现代数学基础丛书·典藏版 9

有限群构造

（下 册）

张远达 著

科学出版社

现代数学基础丛书·典藏版 9

有限群构造

下册

张远达 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书上册论述了有限群的基本知识，下册着重介绍有限群的一些新成果、发展动向以及有限群的某些较专门的部分，如卡特子群、传输理论、超可解群等。

本书可供大专院校数学系高年级学生、研究生、教师及有关的数学工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

有限群构造. 下册/张远达著. —北京：科学出版社，2015.11
(现代数学基础丛书·典藏版；9)
ISBN 978-7-03-046420-0

I. ①有… II. ①张… III. ①有限群—研究 IV. ①O152.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 277026 号

责任编辑：张 扬／责任校对：林青梅
责任印制：徐晓晨／封面设计：王 浩

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京厚诚则铭印刷科技有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015 年 11 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2016 年 6 月印 刷 印张：19
字数：244 000

POD定价： 138.00元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

下 册 前 言

本书上册只叙述了有限群的基本知识，间或也提到了某些专题．在下册里将专门探讨有限群近年来的发展以及它的较艰涩的部分，例如卡特（Carter）子群、恩格尔（Engel）群、正则 p-群、传输理论、群之分解及 Π-性质、半单群、超可解群等．有些部分如群之分解及 Π-性质，本书都只扼要地讲了其中有代表性的一个或两个问题，不可能一一列举，且没有这个必要．又如恩格尔群，本书也只讲了一些基本知识，至于深入的部分及一些具有代表性的工作，都只列举了有关的文献，以便使从事这方面工作的同志有处查询．我们仅将超可解群比较完整地叙述了一番．总之，本书的目的是使读者明了有限群的基本理论和方法（上册），同时也介绍一些新成果及动向（下册）．

有限群的核心问题是决定所有的单群，这是迄今尚未完全解决的问题．虽然，最近二十多年在这方面已取得了一些很深刻的结果，使得上述问题的解决现在看来不再是不可能的了，可是这些结果的证明往往篇幅过长且又极为复杂，以至无法在本书内给以详细表述．本书仅建立一些基本结论与概念，熟悉它们是从事这一学科工作的前提，我们只是抛砖引玉，希望同好者提出批评指正．

张远达

武汉大学 1980 年 9 月

目　　录

第六章　有关幂零性可解性的几个问题

在上册里讲了幂零群可解群的基本内容. 本章将对它们再作进一步的探索,也可以说这章是上册第二章的续篇.

§1. 弗拉梯尼 (Frattini) 子群

在上册第二章§5里讲过弗拉梯尼子群的重要性，现在就特地讨论与之有牵连的一些问题.

已知 $\Phi(G)\lhd\lhd G$ (上册第二章§5定理7(i)), 又知 $G'=[G,G]\lhd\lhd G$ 及 $Z(G)\lhd\lhd G$, 于是问: G', $Z(G)$, $\Phi(G)$ 间的关系怎样? 有下面的

定理 1　不论 G 为任何群,恒有 $G'\cap Z(G)\subseteq\Phi(G)$. (文献[1]的定理4或文献[2]的272页.)

事实上,取 G 之任一个极大子群 M 时,由于 $M\subseteq\{G'\cap Z(G),M\}$ 以及 M 在 G 内的极大性,可知:

或 $G=\{G'\cap Z(G),M\}$, 或 $M=\{G'\cap Z(G),M\}$,

二者必有其一.

若 $G=\{G'\cap Z(G),M\}$, 则因 $G'\cap Z(G)\lhd G$, 故 $G=[G'\cap Z(G)]\cdot M$, 因而从 $G'\cap Z(G)\subseteq Z(G)$ 得知 $M\lhd G$ 后,可知 G/M 无真子群, 即 G/M 为交换的, 随而 $G'\subseteq M$, 故当然有 $G'\cap Z(G)\subseteq M$.

若 $M=\{G'\cap Z(G),M\}$, 则显然有 $G'\cap Z(G)\subseteq M$.

总之,不论怎样, 常有 $G'\cap Z(G)\subseteq M$. 故再由 M 之任意性即得 $G'\cap Z(G)\subseteq\Phi(G)$.　　证完.

由于 $\Phi(G)\lhd\lhd G$, 得作商群 $G/\Phi(G)$, 于是又产生了一个问题,即 $G/\Phi(G)$ 之弗拉梯尼子群是什么? 也就是 $\Phi(G/\Phi(G))=?$

当 $\Phi(G)=G$ 时，$G/\Phi(G)$ 为单位群，故当然有 $\Phi(G/\Phi(G))=1$。若 $\Phi(G)<G$，则 G 有极大子群；而 M 为 G 之极大子群是在且仅在 $M/\Phi(G)$ 为 $G/\Phi(G)$ 之极大子群时，于是当 M_α 跑遍 G 之所有极大子群时，$M_\alpha/\Phi(G)$ 亦跑遍 $G/\Phi(G)$ 之所有极大子群，故不得不有

$$\Phi(G/\Phi(G))=\bigcap_\alpha (M_\alpha/\Phi(G))=\bigcap_\alpha M_\alpha/\Phi(G)$$
$$=\Phi(G)/\Phi(G)=1.$$

