

李铁映
Li Tieying

李铁映

Study Notes of Li Tieying in
Charles University, Czechoslovakia

2 | 一年级
First Year

- 1 -

Fyp. I.

Li Tie-ying
19. V 1957.

Úloha č. 4. Měření

tepelného součinitele rozšířivosti vzduchu ply-
novým teplověrem a určení c_p metodou

Clément-Desormesovu

$P = 740 \text{ mm Hg}$ $T = 16^\circ \text{C}$ $V = 72$

I Obecná část.



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大学笔记

Study Notes of Li Tieying in
Charles University, Czechoslovakia

李铁映
Li Tieying

2

Volume II

1956年11月—1957年4月

Nov.1956-Apr.1957

一年级

First Year



 高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目 (C I P) 数据

大学笔记.2 / 李铁映. — 北京: 高等教育出版社,
2008.4

ISBN 978-7-04-024222-5

I. 大… II. 李… III. ①高等数学—文集②物理学—文
集 IV. 013-53 04-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 046705 号

策划编辑 杨利平 责任编辑 王文颖 责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landaco.com
印 刷	北京雅昌彩色印刷有限公司		http://www.landaco.com.cn
开 本	640 × 960 1/8	畅想教育	http://www.widedu.com
本册印张	40.75	版 次	2008 年 4 月第 1 版
总 印 张	639.5	印 次	2013 年 1 月第 2 次印刷
本册字数	260,000		
购书热线	010-58581118		
咨询电话	400-810-0598		

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 24222-001

大学笔记

Study Notes of Li Tieying in
Charles University, Czechoslovakia

李 tieying
Li Tieying

Volume 2

1956年11月 - 1957年4月

Nov. 1956 - Apr. 1957

第一年

First Year

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等代数
HIGHER ALGEBRA

1956年11月
1957年3月

-1-

Мисо р "Некторови алгебры"

(N. P. минорский. N. P. Млановский)

1. Некторови поучи

$$a = a_x i + a_y j + a_z k.$$

(i, j, k су су то
јединични вектори)

$$b = b_x i + b_y j + b_z k.$$

$$c = a \times b = (a_x i + a_y j + a_z k) \times (b_x i + b_y j + b_z k)$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} k,$$

$$= c_x i + c_y j + c_z k.$$

$$c = a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$S = |a \times b| = c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}$$

2. Smíšený vektorový součin

$$\textcircled{2} (a \times b) \cdot c = c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (a \times b) \cdot c = (b \times c) \cdot a = a \cdot (b \times c) = \underline{\underline{a \cdot b \cdot c}}$$

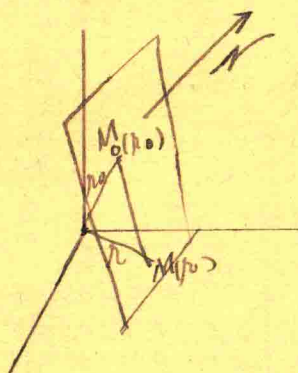
3. Dvojný (dvojnásobek vektorový) součin

$$a \times (b \times c) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (a_x c_z + a_y c_y + a_z c_x)(b_x i + b_y j + b_z k) - \\ &\quad - (a_x b_z + a_y b_y + a_z b_x)(c_x i + c_y j + c_z k) \end{aligned}$$

$$= \underline{\underline{b \cdot (a \cdot c) - c \cdot (a \cdot b)}}$$

-3-

4. Rovnice roviny

$$(r - r_0)N = 0$$

$$rN - r_0N = 0 = rN + D = 0.$$

$$r(x, y, z)$$

$$N(A, B, C) \Rightarrow Ax + By + Cz + D = 0.$$

$$r_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

5. Uhel dvou rovin

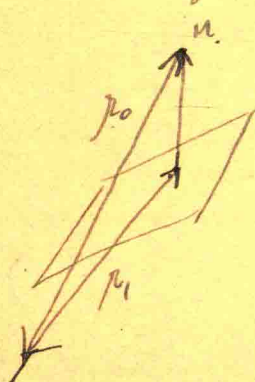
$$r_1N_1 + D_1 = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{N_1 N_2}$$

