实考题.原命题组组长参与.
考研数学命题人终极预测 8 套卷	2016 年 9 月	全国唯一一本考研命题人和辅导专家通力合作、全程亲自编写的冲刺模拟卷(上).实战演练,积累经验,查漏补缺,科学预测,并配有部分重点难题讲解视频.原命题组组长与命题成员参与.
张宇考研数学最后 4 套卷	2016 年 11 月	全国唯一一本考研命题人和辅导专家通力合作、全程亲自编写的冲刺模拟卷(下).实战演练,积累经验,查漏补缺,科学预测,并配有部分重点难题讲解视频.原命题组组长与命题成员参与.

注:主编张宇将在每本书正式出版时在微博发布最新封面,市面上其他任何同名图书均非张宇所写,请考生注意鉴别.

以上书籍新浪微博答疑地址:@张宇考研图书交流论坛 <http://weibo.com/yuntubook/>

张宇新浪微博:@宇哥考研 <http://weibo.com/zhangyumaths/>

前言 (16版)

先给读者讲个故事. 1637年, 法国律师费马到图书馆看书, 在书上读到一句话: “方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 有正整数解.” 现在说来, 小学生都知道: $3^2 + 4^2 = 5^2$, 上述命题显然成立. 然而, 费马没有就此罢休, 他违反图书馆规定, 在书上“乱写乱画”: “你们不要以为这个事情很简单, 方程 $x^3 + y^3 = z^3$ 一定没有正整数解, 方程 $x^4 + y^4 = z^4$ 一定没有正整数解, …, 也就是说, 对于方程 $x^n + y^n = z^n$, 只要 $n \geq 3$ 为正整数, 则这样的方程就一定没有正整数解了.” 这等于是提出了一个前所未有的定理, 是公然向数学界提出挑战. 不仅如此, 费马还在这个定理后写了更让人惊讶的一句话: “我已经给上述定理做了完整美妙的证明, 只是这个位置太小了, 所以我就不写了.”——这哪里是挑战? 简直就是挑衅!

数学界应战吗? 那是当然, 数学界绝不缺乏天才, 怎么会被一个“外行”难倒? 于是, 读者所熟悉的大数学家高斯、罗尔、莱布尼茨等等均开始研究费马的这个定理, 可是历史就是这么奇妙, 他们都没有证明出来. 一百年过去了, 两百年过去了, 三百年过去了, 直到 1993 年, 也就是在费马提出这个定理的 356 年之后, 才被美籍华裔数学家威尔斯证明出来, 单单证明就写了 1 000 多页. 威尔斯的证明举世震惊, 因此他也获得了至今唯一一个最高数学奖——菲尔兹奖(“唯一”是因为菲尔兹奖只授予 40 岁以前的数学家, 但是当时的威尔斯已经 45 岁了, 由于他的贡献太大, 所以破例授予他这个数学上的最高奖).

费马的这个定理, 被数学界称为“会下金蛋的鸡”, 因为在证明这个定理的数百年中, 产生了许多独立的数学分支, 使得数学得到了蓬勃发展, 这正是: 提出一个好的问题, 往往比解决它更有价值. 因此, 费马的这个定理被正式命名为: **费马大定理**. 你见过有几个定理叫“大定理”? 很少很少. 一个“大”字, 足以体现这个定理的分量.

故事讲完了, 这里讲了什么道理呢? 读者自己体会吧——其实, 我什么道理都没讲——我只想借用“费马大定理”的“大”字, 把我的这本书命名为: 真题“大”全解. 因为, 这本书, 我以为, 相对于其他真题书来讲, 是最有分量的.