于是证得了下面的

定理 2 不论 G 为任何群，恒有 $\Phi(G/\Phi(G))=1$。

比定理 2 更广泛的结果即

定理 3 (i) 从 $N\lhd G$ 及 $N\subseteq\Phi(G)$，得 $\Phi(G)/N=\Phi(G/N)$；(ii) 若只是 $N\lhd G$，则有 $\Phi(G)\cdot N/N\subseteq\Phi(G/N)$，却不敢保证有 $\Phi(G)\cdot N/N=\Phi(G/N)$。

证明 (i) 之证法实际上与定理 2 之证法一样，简示于下：

因 $N\subseteq\Phi(G)$，故 $N\subseteq G$ 之任一个极大子群 M_α，于是 $\Phi(G/N)=\bigcap_{M_\alpha\text{极大}}(M_\alpha/N)=\left(\bigcap_\alpha M_\alpha\right)/N=\Phi(G)/N$，(i) 获证。

附注 特当 $N=\Phi(G)$ 时，就是定理 2。

(ii) 之证明． 令 $\mathscr{S}$ 表示群 G 中包含 N 的一切极大子群而成之集合，即

$$\mathscr{S}=\{M_\alpha | M_\alpha \text{ 为 } G \text{ 之极大子群且 } M_\alpha\supseteq N\},$$

由于 G/N 之每个极大子群为且仅为 M_α/N 形而 $M_\alpha\in\mathscr{S}$，故

$$\Phi(G/N)=\bigcap_{M_\alpha\in\mathscr{S}}(M_\alpha/N)=\left(\bigcap_{M_\alpha\in\mathscr{S}}M_\alpha\right)/N\supseteq\Phi(G)N/N,$$

即 (ii) 之前半获证。

再令 $G=\{x,y\}$，$x^5=y^4=1$，$y^{-1}xy=x^2$，则 $o(G)=20$（参看上册第四章 § 3 的定理 2）；由于 $[G:\{y\}]=5$，故 $\{y\}$ 为 G 之极大子群，因之 $\{x^{-1}yx\}$ 亦为 G 之极大子群，不得不有 $\Phi(G)\subseteq\{y\}\cap\{x^{-1}yx\}$；但 $\{y\}\cap\{x^{-1}yx\}$ 之元为 $y^t=x^{-1}y^rx$，故 $y^{t-r}=$

$y^{-r}x^{-1}y^rx=(y^{-r}xy^r)^{-1}x=(x^{2^r})^{-1}x\in\{x\}\cap\{y\}=1$，不得不有 $t\equiv r\pmod 4$ 及 $2^r\equiv 1\pmod 5$，因之有 $r\equiv 0\pmod 4$，随而 $\{y\}\cap\{x^{-1}yx\}=1$，故结果有 $\Phi(G)=1$。于是取 $N=\{x\}$ 时，则$\Phi(G)N/N=1$；然 G/N 为 4 阶循环群，故它只有唯一个极大子群，其阶为 2，即有 $\Phi(G/N)$ 为 2 阶的；因而 $\Phi(G/N)>\Phi(G)N/N$。(ii) 完全获证。

据定理 3 之 (ii) 即得

推论 若 μ 为 G 之同态映射，则 $\Phi(G)^\mu\subseteq\Phi(G^\mu)$.

事实上，从 $G\to G^\mu$ 知有 $N\lhd G$ 使 $G^\mu\simeq G/N$，由是有 $\Phi(G^\mu)\simeq\Phi(G/N)$。然而 $G^\mu\simeq G/N$ 由 1—1 映射 $g^\mu\leftrightarrows gN$ 来完成 $(g\in G)$，故 g 跑遍 $\Phi(G)$ 时则得 $\Phi(G)^\mu\simeq\Phi(G)N/N$，故据定理 3 之 (ii) 即得 $\Phi(G)^\mu\subseteq\Phi(G^\mu)$. 证完.

已知有限群 G 之 $\Phi(G)$ 恒为幂零的（上册第二章 § 5 定理 7 (iii)），无限群 G 又怎样呢？文献 [3] 中列举了一个无限非幂零群而又无极大子群的例子，故这时 $\Phi(G)=G$，说明无限群 G 确有 $\Phi(G)$ 不为幂零的可能性. 于是问：对无限群 G 应加怎样的限制才使 $\Phi(G)$ 为幂零呢？在文献 [4, 5] 里都证明了：设无限群 G 满足极大条件且又为可解群时，则 $\Phi(G)$ 确为幂零的. 读者如感需要，可参看之，在此我们不深入讨论.

