

刘彦佩选集

(Selected Publications of Y.P.Liu)

第十二编

时代文献出版社

刘彦佩选集

(Selected Publications of Y.P.Liu)

第十二编



时代文献出版社

刘彦佩选集（第十二编）

作 者：刘彦佩

出版单位：时代文献出版社

编辑设计：北京时代弄潮文化发展公司

地 址：北京中关村海淀图书城25号家谱传记楼二层

电 话：010-62525116 13693651386

网 址：www.grcsw.com

印 刷：京冀印刷厂

开 本：880×1230 1/16

版 次：2016年3月第1版

书 号：ISBN 978-988-18772-5-3

定 价：全套 1978.00元（共计23编）

版权所有 翻印必究

第十二编 目录

中文文选第11卷	5481
12.1 图的生成树, 基本圈和 Betti 亏数(黄元秋)	5483
12.2 一类新图类的可定向嵌入的亏格分布(万良霞)	5488
12.3 最大面次为 6 图的上可嵌入性(柴钊)	5492
12.4 两类图的亏格分布(朱子龙)	5496
12.5 带根 2-连通 3-正则平面地图计数 (蔡俊亮, 刘效丽)	5501
12.6 5 色图包含子式 K_5^- 的一个简单证明 (陈仪朝, 王涛)	5509
12.7 平面与射影平面上近 4-正则地图的分布(任韩)	5512
12.8 4-正则图的纵横扩张优化(兰培挺)	5520
12.9 两类 4-正则图的最小折数纵横扩张(俞勤, 杨艳) ..	5524
12.10 论多面形-曲面-嵌入-地图	5529
12.11 关于图的最大亏格(董广华)	5535
12.12 几类 4-正则平面图的最小折数纵横扩张(姜伟) ...	5542
12.13 极大外平面图的不可定向强最大亏格(魏二玲) ...	5548
12.14 树类图亏格分布的单峰性(赵喜梅)	5556
12.15 图的不可定向平均亏格 II: 界的研究(陈仪朝)	5559
12.16 两类四正则图的完全亏格分布(杨艳)	5569
12.17 关于适约三角剖分计数的一个注记(蔡俊亮)	5579
运筹学导引(上篇)	5581
12.18 基本常识	5588
12.19 模型与方法	5597

12.20	线性性与单形法.....	5616
12.21	整数性与动态递推.....	5631
12.22	满足性与布尔法.....	5647
12.23	非线性与迭代法.....	5667
12.24	网络与禁用构形.....	5687
12.25	大型问题与分解法.....	5712
12.26	复杂性与演示法.....	5737
12.27	渐近性与离合法.....	5758
	纵横布局论.....	5788
12.28	基本问题.....	5794
12.29	纵图与横图.....	5813
12.30	基本方程.....	5830
12.31	布局的优化.....	5847
12.32	均衡布局.....	5860
12.33	渐近估计.....	5886

刘彦佩
中文文选
第十二卷

北京交通大学
2014

目 录

129[337]	图的生成树, 基本圈和Betti亏数	1032
130[345]	一类新图类的可定向嵌入的亏格分布	1037
131[346]	最大面次为6图的上可嵌入性	1041
132[347]	两类图的亏格分布	1045
133[348]	带根2-连通3-正则平面地图计数	1050
134[356]	5 色图包含子式 K_5^- 的一个简单证明	1058
135[357]	平面与射影平面上近4-正则地图的分布	1061
136[358]	4-正则图的纵横扩张优化	1069
137[362]	两类4-正则图的最小折数纵横扩张	1073
138[363]	论多面形-曲面-嵌入-地图	1078
139[364]	关于图的最大亏格	1084
140[365]	几类4-正则平面图的最小折数纵横扩张	1091
141[373]	极大外平面图的不可定向强最大亏格	1097
142[374]	树类图亏格分布的单峰性	1105
143[376]	图的不可定向平均亏格II: 界的研究	1108
144[377]	两类四正则图的完全亏格分布	1118
145[385]	关于适约三角剖分计数的一个注记	1128

图的生成树, 基本圈与 Betti 亏数*

黄元秋

(湖南师范大学数学系 长沙 410081)