$$r_2N_2 + D_2 = 0$$

$$= \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

6. Vzdálenost bodu od roviny

$$rN + D = 0$$



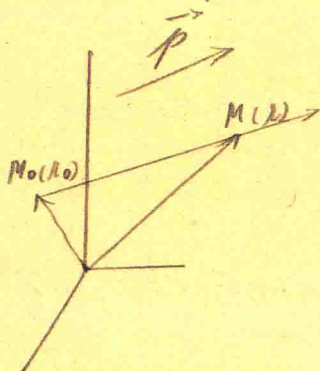
$$r_0 - r_1 = d \frac{\vec{N}}{N}$$

$$r_0 \vec{N} - r_1 \vec{N} = dN$$

$$r_0 \vec{N} + D = dN \Rightarrow d = \frac{r_0 \vec{N} + D}{N}$$

- 4 -

7. Rovnice přímky.



$$(r - r_0) \times \vec{p} = 0.$$

$$\vec{p}(m, n, p) \quad \begin{vmatrix} i & j & k \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad \text{--- (1)}$$

(kanonická rovnice přímky)

$$r = r_0 + \vec{p}t \quad \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \quad \text{--- (2)}$$

$$t = \frac{r - r_0}{\vec{p}} = \pm \frac{|r - r_0|}{p} \quad \text{(parametrická rovnice přímky)}$$

$$\left. \begin{aligned} r \cdot N_1 + D_1 &= 0 \\ r \cdot N_2 + D_2 &= 0 \end{aligned} \right\} = \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{--- (3) (obecné rovnice přímky)}$$

8. Úhel dvou přímek, úhel přímky a roviny.

$$\text{dvě přímky} \quad \begin{aligned} (r - r_1) \times p_1 &= 0 \\ (r - r_0) \times p_2 &= 0. \end{aligned}$$

-5-

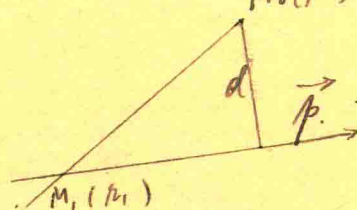
$$\cos \varphi = \frac{\vec{P}_1 \vec{P}_2}{P_1 P_2}$$

Dana přímka a $(r - r_0) \times P = 0$.

Dovíme $rN + D = 0$.

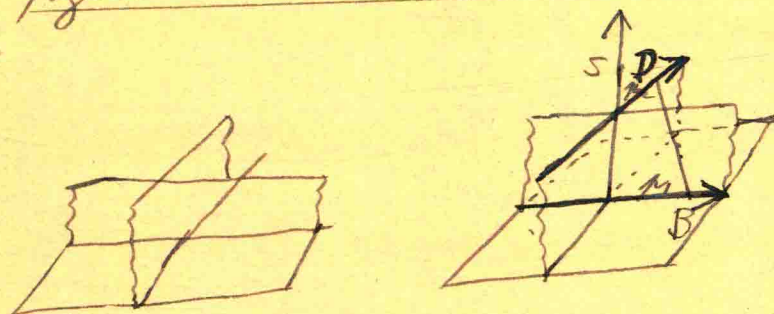
$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{NP}{NP}.$$

9. Vzdálenost bodu od přímky.



$$M_0(r_0) \quad \frac{|(r_0 - r_1) \times \vec{P}|}{P} = d.$$

10. Vzdálenost dvou přímek



Dva případy

$$\begin{cases} (r - r_1) \times P_1 = 0 \\ (r - r_2) \times P_2 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{P}_1 \times \vec{P}_2 = S$$

$$BD = r_2 - r_1$$

$$d = \frac{|\vec{P}_1 \times \vec{P}_2|}{|\vec{P}_1 \times \vec{P}_2|} (r_2 - r_1)$$