再提这样一个问题，即若 H 为群 G 之子群，$\Phi(H)\subseteq\Phi(G)$ 的关系成立吗？今取 4 次对称群 $\mathfrak{S}_4(=G)$ 为例来说明这猜测不对. 因若令 $\mathfrak{S}_3^{(i)}$ 是从 1, 2, 3, 4 这四个文字中去掉文字 i 后的三次对称群，而暂以 $\mathfrak{S}_3^{(4)}$ 来讨论，如果有 $\mathfrak{S}_4$ 之子群 H 使 $\mathfrak{S}_3^{(4)}<H\ (\subseteq\mathfrak{S}_4)$，那末必有一 $\pi\in H$ 及 $\pi\bar{\in}\mathfrak{S}_3^{(4)}$，于是 π 必使文字 4 变动，即 $\pi(4)=j\neq 4$，故 i 为 1, 2, 3 中某一，于是陪集 $\pi\mathfrak{S}_3^{(4)}$ 与 $\mathfrak{S}_3^{(4)}$ 异且均包含在 H 内；若 $H=\mathfrak{S}_3^{(4)}+\pi\mathfrak{S}_3^{(4)}$，则 $o(H)=12$，$[\mathfrak{S}_4:H]=2$，$H\lhd\mathfrak{S}_4$，然而 $\mathfrak{S}_4$ 中指数 2 的子群只能是 $\mathfrak{A}_4$，故这时 $H=\mathfrak{A}_4$，而因 $\mathfrak{S}_3^{(4)}\not\subseteq\mathfrak{A}_4$，故与 $\mathfrak{S}_3^{(4)}<H$ 矛盾，不可. 因之，$o(H)>12$，不得不有 $H=\mathfrak{S}_4$. 这说明了每 $\mathfrak{S}_3^{(i)}$ 是 $\mathfrak{S}_4$ 之极大子群. 又因显然有 $\bigcap_{i=1}^{4}\mathfrak{S}_3^{(i)}=1$，故

$\Phi(\mathfrak{S}_4)=1$. 但考虑 $\mathfrak{S}_4$ 之西洛 2-子群

$$S_2=\{1,(12)(34),(13)(24),(14)(23),(13),(24),\\(1234),(1432)\}$$

时,由于 S_2 之幂零性知 $S_2'=[S_2,S_2]\subseteq\Phi(S_2)$, 又从 S_2 之非交换性得 $S_2'=[S_2,S_2]\neq 1$, 故 $\Phi(S_2)\neq 1$. 这说明了找得一具体的例子(即四次对称群 G), 虽有 $H<G$, 不但不敢保证 $\Phi(H)\subseteq\Phi(G)$, 甚而出现了 $\Phi(G)<\Phi(H)$ 的现象.

于是问: 若对子群 H 附加某些限制,例如 $H\lhd G$, 又怎样呢?

从 $\Phi(H)\lhd\lhd H$ 及 $H\lhd G$ 得 $\Phi(H)\lhd G$. 再令 $x\in\Phi(H)$, 并假定 $G=\{x,A\}$. 于是 $G=\{x,A\}\subseteq\{\Phi(H),A\}$, 不得不有 $G=\{\Phi(H),A\}=\Phi(H)\cdot\{A\}$, 故由狄氏律得

$$H=H\cap G=H\cap\Phi(H)\cdot\{A\}=\Phi(H)\cdot(H\cap\{A\}),$$

故当 G 满足极大条件时,得 $H=H\cap\{A\}$ (上册第二章 §5 定理 7 (ii)), 即 $H\subseteq\{A\}$, 因之也有 $\Phi(H)\subseteq\{A\}$, 故 $G=\Phi(H)\cdot\{A\}=\{A\}$, 说明了从 $G=\{x,A\}$ 恒得 $G=\{A\}$, 不得不有 $x\in\Phi(G)$. 故 $\Phi(H)\subseteq\Phi(G)$. 证明了

定理 4 当群 G 满足极大条件时,若 $H\lhd G$,则 $\Phi(H)\subseteq\Phi(G)$, 因之有 $\Phi(H)\lhd\Phi(G)$.

据定理的证明方法又知有

推论 当群 G 满足极大条件时,若 H 为 G 之次正规子群,则 $\Phi(H)\subseteq\Phi(G)$. 因之满足极大条件的幂零群 G 之任何子群 H 恒有 $\Phi(H)\subseteq\Phi(G)$.

当定理 4 中正规子群 H 为 G 之直因子时,则有

定理 5 当群 G 满足极大条件时,若 $G=H\times K$,则 $\Phi(G)=\Phi(H)\times\Phi(K)$.

事实上,从 $H\times K$ 及 $\Phi(H)\subseteq H$, $\Phi(K)\subseteq K$ 马上得知有直积 $\Phi(H)\times\Phi(K)$. 但据定理 4 有 $\Phi(H)\subseteq\Phi(G)$, $\Phi(K)\subseteq\Phi(G)$, 故 $\Phi(H)\times\Phi(K)\subseteq\Phi(G)$. 反之,若 $x\in\Phi(G)$, 则从 $G=H\times K$ 可写 $x=hk(h\in H,k\in K)$, 故不论 A 是 H 的任何子集,若 $H=\{h,A\}$, 则 $\{A\}\subseteq H$, 因而有直积 $\{A\}\times K$, 且

$$G=\{h,A,K\}=\{xk^{-1},A,K\}=\{x,A,K\},$$
于是得 $G=\{A,K\}=\{A\}\times K$,故再从 $G=H\times K$ 与 $\{A\}\subseteq H$ 可知有 $H=\{A\}$。因而知 $h\in\Phi(H)$。同理,$k\in\Phi(K)$。故结果有 $x=hk\in\Phi(H)\times\Phi(K)$,即证明了 $\Phi(G)\subseteq\Phi(H)\times\Phi(K)$。于是,$\Phi(G)=\Phi(H)\times\Phi(K)$,证完.