一、真题的重要性不言而喻

从 1987 年开始, 考研数学实行了全国统一考试的形式, 考研数学的命题也由此走上了正轨——其科学性、严肃性、稳定性逐渐达到了国家标准. 直到今天, 几十年下来, 考研数学的命题可以说极其成熟了, 也逐渐出现了如下两大特点:

第一, **考研数学命题的风格稳定: 重视基础, 淡化技巧, 计算量大**. 考研数学试题是命题组集体智慧的结晶, 在确定了上述命题的风格和原则后, 考题受到命题组各位成员自身“喜好”的影响很小. 所以, 做好历年真题, 是熟悉考研数学风格的好路子.

第二, **考研数学命题的形势特殊: 命题时间短, 任务重, 参考以往考题成为必须**. 为了确保考研数学命题的安全性, 不出现泄漏考题的情况, 现在的考研命题时间很短, 已经不再像多年前那样宽松

(以前命题都是提前半年出好题,有足够的时间来校对和检验试题的正确性和科学性)——在考前集中命题,几乎没有时间去校对和检验了.所以,为了保证试题不出错且难度适中,命题人盯上了从1987年到今天积累下来的命制过的试题(这里还包括从未考过的备考卷上的试题),以此为基础,“参考”“改编”甚至“照搬”这些题.故,读者应该懂得,做好历年真题,是预测考研数学考题的好路子.

二、做好真题解析的两大原则

考研数学的历年真题解析需要贯彻两个原则.

第一, **考研数学试题收录的全面性**. 收录从全国统考以来所有的考研数学试题,而不是部分试题,给读者提供一份完整的历史资料.从而,力图给读者提供原汁原味的历年的实考题,是本书坚持的第一个原则.

第二, **考研数学试题解析的权威性**. 凡是有当年命题人自己写的答案,忠实其答案;凡是有当年考试中心组织的专家写的答案,参考其答案.总之,本书对真题的答案解析,是最权威、最深刻的,这是本书坚持的第二个原则.

这两个原则,事实上,就是本书分量最重的地方——每一道题的收录,都有根有据;每一道题的解析,都有源有头.

三、本书使用说明

本书共分两册——试卷分册和解析分册. 试卷分册中,我将1987年至2015年的真题试卷完整地展现给读者,供读者检测、演练之用;解析分册中,我们提供给读者全面、深刻、由命题人把关的试题解析.其中,为了不影响考生有针对性地备考,有些较早年份的超纲题目,我做了必要的删除.那么在试卷分册中,被删除题目的套卷中,余下试题的分值稍作调整以使其总分仍为满分.当然,考虑到读者在做题之余需查阅答案及解析,我们在解析分册中给出了权威的解答,依据考试年份与题号可作相应查找.值得注意的是,本书仅为数学一的真题大全解,需考数学一的考生若做完了这本书的题目,想再多做演练,亦可参考数学二与数学三的真题大全解.

对于真题大全解的使用,与习题集的使用有类似之处.我在《张宇考研数学题源探析经典1000题》中已经给读者提出了建议:把题目的演算过程写到草稿纸上去,把做题后看着答案详解做的标注写到笔记本上去,总之,不要在题目上做任何标记——这样做的目的很明确——如果此题你第一次做的时候不会做或者做错了,当你下次再做这个题目时,无任何提示的情况下,你能保证自己一定会做吗?“干干净净”的真题集,事实上是对读者提出了高标准、严要求,希望读者把真题全部做完一遍后,第二遍就能够查漏补缺、扫清死角.

感谢从命题组中退下来的老专家们,在数学原题的收集、确认与解析中,他们作出了重要贡献.感谢北京理工大学出版社的各位领导和编辑,感谢高等教育出版社的刘佳同志,他们给作者提供了很多便利和帮助.