刘彦佩

(北京交通大学数学系 北京 100044)

摘要: G 为图且 T 是 G 的一棵生成树. 记号 $\xi(G, T)$ 表示 $G \setminus E(T)$ 中边数为奇数的连通分支个数. 文献[2]称 $\xi(G) = \min_T \xi(G, T)$ 为图 G 的 Betti 亏数, 这里 $\min$ 取遍 G 的所有生成树 T . 由文献[2]知, 确定一个图 G 的最大亏格主要确定这个图的 Betti 亏数 $\xi(G)$. 该文研究与 Betti 亏数有关的图的特征结构, 得到了关于图的最大亏格的若干结果.

关键词: 生成树; Betti 亏数; 上可嵌入性; 最大亏格.

MR(2000)主题分类: 05C **中图分类号:** O157.5 **文献标识码:** A

文章编号: 1003-3998(2004)04-496-05

1 引言

本文所考虑的图均为有限, 无向图, 但可能有重边或环. 除非明确指出, 文中所指的图均为连通图. 其它未解释或说明术语和记号, 均同文献[1].

曲面是指一个紧的 2-维闭流形. 曲面分可定向曲面和不可定向曲面两类. 一个图 G 在曲面 S 上的一个 2-胞腔嵌入 $h: G \rightarrow S$ 是 G 到 S 上的一个 1-1 映射使得 $S \setminus h(G)$ 的每个连通分支与开圆盘同胚. 图 G 的最大亏格, 记为 $\gamma_M(G)$, 是指最大的整数 k 使得 G 能 2-胞腔嵌入亏格为 k 的定向曲面 S 上. 由 Euler 公式, 易得到一个图 G 的最大亏格满足: $\gamma_M(G) \leq [\frac{\beta(G)}{2}]$, 这里 $\beta(G) = |E(G)| - |V(G)| + 1$ 称为 G 的圈秩数. 若 $\gamma_M(G) = [\frac{\beta(G)}{2}]$, 则称图 G 是上可嵌入的(记号 $[X]$ 表示不超过 X 的最大整数).

G 为图且 T 是 G 的一棵生成树. 记号 $\xi(G, T)$ 表示 $G \setminus E(T)$ 中边数为奇数的连通分支个数. 文献[2]称 $\xi(G) = \min_T \xi(G, T)$ 为图 G 的 Betti 亏数, 这里 $\min$ 取遍 G 的所有生成树 T . 一个图的最大亏格及其上可嵌入性与这个图的 Betti 亏数密切相关. 文献[2]给出了如下结果.

定理 A 设 G 为图, 则: (1) $\gamma_M(G) = \frac{1}{2}(\beta(G) - \xi(G))$; (2) G 是上可嵌入的, 当且仅当 $\xi(G) \leq 1$.

收稿日期: 2001-03-01; 修订日期: 2003-05-18

* 基金项目: 国家自然科学基金(10271045)、国家自然科学基金天元青年基金(10226016)以及湖南省教育厅青年基金(02B018)资助

图的最大亏格一直是拓扑图论中主要研究的问题之一(见文献[3]). 目前, 许多图论学者对图的最大亏格以及与其相关的上可嵌入性进行了深入而广泛的研究. 关于这方面取得的一系列结果, 读者可参阅文献[5-12]. 因为一个图 G 的圈秩数 $\beta(G)$ 是一个极易确定的量, 由定理 A 可知, 确定图 G 的最大亏格主要确定其参数 $\xi(G)$. 给出与 Betti 亏数有关的图的特征结构, 是研究图的最大亏格的重要途径. 本文将给出这方面的若干结果.

2 引理, 定理及推论

设 X 为图 G 的任意边子集, $G \setminus X$ 表示从 G 中去掉 X 中所有的边后所得到的图. 记号 $c(G \setminus X)$ 表示 $G \setminus X$ 的所有连通分支的个数. 设 H 为图 G 的一个子图, $E(H, G)$ 表示 G 中一个端点在 $V(H)$ 中, 而另一个端点不在 $V(H)$ 中的边组成的集合. 对任意集合 X , 总是用 $|X|$ 表示 X 中元素个数.