下面再专门讨论有限群 G 的 $\Phi(G)$.

弗拉梯尼子群 $\Phi(G)$ 的引进由 G 之幂零性的研究所需要(上册第二章 §5 定理 6)。然而(有限)群 G 为幂零时,固已保证了 $G/\Phi(G)$ 之幂零性,但反之又怎样呢?下面的定理作了肯定回答。

定理 6 有限群 G 为幂零的充要条件是 $G/\Phi(G)$ 为幂零的.

事实上,$G/\Phi(G)$ 之幂零性说明了
$$[G/\Phi(G),G/\Phi(G)]=[G,G]\cdot\Phi(G)/\Phi(G)\subseteq\Phi(G/\Phi(G))=1,$$
即 $[G,G]\subseteq\Phi(G)$,故再由 G 之有限性知 G 是幂零群.

比定理 6 更广泛的结果即

定理 7 设 $N\lhd G$,G 是有限群且 $\Phi(G)\subseteq N$,则 N 为幂零的充要条件是 $N/\Phi(G)$ 为幂零的.

条件的必要性显然,故只需证充分条件.

令 $p|o(N)$,p 为素数,设 S_p 是 N 的一个西洛 p–子群.下面只证 $S_p\lhd N$ 就行了.

因 $S_p\cdot\Phi(G)/\Phi(G)$ 是 $N/\Phi(G)$ 之西洛 p–子群,故从 $N/\Phi(G)$ 之幂零性得 $S_p\cdot\Phi(G)/\Phi(G)\lhd\lhd N/\Phi(G)$,于是再由 $N/\Phi(G)\lhd G/\Phi(G)$ 可知 $S_p\cdot\Phi(G)/\Phi(G)\lhd G/\Phi(G)$,即 $S_p\cdot\Phi(G)\lhd G$,故对 $g\in G$ 有
$$\begin{aligned}S_p\cdot\Phi(G)&=g^{-1}S_p\cdot\Phi(G)\cdot g=g^{-1}S_pg\cdot g^{-1}\Phi(G)g\\&=g^{-1}S_pg\cdot\Phi(G)\supseteq g^{-1}S_pg,\end{aligned}$$
说明了 S_p 与 $g^{-1}S_pg$ 都是 $S_p\cdot\Phi(G)$ 的西洛 p–子群,故有 $x=st(s\in S_p,t\in\Phi(G))$ 使 $g^{-1}S_pg=x^{-1}S_px$,即
$$gx^{-1}\in N_G(S_p),\ g\in N_G(S_p)\cdot x=N_G(S_p)\cdot st\subseteq N_G(S_p)\cdot\Phi(G),$$
故 $G=N_G(S_p)\cdot\Phi(G)$,因而据 G 之有限性得 $G=N_G(S_p)$,即 $S_p\lhd G$,故当然有 $S_p\lhd N$。 证完.

附注 $N=G$ 时，就得定理 6，即定理 6 为定理 7 的一个推论．我们所以要先谈定理 6 的原因并非证定理 7 时需引用定理 6（即不是逻辑上的必要），而是考虑到定理 6 的用途大且证明也直接且简单些．

据定理 6，能证下面的

定理 8 若 G/N 为幂零群，G 是有限的，则 G 中必有一幂零子群 A 使 $G=NA$．

附注 不必要求 A 为 N 之补子群（即 $N\cap A=1$），因之不要求 $G/N\simeq A$．

证明 考虑 G 之子群 A 的集合

$$\mathscr{S}=\{A \mid A\subseteq G, G=NA\}.$$

显然由于 $G\in\mathscr{S}$ 可知 $\mathscr{S}$ 非空集．今令 A 为集 $\mathscr{S}$ 中一个极小的元，下面就是要证明 A 为幂零的．

首先断言 $N\cap A\subseteq\Phi(A)$．为什么呢？若不然，即 $N\cap A\nsubseteq\Phi(A)$，则 A 至少有一个极大子群，如 B，使 $N\cap A\nsubseteq B$，故不得不有 $A=(N\cap A)\cdot B(\because N\cap A\lhd A)$，于是 $G=NA=N(N\cap A)B=NB$，$B\in\mathscr{S}$，这与 A 为 $\mathscr{S}$ 之一个极小元的假设相矛盾．故必有 $N\cap A\subseteq\Phi(A)$．

再从 $G=NA$ 得 $G/N\simeq A/N\cap A$，而 $A/N\cap A\sim(A/N\cap A)/(\Phi(A)/N\cap A)$，故 $G/N\sim(A/N\cap A)/(\Phi(A)/N\cap A)\ (\simeq A/\Phi(A))$，即 $G/N\sim A/\Phi(A)$．故 G/N 之幂零性又保证了 $A/\Phi(A)$ 是幂零的，随而据定理 6 知 A 为幂零群．　证完．