11 Transformace pravouhlých souřadnic

Dvě soustavy $i \ j \ k$ 0
 $i' \ j' \ k'$ $O(x_0)$

$\alpha = i i'$	$\beta = j \cdot i'$	$\gamma = k i'$
$\alpha' = j j'$	$\beta' = j \cdot j'$	$\gamma' = k j'$
$\alpha'' = i k'$	$\beta'' = j k'$	$\gamma'' = k k'$

Směrové kosinusy.

$$r = r_0 + r'$$

$$x i + y j + z k = (x_0 i + y_0 j + z_0 k) + (x' i' + y' j' + z' k')$$

$$\begin{cases} i' = \alpha i + \beta j + \gamma k \\ j' = \alpha' i + \beta' j + \gamma' k \\ k' = \alpha'' i + \beta'' j + \gamma'' k \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{dosadíme do druhé} \\ \text{rovnosti} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \alpha \alpha' + \alpha' \gamma' + \alpha'' \gamma'' \\ y = y_0 + \beta \alpha' + \beta' \gamma' + \beta'' \gamma'' \\ z = z_0 + \gamma \alpha' + \gamma' \gamma' + \gamma'' \gamma'' \end{cases}$$

inverzní transformace.

$$(x - x_0) i + (y - y_0) j + (z - z_0) k = x' i' + y' j' + z' k'$$

$$i = \alpha i' + \alpha' j' + \alpha'' k' \dots j \dots k$$

$$\begin{cases} x' = \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) \\ y' = \alpha' \dots + \beta' \dots + \gamma' \dots \\ z' = \alpha'' \dots + \beta'' \dots + \gamma'' \dots \end{cases}$$

- 7 -

12 Eulerovy úhly.

Dány dvě rovnice. $\begin{matrix} i & j & k \\ a & b & c \end{matrix}$.

pomocné vektory ① u . je jednotkový vektor na
přímici rovin (ij) , (ab) .

②. $v \perp u$ leží v rovině (ij) .

③ $v \perp u$ leží .. (ab) .

trojice (u, v, k) $(v \in u)$ jsou pravotočivé?

Tři nezávislé nezávislé parametry.

0 < θ < π . úhel θ je úhel, sevřený k a c = úhel sklonu

$$\cos \theta = k \cdot c.$$

① úhel φ je úhel, sevřený i a u .

$$u = \frac{k \cdot c}{\sin \theta} = i \cos \varphi + j \sin \varphi.$$

②. úhel φ je úhel, sevřený u a a .

$$v = i \sin \varphi - j \cos \varphi.$$

- 8

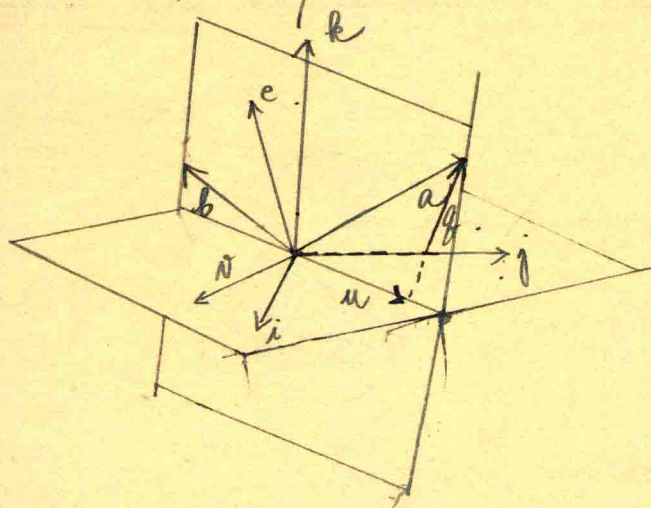
$$q = (c \times n) \sin \varphi.$$

$$c = v \sin \theta + k \cos \theta = i \sin \varphi \sin \theta - j \cos \varphi \sin \theta + k \cos \theta$$