张宇

2015年5月 于北京

Contents

目 录

第一部分 高等数学

1

第1章 函数、极限、连续	3
1.1 函数及其性质	4
1.2 极限的定义及性质	5
1.3 求函数极限	6
1.4 求数列的极限	13
1.5 无穷小的比阶	16
1.6 连续与间断点	20
第2章 一元函数微分学	21
2.1 导数与微分的定义及应用	22
2.2 求各类函数的导数与微分	27
2.3 导数的几何应用——曲线的切线与法线,变化率	30
2.4 函数(曲线)的性态	32
2.5 不等式的证明	38
2.6 方程的根(零点问题)	41
2.7 有关微分中值定理的证明题	44
2.8 综合问题	47
第3章 一元函数积分学	49
3.1 定积分的概念与性质	50
3.2 不定积分的计算	52
3.3 定积分的计算	54
3.4 反常积分的计算	57
3.5 反常积分的敛散	58
3.6 变限积分函数的性质及应用	59
3.7 定积分的应用	62
第4章 向量代数和空间解析几何	66
4.1 向量运算	66
4.2 平面及直线的方程	66
4.3 平面及直线的位置关系讨论、夹角问题	68

4.4	距离问题	68
4.5	投影曲线与旋转曲面	68
第5章	多元函数微分学	70
5.1	基本概念	70
5.2	求偏导与全微分	72
5.3	变量代换下方程的化简	79
5.4	求极值与最值	80
5.5	多元函数微分学的几何应用	87
第6章	多元函数积分学	92
6.1	重积分的概念与性质	93
6.2	二重积分	95
6.3	三重积分	100
6.4	曲线积分(边界方程代入被积函数化简)	102
6.5	曲面积分(边界方程代入被积函数化简)	118
6.6	散度、旋度	128
6.7	多元函数积分学的应用	129
6.8	综合题	133
第7章	无穷级数	135
7.1	常数项级数判敛	135
7.2	幂级数的收敛半径及收敛域	139
7.3	幂级数求和(常规求和、非常规求和)	141
7.4	幂级数展开	148
7.5	证明题	150
7.6	傅里叶级数	152
第8章	常微分方程	156
8.1	一阶常微分方程	156
8.2	二阶可降阶方程	159
8.3	高阶线性常系数方程	160
8.4	欧拉方程	164
8.5	积分方程	164
8.6	应用题	165

第二部分 线性代数

171

第1章	行列式	173
1.1	数字型行列式的计算	173
1.2	抽象型行列式的计算	176
1.3	克拉默法则	178
1.4	$ A $ 是否为 0	179

第2章 矩阵	180
2.1 幂运算	180
2.2 逆运算	182
2.3 伴随矩阵	184
2.4 初等变换	186
2.5 矩阵方程	187
2.6 矩阵的秩	189
第3章 向量	193
3.1 线性相关与线性无关	194
3.2 线性表出	199
3.3 秩、极大线性无关组	202
3.4 向量空间	202
第4章 线性方程组	205
4.1 方程组有解无解的判别	206
4.2 解具体方程组(含参数)	207
4.3 解抽象方程组	216
4.4 基础解系	218
4.5 公共解与同解	219
第5章 矩阵的特征值和特征向量	222
5.1 求特征值与特征向量	223
5.2 相似对角化的判定及求可逆矩阵 P	227
5.3 相似的应用	233
5.4 实对称矩阵的特征值与特征向量	235
第6章 二次型	239
6.1 化二次型为标准形	240
6.2 正定问题	249
6.3 合同问题	250

第三部分 概率论与数理统计

251

第1章 随机事件和概率	253
1.1 古典概型与几何概型	254
1.2 概率、条件概率的基本性质及公式	255
1.3 事件的独立性及独立重复试验	259
第2章 随机变量及分布	262
2.1 分布函数、概率密度、分布律的概念与性质	263
2.2 求随机变量的概率分布	264
2.3 利用分布求概率及逆问题	265
2.4 求随机变量函数的分布	268