我们知道有限群 G 的弗拉梯尼子群 $\Phi(G)$ 恒为 $\Phi(G)<G$，其中一特款是 $\Phi(G)=1$．

然而 $\Phi(G)=1$ 的有限群又确有很多，例如 n 次对称群 $\mathfrak{S}_n$ 即是．事实上，令 $\mathfrak{S}^{(i)}_{n-1}$ 为从 n 个文字 $1, 2, \cdots, n$ 去掉文字 i 后剩下 $n-1$ 个文字上的 $n-1$ 次对称群；若 $\mathfrak{S}^{(n)}_{n-1}<H\subseteq\mathfrak{S}_n$，则有 $\pi\in H$ 及 $\pi\bar{\in}\mathfrak{S}^{(n)}_{n-1}$，故 π 使文字 n 变动，因而将 π 写为循环表示时，必有一循环因子 π_n 含文字 n，其余的循环因子都不含 n 随而在 $\mathfrak{S}^{(n)}_{n-1}$ 内，于是 $\pi_n\in H$，故再将 π_n 写为对换之积时如 $\pi_n=(i_1 i_2\cdots i_t n)=$

$(i_1i_2)\cdots(i_1i_t)(i_1n)$，则因 (i_1i_2)，$\cdots$，(i_1i_t) 都在 $\mathfrak{S}_{n-1}^{(n)}(\subset H)$ 内，故有 $(i_1n)\in H$，于是再从 $\mathfrak{S}_{n-1}^{(n)}(\subset H)$ 为 $n-1$ 个文字 1，2，…，$n-1$ 上的对称群，就知道 1，2，…，n 中任二个文字之对换均属于 H，说明了 $H=\mathfrak{S}_n$，这就是说 $\mathfrak{S}_{n-1}^{(n)}$ 为 $\mathfrak{S}_n$ 之极大子群；同理，每 $\mathfrak{S}_{n-1}^{(i)}$ 为 $\mathfrak{S}_n$ 之极大子群；又因任何非恒等的置换 τ（即 $\tau\neq 1$）必使 1，2，…，n 中至少一文字发生变化，故 τ 至少不在 $\mathfrak{S}_{n-1}^{(1)}$，$\mathfrak{S}_{n-1}^{(2)}$，$\cdots$，$\mathfrak{S}_{n-1}^{(n)}$ 中的某一个内，也就是说 $\tau\overline{\in}\Phi(\mathfrak{S}_n)$，说明了 $\Phi(\mathfrak{S}_n)=1$.

$\Phi(G)=1$ 的有限群 G 既确有很多，故研究 $\Phi(G)=1$ 才有普遍意义. 我们现在还是讨论幂零群. 首先问有限幂零群 G 何时才有 $\Phi(G)=1$ 呢？如有限幂零群 G 具性质 $\Phi(G)=1$，则因这时 $G'=[G,G]\subseteq\Phi(G)$，故 $G'=[G,G]=1$，即 G 为交换的，这是说问题已转化为讨论有限交换群 G 具性质 $\Phi(G)=1$ 的条件. 关于这个，有下面的

定理 9 有限交换群 G 具性质 $\Phi(G)=1$ 的充要条件是 G 为初等交换群.

证明 设 $G=\{a_1\}\times\{a_2\}\times\cdots\times\{a_n\}$，$o(a_i)=p_i^{\lambda_i}$，$p_i$ 为素数（$\lambda_i\geqslant 1$，$i\neq j$ 时可能有 $p_i=p_j$）. 因 $\{a_i\}$ 只有唯一个极大子群 $\{a_i^{p_i}\}$，故 $\Phi(\{a_i\})=\{a_i^{p_i}\}$，因之就有

$$\begin{aligned}\Phi(G)&=\Phi(\{a_1\})\times\Phi(\{a_2\})\times\cdots\times\Phi(\{a_n\})\\&=\{a_1^{p_1}\}\times\{a_2^{p_2}\}\times\cdots\times\{a_n^{p_n}\}.\end{aligned}$$

于是，$\Phi(G)=1$ 的充要条件是对每 i 言有 $\{a_i^{p_i}\}=1$，即 $o(a_i)=p_i$ 或 $\lambda_i=1$. 证完.

又因恒有 $\Phi(G/\Phi(G))=1$，故当 $G/\Phi(G)$ 为幂零时，$G/\Phi(G)$ 必是交换的，随而为初等交换群（定理 9）. 反之，当 $G/\Phi(G)$ 为初等交换时，$G/\Phi(G)$ 当然为幂零的. 于是据定理 6 又得到

定理 10 有限群 G 为幂零的充要条件是 $G/\Phi(G)$ 为初等交换群. 换言之，设 G 为有限群，则 $G/\Phi(G)$ 为幂零与为初等交换这二者是等价的.