$$b = c \times a$$

$$\begin{aligned} a &= u \cos \varphi + q = u \cos \varphi + (c \times n) \sin \varphi \\ &= i (\cos \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \sin \varphi \cos \theta) + \\ &\quad + j (\cos \varphi \cos \varphi + \sin \varphi \sin \varphi \cos \theta) + \\ &\quad + k \sin \varphi \sin \theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= i (-\cos \varphi \sin \varphi - \sin \varphi \cos \varphi \cos \theta) + \\ &\quad + j (\cos \theta \cos \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \sin \varphi) + \\ &\quad + k \cos \varphi \sin \theta. \end{aligned}$$



- 9 -

Úvod do Teorie determinantu a matice a jejich užití

1. Doplněk prvku v determinantu —

$$A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} \quad - \text{determinant}$$

A_{ik} — doplněk prvku a_{ik} v determinantu A

- a) Doplněk prvku a_{ik} v det. A je det. stupně $(n-1)$ -ho, který k němu obdržíme vynásobením těch $(n-1)$ řad, které se v prvku a_{ik} kříží, násobený $(-1)^{i+k}$
- b) Det. $(n-1)$ řadový, který dostaneme z daného vynásobením dvou množin řadových řad, nazýváme subdeterminantem (minorem)

$$\begin{array}{l} A_{ik} \\ \text{doplněk} \end{array} = (-1)^{i+k} \begin{array}{l} M_{ik} \\ \text{subdeterminant} \end{array}$$

2. Řešení soustavy n lineárních rovnic o n neznámých.

$$\text{Soustava } n \text{ rovnic} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots = y_1, & \dots, L_1(x) = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots = y_n, & \dots, L_n(x) = 0 \end{cases}$$

a_{ik} a y_i jsou ^{-to-} dána čísla.
a x_i jsou dána řešení.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mN} \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{determinant} \\ \text{soustavy rovnice} \end{array}$$

a). Každé řešení soustavy rovnice je také řešení každé lineární kombinace těchto rovnice.

$$c_1 L_1(x) + c_2 L_2(x) + \dots + c_m L_m(x) = 0$$

b). Odvodit Cramerovo pravidlo..

0 nasobíme ~~det A~~ ^{průběh} $A_{1k}, A_{2k}, \dots, A_{mk}$.
rovnice (1)

probi $a_{1k}, \dots, a_{mk}$ det. A. Rovnice takto nasobené
všechny sečteme, odečteme rovnici, v níž
koeficient při x_k je

$$a_{1k} A_{1k} + a_{2k} A_{2k} + \dots + a_{mk} A_{mk}$$

Tento výraz při $k \neq k$ se rovná nule.

při $k = k$ se rovná A.

Konečně dostaneme Jensen

$$A x_k = A_{1k} y_1 + A_{2k} y_2 + \dots + A_{mk} y_m$$

z toho můžeme psát x_k .

-11-

Tím způsobem dostaneme všechny řešení. Dá se to dokázat, že je to právě všechna řešení této soustavy rovnic.

$$v_k = \frac{A_k}{A}.$$

A_k je det. v jím k-tý řádek je nahrazen koeficienty $y_1, y_2, \dots, y_n$.

3. Další užité věty o rozvození determinantu

a). Parciální derivace determinantu podle prvku rovná se doplněk tohoto prvku v determinantu

$$\frac{\partial A}{\partial a_{rs}} = A_{rs}.$$

$$A = a_{11} \frac{\partial A}{\partial a_{11}} + a_{12} \frac{\partial A}{\partial a_{12}} + \dots + a_{1n} \frac{\partial A}{\partial a_{1n}}.$$

b) Když $A = f(x)$, každý prvek det A je funkce proměnné x .

$$\frac{dA}{dx} = \sum_{i,k} \frac{\partial A}{\partial a_{ik}} \frac{da_{ik}}{dx} = \sum_{i,k} A_{ik} a'_{ik}.$$

$$\frac{dA}{dx} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots$$