第3章 多维随机变量及其分布	273
3.1 二维离散型随机变量联合分布、边缘分布、条件分布及 独立性	273
3.2 二维连续型随机变量联合分布、边缘分布、条件分布及 独立性	279
3.3 独立及不相关	281
3.4 二维随机变量函数的分布	282
第4章 随机变量的数字特征	288
4.1 一维随机变量及其函数的数字特征	289
4.2 多维随机变量及其函数的数字特征	292
第5章 大数定律和中心极限定理	296
第6章 数理统计的基本概念	297
6.1 三大分布	297
6.2 统计量的数字特征	298
第7章 参数估计	300
7.1 矩估计与最大似然估计	300
7.2 估计量的评选标准	306
7.3 区间估计	309
第8章 假设检验	310

第1章 函数、极限、连续

考点分布

分 年 考 点 值 份	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	00	01	02
复合函数		5		3												
极限的定义及性质						3		3			3			5		
两个基本极限				3	5		5		3	3			3			
洛必达法则						5		3				3	3			
单调有界准则										5						
无穷小的比阶					3											6

1987—2002 年

分 年 考 点 值 份	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	合计 (87—16 年)
复合函数															8
极限的定义与性质	4					9									27
两个基本极限	4							4	10			10	4	4	58
洛必达法则															14
单调有界准则				12		4			10				10		41
无穷小的比阶				4	4		4				4				25

2003—2016 年

考点点睛

1. 有界性

- (1) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.
- (2) $f(x)$ 在 (a, b) 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow b} f(x) = B$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 上有界.
- (3) $f'(x)$ 在有限区间 I 上有界, 则 $f(x)$ 在 I 上有界.

2. 奇偶性

- (1) $f(x)$ 是可导的奇(偶)函数, 则 $f'(x)$ 是偶(奇)函数.
- (2) $f(x)$ 是连续的奇函数, 则其所有原函数都是偶函数;
 $f(x)$ 是连续的偶函数, 则其所有原函数中只有一个奇函数.
- (3) 设 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 上有定义,
 则 $f(x) + f(-x)$ 是偶函数, $f(x) - f(-x)$ 是奇函数.

3. 周期性

- (1) $f(x)$ 是可导的以 T 为周期的周期函数, 则 $f'(x)$ 也以 T 为周期.
- (2) $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 则

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt + C \text{ 以 } T \text{ 为周期} \Leftrightarrow \int_0^T f(t) dt = 0.$$

- (3) $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 则

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt - \frac{\int_0^T f(t) dt}{T} x \text{ 以 } T \text{ 为周期}.$$

4. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上可导,

- (1) $\forall x \in I, f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ 在 I 上单调增;
 $\forall x \in I, f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ 在 I 上单调减.
- (2) $\forall x \in I, f'(x) \geq 0 \Rightarrow f(x)$ 在 I 上单调不减;
 $\forall x \in I, f'(x) \leq 0 \Rightarrow f(x)$ 在 I 上单调不减.

在用单调性说明方程的根的问题时只能使用(1)中的单调增(减), 而不能使用(2)中的单调不减(不减).

1 [1988-I] 已知 $f(x) = e^{x^2}, f[\varphi(x)] = 1 - x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

解 由 $e^{[\varphi(x)]^2} = 1 - x$, 得 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$. 由 $\ln(1-x) \geq 0$ 得 $1-x \geq 1$, 即 $x \leq 0$.

所以 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}, x \leq 0$.

2 [1990-I] 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 则 $f[f(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

答 应填 1.

解 由 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ 知, 对一切的 x 有 $|f(x)| \leq 1$, 则 $f[f(x)] = 1$.

注 函数的复合是一种重要的运算, 求两个分段函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 的复合函数 $y = f[g(x)]$, 实际上就是将 $u = g(x)$ 代入 $y = f(u)$ 中, 关键是搞清楚 $u = g(x)$ 的函数值落在 $y = f(u)$ 定

义域的哪一部分.

3 [1999] 设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则

- (A) 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必是偶函数.
- (B) 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必是奇函数.
- (C) 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必是周期函数.
- (D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时, $F(x)$ 必是单调增函数.

答 应选(A).