由定理 10 可知：设 G 为有限幂零群，则 $G/\Phi(G)$ 为初等交换群. 反之，仍设 G 为有限幂零群，若有 $N\lhd G$ 使 G/N 为初等交换

的，则据定理 9 得 $\Phi(G/N)=1$，这无异乎是说 G/N 之所有极大子群之交为单位元群，与之等价的意义就是 G 中凡包含 N 的一切极大子群之交恰等于 N，而这样的交显然大于 $\Phi(G)$，因之 $N\supseteq\Phi(G)$；另方面，若 $\Phi(G)\subseteq A$，则从 $G/\Phi(G)$ 之(初等)交换性知 $A/\Phi(G)\lhd G/\Phi(G)$，故 $A\lhd G$，于是 $G/A\simeq(G/\Phi(G))/(A/\Phi(G))$ 说明了 G/A 是初等交换的．故证明了

定理 11　设 G 是有限幂零群．若 $\Phi(G)\subseteq A$，A 为 G 之子群，则 $A\lhd G$，且 $\Phi(G)$ 为使 G 之商群是初等交换的 G 之一切正规子群之交，而实际上 $\Phi(G)$ 是使 G 之商群为初等交换的 G 中唯一个最小正规子群．

将这定理 11 与上册第一章 §10 中定理 1 和 2 作一个对比是很有意义的，启发我们怎样思考问题：在那里是换位子群 G' 对任何群 G 的关系，而在这里是弗拉梯尼子群 $\Phi(G)$ 对有限幂零群 G 的关系，二者恰好相似．

回忆证定理 11 之关键在 $\Phi(G/N)=1$，故若删掉 G 为有限幂零之假设条件，而来考虑任何群 G，又有

定理 12　任何群 G 之弗拉梯尼子群 $\Phi(G)$ 总是等于使 G 之商群的弗拉梯尼子群为单位元群的 G 之一切正规子群的交，也就是使 G 之商群的弗拉梯尼子群为单位元群的 G 之唯一个最小正规子群．

证明　因 $\Phi(G)\lhd G$ 且 $\Phi(G/\Phi(G))=1$，故 $\Phi(G)$ 确满足定理中的要求，即以之所作 G 的商群之弗拉梯尼子群为单位元群．反之，若 $N\lhd G$ 且 $\Phi(G/N)=1$，则因 $\Phi(G/N)=1$ 的意义是说 G 中凡包含 N 的一切极大子群之交必为 N，然而 G 中凡包含 N 的一切极大子群最多也不过是跑遍了 G 之一切极大子群，故前者的交 N 必不小于 G 之所有极大子群的交 $\Phi(G)$，即 $N\supseteq\Phi(G)$．由这正反两面恰好证明了定理 12．

我们已知：当群 G 满足极大条件时，超中心 $S(G)$ 是使 G 之商群无中心的 G 之最小正规子群，且等于凡使 G 之商群无中心的一切正规子群的交（上册第二章 §4 定理 12）．于是据定理 12 又

知弗拉梯尼子群 $\Phi(G)$ 对任意群 G 之关系也恰如超中心 $S(G)$ 对满足极大条件之群 G 的关系.

在上册第二章 §4 里已说过：任何群的有限多个幂零正规子群之积也是一个幂零正规子群. 由是可知有限群 G 中所有幂零正规子群之积是一个幂零正规子群，它当然为 G 的唯一个最大幂零正规子群. 这说明了有限群 G 恒有唯一个最大幂零正规子群，叫它为 G 的费丁 (Fitting) 子群，表为 $F(G)$.（文献[6]）

因有限群 G 之弗拉梯尼子群 $\Phi(G)$ 是幂零正规的，G 之超中心 $S(G)$ 也是幂零正规的，故不得不有 $\Phi(G)\cdot S(G)\subseteq F(G)$. 弗拉梯尼子群与费丁子群间的联系表现在下面的

定理 13 有限群 G 必有 $F(G/\Phi(G))=F(G)/\Phi(G)$.

事实上，据定理 7 知 $N/\Phi(G)$ 为 $G/\Phi(G)$ 之幂零正规子群的充要条件是 N 为幂零的及 $N\lhd G$ 与 $\Phi(G)\subseteq N$. 于是，当 $N_\alpha/\Phi(G)$ 跑遍 $G/\Phi(G)$ 之一切幂零正规子群时，就得到

$$F(G/\Phi(G))=\prod_\alpha(N_\alpha/\Phi(G))=\left(\prod_\alpha N_\alpha\right)/\Phi(G)\subseteq F(G)/\Phi(G).$$

反之，又因 $F(G)$ 是 G 的幂零正规子群，故 $F(G)/\Phi(G)$ 为 $G/\Phi(G)$ 之幂零正规子群，于是据费丁子群之意义当然有 $F(G)/\Phi(G)\subseteq F(G/\Phi(G))$. 故结果有 $F(G/\Phi(G))=F(G)/\Phi(G)$，证完.

于是再利用定理 10 与定理 13 又得到

推论 设 G 为有限群，则 $G/\Phi(G)$ 之任何幂零正规子群 $N/\Phi(G)$ 恒为初等交换的. 因之，$F(G/\Phi(G))=F(G)/\Phi(G)$ 是初等交换的.