文献[12]给出了如下结果.

引理 1^[12] 设 G 为图, 若 $\xi(G) \geq 2$, 则存在 G 的边子集 A 满足下列性质

(i) $c(G \setminus A) \geq 2$, 且对 $G \setminus A$ 的任意连通分支 F , $\beta(F)$ 为奇数;

(ii) 对 $G \setminus A$ 的任意连通分支 F , F 是 G 的一个点导出子图;

(iii) $|A| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l |E(F_i, G)|$, 这里 $F_i, 1 \leq i \leq l$, 为 $G \setminus A$ 的所有连通分支;

(iv) $\xi(G) = 2c(G \setminus A) - |A| - 1$.

设 T 为图 G 的任意一棵生成树, H 为 G 的一个子图, $T \cap H$ 表示如下一个图: 其点集是 $V(H) = V(H) \cap V(T)$, 其边集是 $E(T) \cap E(H)$. 显然, $T \cap H$ 既是 T 的一个子图, 也是 H 的一个生成子图, 但不一定连通, 因而是 H 的一棵生成树.

定理 2 设 G 为图且 $\xi(G) = k \geq 2$, 即 G 不是上可嵌入的. 对 G 的任意生成树 T , 则存在 G 的 k 个顶点互不相交的, 连通的点导出子图 $H_1, H_2, \dots, H_k$ 使得, 对每个 $1 \leq i \leq k$,

(a) $\beta(H_i)$ 为奇数;

(b) $T \cap H_i$ 是连通的, 即为 H_i 的一棵生成树, 且 $E(H_i, G) \subseteq E(T)$.

证 因为 $\xi(G) \geq 2$, 由引理 1 存在 G 的边子集 A 使得 $G \setminus A$ 满足引理 1 的所有性质 (i) - (iv). 设 $F_1, F_2, \dots, F_l$ 为 $G \setminus A$ 的所有连通分支, 其中 $l = c(G \setminus A)$. 由引理 1 (i), $l \geq 2$. 由引理 1 (i) 和 (ii), 每个 $F_i (1 \leq i \leq l)$ 是 G 的点导出子图, 且 $\beta(F_i)$ 为奇数. 假设 T 为 G 的任意一棵生成树, 则对每个 $1 \leq i \leq l$, $T \cap F_i$ 是 F_i 的一棵生成树, 且设这棵树是由 a_i 棵不同的树 $T_i^{(1)}, T_i^{(2)}, \dots, T_i^{(a_i)}$ 组成. 显然 $a_i \geq 1$. 而且有 $\bigcup_{j=1}^{a_i} V(T_i^{(j)}) = V(F_i)$ 以及

$\sum_{j=1}^{a_i} |V(T_i^{(j)})| = |V(F_i)|$. 另外, 我们有

$$|E(T \cap F_i)| = \sum_{j=1}^{a_i} |E(T_i^{(j)})| = \sum_{j=1}^{a_i} (|V(T_i^{(j)})| - 1) = |V(F_i)| - a_i, \quad (1)$$

对每个 $1 \leq i \leq l$, 显然有

$$|E(F_i, G)| = |E(T) \cap E(F_i, G)| + |E(F_i, G) \setminus (E(T) \cap E(F_i, G))|. \quad (2)$$

我们先将证明如下等式

$$\sum_{i=1}^l |E(T) \cap E(F_i, G)| = 2|E(T) \cap A|. \quad (3)$$

因为每个 $F_i (1 \leq i \leq l)$ 为 G 的点导出子图, 所以 $A = \bigcup_{i=1}^l E(F_i, G)$, 从而有

$$\bigcup_{i=1}^l (E(T) \cap E(F_i, G)) = E(T) \cap (\bigcup_{i=1}^l E(F_i, G)) = E(T) \cap A.$$

另外, 对任意 $e \in E(T) \cap E(F_i, G)$, 由 $E(F_i, G)$ 的含义, 恰好还存在另一个 $i' (1 \leq i' \leq l, i \neq i')$ 使得 $e \in E(T) \cap E(F_{i'}, G)$. 这表明 e 在 (3) 式左边的和式中恰好贡献 2, 因此 (3) 式中号成立.