解 直接法. 据“1.1 考点点睛”中的“2. 奇偶性”可知(A)正确.

排除法. (B)的反例: $f(x) = \cos x, F(x) = \sin x + 1$ 不是奇函数;

(C)的反例: $f(x) = \cos^2 x, F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$, 不论 C 取什么常数, $F(x)$ 都不是周期函数;

(D)的反例: $f(x) = -\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的, 但 $F(x) = -\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 内是单调减少的.

注 连续函数 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 可以表示为 $F(x) = \int_0^x f(t)dt + C$, 考查

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt + C = \int_0^x f(-u)d(-u) + C = \int_0^x -f(-u)du + C,$$

若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(u) = -f(-u)$, 进而对 $\forall C$ 有 $F(x) = F(-x)$;

若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $f(u) = f(-u)$, 进而当且仅当 $C = 0$ 时有 $F(x) = -F(-x)$.

4 [2005] 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数, “ $M \Leftrightarrow N$ ”表示“ M 的充分必要条件是 N ”, 则必有

- (A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.
- (B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.
- (C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.
- (D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.

答 应选(A).

解 本题同上一题, 都是在考查原函数的奇偶性与周期性等性质, 根据对上一题的分析, 便可直接选(A).

1.2 极限的定义及性质

5 [2003] 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有

- (A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立.
- (B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.
- (C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在.
- (D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在.

答 应选(D).

解 假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n = A (\exists)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n c_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{A}{1} = A (\exists)$, 这与 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$ 矛盾, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在.

注 由极限的局部保号性容易得到极限的局部保序性:

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$, 且 $A > B$, 则 $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $a_n > b_n$.

对于本题, 选项(A), (B)说对任意的 n 成立, 显然错了;

对于(C), $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 是典型的“ $0 \cdot \infty$ ”型未定式, 其极限可能存在也可能不存在.

1.3 求函数极限

考点点睛

求函数极限首先是化简,其次是判别类型选择方法.

常用的化简手段有:(1)非零常数因子先求出;(2)有理化;(3)通分;(4)倒代换.

常用的方法有:(1)四则运算法则及基本极限;(2)等价代换;(3)洛必达法则;(4)泰勒公式.

1. 常用的等价代换($x \rightarrow 0$)

$$\sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim x;$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, a^x - 1 \sim x \ln a, (1+x)^a - 1 \sim ax;$$

$$x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3, x - \arcsin x \sim -\frac{1}{6}x^3;$$

$$x - \tan x \sim -\frac{1}{3}x^3, x - \arctan x \sim \frac{1}{3}x^3;$$

$$x - \ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2.$$

2. 等价代换原理

(1) 如果 $\alpha \sim \alpha^*, \beta \sim \beta^*$, 那么 $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha^*}{\beta^*}$.

(2) 如果 $\alpha \sim \alpha^*, \beta \sim \beta^*$,

当 $\lim \frac{\alpha^*}{\beta^*} = a \neq 1$, 那么 $\alpha - \beta \sim \alpha^* - \beta^*$;

当 $\lim \frac{\alpha^*}{\beta^*} = a \neq -1$, 那么 $\alpha + \beta \sim \alpha^* + \beta^*$.

3. 几个重要函数的泰勒展开式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3);$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o(x^2).$$

4. 变限积分的等价

设函数 $f(x), f^*(x)$ 连续, $g(x), g^*(x)$ 可导,

(1) 如果 $g(x) \sim g^*(x), f(x) \sim f^*(x)$, 则 $\int_0^{g(x)} f(t) dt \sim \int_0^{g^*(x)} f^*(t) dt$.

(2) 如果 $g(x) \sim g^*(x), f(x) \rightarrow A (A \neq 0)$, 则 $\int_0^{g(x)} f(t) dt \sim \int_0^{g^*(x)} A dt$.

5. 极限值与无穷小的关系

$\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha$, 其中 $\lim \alpha = 0$.