事实上，从 $N\lhd G$ 得 $\Phi(N)\subseteq\Phi(G)$，故

$$N/\Phi(G)\simeq(N/\Phi(N))/(\Phi(G)/\Phi(N));$$

但 $N/\Phi(G)$ 之幂零性保证了 N 是幂零的(定理 7)，故由定理 10 知 $N/\Phi(N)$ 是初等交换群，于是据上述的同构关系可知 $N/\Phi(G)$ 为初等交换的. 证完.

定理 12 说了弗拉梯尼子群 $\Phi(G)$ 与超中心 $S(G)$ 有类似之

处．我们又知道：有限群 G 之 $\Phi(G)$ 恒为幂零的，因之 $\Phi(G)$ 中阶互素之二元可交换．相应地又知道超中心 $S(G)$ 也为幂零的，且尚有

定理 14 有限群 G 之超中心 $S(G)$ 的每元 x 能和 G 中阶与 $o(x)$ 互素的任何元 y 可交换． 即 $y\in G$，$x\in S(G)$，且 $(o(x),o(y))=1$ 时，则必 $xy=yx$．

证明 设 $1=Z_0<Z_1<Z_2<\cdots<Z_c\leqslant G$ 中 $Z_i/Z_{i-1}=Z(G/Z_{i-1})$，$Z_{c-1}<Z_c=S(G)$，因之 $Z(G/Z_c)=1$．

题云 $x\in S(G)=Z_c$．若 $x\in Z_1=Z(G)$，当然有 $xy=yx$．今归纳地假定 $x\in Z_i$ 时也有 $xy=yx$，而考虑 $x\in Z_{i+1}$ 的情况．这时，因 $[G,Z_{i+1}]\subseteq Z_i$，故

$$v=[y,x]=y^{-1}x^{-1}yx\in Z_i.$$

但因 $Z_{i+1}\lhd\lhd G$ 且 Z_{i+1} 是幂零的，故令 $o(x)=n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t}$ 为素因数分解时，则幂零群 Z_{i+1} 中西洛 p_i-子群 $A_i\ (i=1,2,\cdots,t)$ 的直积 $N=A_1\times A_2\times\cdots\times A_t$ 为 Z_{i+1} 之特征子群，即 $N\lhd\lhd Z_{i+1}$，于是有 $N\lhd\lhd G$，故从 $v\in Z_i<Z_{i+1}$ 以及 $v=(y^{-1}xy)^{-1}x$ 中的 $(y^{-1}xy)^{-1}$ 与 x 都有阶 n，故都在 N 内，因而 $v\in N$，于是 $o(v)$ 至多只能有 $p_1,p_2,\cdots,p_t$ 为素因数，故由 $(o(x),o(y))=1$ 亦必有 $(o(v),o(y))=1$．由是再据归纳法的假设应有 $vy=yv$，故令 $o(y)=\mu$ 时，则从 $y^{-1}x^{-1}y=vx^{-1}$ 易证

$$y^{-k}x^{-1}y^k=v^kx^{-1}$$

对任何自然数 k 成立．于是应有 $y^{-\mu}x^{-1}y^{\mu}=v^{\mu}x^{-1}$，即 $x^{-1}=v^{\mu}x^{-1}$，$v^{\mu}=1$．但 $(\mu,o(v))=1$，故由 $v^{\mu}=1$ 不得不有 $v=1$，即 $xy=yx$．故由归纳法知 $x\in Z_c=S(G)$ 时，也有 $xy=yx$． 证完．

定理 16 说明有限群 G 之超中心 $S(G)$ 的元 x 与 G 中怎样的元素可交换的问题．至于费丁子群 $F(G)$ 之元与 G 中怎样一些元可交换，则有

定理 15 有限群 G 之费丁子群 $F(G)$ 总是为 G 中每个极小正规子群之中心化子的子群．

证明 设 M 为 G 之一个极小正规子群，我们的目的就是要证

明 $F(G)\subseteq Z_G(M)$.

若 $M\cap F(G)=1$，则 $\{M, F(G)\}=M\times F(G)$，当然有 $F(G)\subseteq Z_G(M)$.

若 $M\cap F(G)\neq 1$，则因 $M\cap F(G)\lhd G$ 以及M在G内的极小正规性,就有 $M=M\cap F(G)$，即 $M\subseteq F(G)$；但由 $F(G)$ 之幂零性及 $M\lhd F(G)$,又知道 $M\cap Z[F(G)]\neq 1$（上册第二章§4的定理 8)；然而 $Z[F(G)]\lhd\lhd F(G)$，故 $Z[F(G)]\lhd G$，因之 $M\cap Z[F(G)]\lhd G$，于是再度利用M在G内的极小正规性就知道 $M\cap Z[F(G)]=M$，即 $M\subseteq Z[F(G)]$，这当然表明了M的每元与 $F(G)$ 的每元可交换,即 $F(G)\subseteq Z_G(M)$.　证完.

由于 $\Phi(G)\subseteq F(G)$ 及 $S(G)\subseteq F(G)$，故据定理 15 即得

推论　有限群G之弗拉梯尼子群 $\Phi(G)$ 与超中心 $S(G)$ 都是G中每个极小正规子群之中心化子的子群.

关于 $\Phi(G)$，不仅是有 $\Phi(G)\subseteq Z_G(M_0)$，式中 M_0为G之任一个极小正规子群，而且还能说商群 $G/\Phi(G)$ 之任一个极小交换正规子群 $M/\Phi(G)$ 有补子群（补子群之意义可参看定理 8 的附注.一般,群G之二个子群 A, B 如果满足 $G=AB$ 及 $A\cap B=1$ 之关系时,就叫A与B互为补子群(在G内)，又叫 A（或 B）在G内有补子群). 事实上,有

定理 16　设G为有限群,$N\lhd G$. 于是，$N=\Phi(G)$ 的充要条件是:

(i) G没有真子群 S 使 $G=NS$,

(ii) 商群 G/N 之任一个极小交换正规子群必有补子群.

证明　先证条件的必要性.　设 $N=\Phi(G)$,这时条件 (i)显然成立;再令 $\bar{G}=G/\Phi(G)$，则 $\Phi(\bar{G})=1$（定理 2)，故若M为 $\bar{G}$ 之极小交换正规子群,则从 $\Phi(\bar{G})=1$ 及 $M\neq 1$ 可知 $M\not\subseteq\Phi(\bar{G})$，因之 $\bar{G}$ 必有一极大子群T使 $M\not\subseteq T$，再由 $M\lhd\bar{G}$ 知 MT 为 $\bar{G}$ 之子群且有 $MT>T$，故由T之极大性有 $\bar{G}=MT$, $D=M\cap T\lhd T$；M之交换性又保证了 $D\lhd M$，因之 $D\lhd MT=\bar{G}$. 但 $M\not\subseteq T$ 说明了 $D<M$，故由M之极小交换正规性可知 $D=1$，即 $M\cap T=$

1，即M在$\bar{G}$内有补子群T，证明了条件(ii)。

再证条件的充分性. 设$N \lhd G$，且N具定理中所说的性质(i)与(ii)。于是不论A为G之任何子集，当$x \in N$时，据条件(i)得知从$G = \{x, A\} = N\{A\}$有$G = \{A\}$，因而由上册第2章定理7(ii)知$x \in \Phi(G)$，证明了$N \subseteq \Phi(G)$。

再令$G^* = G/N$，能断言$\Phi(G^*) = 1$。用反证法，即若$\Phi(G^*) \neq 1$，则由$\Phi(G^*)$之幂零性知$Z[\Phi(G^*)] \neq 1$，然而从$Z[\Phi(G^*)] \lhd\lhd \Phi(G^*)$及$\Phi(G^*) \lhd\lhd G^*$得$Z[\Phi(G^*)] \lhd\lhd G^*$又说明了$G^*$已有一个交换正规子群$Z[\Phi(G^*)] \neq 1$，于是$G^*$必有一个极小交换正规子群$M$包含在$Z[\Phi(G^*)]$内，因而$1 < M \subseteq Z[\Phi(G^*)]$；然而据条件(ii)知有$T < G^*$使$G^* = MT$及$M \cap T = 1$；但从$G^* = MT$及$M \subseteq Z[\Phi(G^*)] \subseteq \Phi(G^*)$而据上册第二章定理7(ii)就有$G^* = T$，显相矛盾。故不得不有$\Phi(G^*) = 1$。然而$1 = \Phi(G^*) = \Phi(G/N)$是说明$G$中凡包含$N$的一切极大子群之交必等于$N$，这当然产生了$N \supseteq \Phi(G)$。

合并上述的两段，得$N = \Phi(G)$。至此，定理16完全获证。

再谈谈有限幂零群G之$\Phi(G)$，来结束这一节。我们知道：$\Phi(G)$之引进是幂零群的需要；然而p-群G之$\Phi(G) = G^p G'$（上册第五章§1定理10），今问一般有限幂零群G之$\Phi(G)$究竟与G'，G^p间的关系怎样？设$o(G) = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$，$G$幂零就意味着$G$之任一极大子群$M \lhd G$且$o(G/M) =$素数，因此$G$之所有极大子群得按其指数为$p_1, p_2, \cdots, p_r$分成$r$个类。今考查指数为$p_i$的极大子群$M_i$，由于$o(G/M_i) = p_i$，故$G^{p_i} \subseteq M_i$，因之$G^{p_i} G' \subseteq M_i$，即$G^{p_i} G'$包含在$G$中指数为$p_i$的任一极大子群内，故也必包含在所有指数为$p_i$的极大子群的交内，由此可知$G^{p_1} G' \cap G^{p_2} G' \cap \cdots \cap G^{p_r} G'$含于$G$之一切极大子群之交，即$G^{p_1} G' \cap G^{p_2} G' \cap \cdots \cap G^{p_r} G' \subseteq \Phi(G)$。另方面，由于$(G/G')/(G^p G'/G') \simeq G/G^p G' \simeq (G/G^p)/(G^p G'/G^p)$可知$G/G^p G'$为交换且每元之阶等于$p$，因之为初等交换$p$-群，故$\Phi(G/G^p G') = 1$（定理9），于是$\Phi(G) \subseteq G^p G'$（参看定理11或12之证明方法），不得不有$\Phi(G)$