由引理 1(ii), 对任意边 $e \in E(T)$, 则或者 $e \in A$ 或者 $e \in E(T \cap F_i) (1 \leq i \leq l)$, 即有

$$|E(T)| = |E(T) \cap A| + \sum_{i=1}^l |E(T \cap F_i)|, \text{ 从而我们有}$$

$$\begin{aligned} |E(T) \cap A| &= |E(T)| - \sum_{i=1}^l |E(T \cap F_i)| \\ &= (|V(G)| - 1) - \sum_{i=1}^l (|V(F_i)| - a_i) \\ &\quad (\text{因为 } T \text{ 是 } G \text{ 的生成树以及 (1) 式}) \\ &= \sum_{i=1}^l a_i - 1 \quad (\text{因为 } \sum_{i=1}^l |V(F_i)| = |V(G)|). \end{aligned}$$

再结合上面 (3) 式, 即可得到

$$\sum_{i=1}^l |E(T) \cap E(F_i, G)| = 2 \sum_{i=1}^l a_i - 2. \quad (4)$$

到此, 由引理 1(iii), 我们有

$$\begin{aligned} |A| &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l |E(F_i, G)| \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l |E(T) \cap E(F_i, G)| + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l |E(F_i, G) \setminus (E(T) \cap E(F_i, G))| \quad (\text{由 (2) 式}) \\ &= \sum_{i=1}^l \left\{ a_i + \frac{1}{2} |E(F_i, G) \setminus (E(T) \cap E(F_i, G))| \right\} - 1 \quad (\text{由 (4) 式以及合并整理}). \end{aligned}$$

对任意 $1 \leq i \leq l$, 令 $b_i = a_i + \frac{1}{2} |E(F_i, G) \setminus (E(T) \cap E(F_i, G))|$. 注意到由 $a_i \geq 1$, 则有 $b_i \geq 1 (1 \leq i \leq l)$. 下面我们将证明: 在 $b_1, b_2, \dots, b_l$ 中, 至少有 $\xi(G)$ 个, 它们的值均为 1, 不妨是 $b_1 = b_2 = \dots = b_{\xi(G)} = 1$. 若不然, 则我们可得到

$$|A| = \sum_{i=1}^l b_i - 1 \geq \xi(G) - 1 + 2(l - (\xi(G) - 1)) - 1 = 2l - \xi(G).$$

然而由引理 1(iv), $|A| = 2l - \xi(G) - 1$. 这是一个矛盾. 由 $b_i = 1 (1 \leq i \leq \xi(G))$, 这表明: $a_i = 1$ 且 $|E(F_i, G) \setminus (E(T) \cap E(F_i, G))| = 0$. 由 $a_i = 1$ 以及 a_i 的含义, 则有 $T \cap F_i$ 是连通的, 即为 F_i 的一棵生成树. 由 $|E(F_i, G) \setminus (E(T) \cap E(F_i, G))| = 0$, 则有 $E(F_i, G) \subseteq E(T) \cap E(F_i, G)$, 进而 $E(F_i, G) \subseteq E(T)$. 再注意到前面所述的 F_i 的性质. 因此, 令 $H_i = F_i, 1 \leq i \leq \xi(G)$, 则 $H_1, H_2, \dots, H_{\xi(G)}$ 为定理中所要求的, 从而定理获证. $\square$

注记 在上述定理 2 中, 对于给定的 G 的生成树 T 以及满足定理 2 要求的这组子图 $H_1, H_2, \dots, H_{\xi(G)}$, 我们不难得到如下事实: 对于每个 $H_i (1 \leq i \leq k = \xi(G))$, 至少存在 H_i 的一个子图, 它是 $G \setminus E(T)$ 的一个边数为奇数的连通分支, 因此 $\xi(G, T) \geq \xi(G)$.

一个图中的圈是这个图的一条点不重复的闭途径. 两个圈称为不相交的, 如果它们没

有公共点. 设 T 为图 G 的一棵生成树, 对任意边 $e \in E(G) \setminus E(T)$, $T+e$ 中含有唯一圈, 记为 $C_T(e)$, 且称之为 G 关于 T 的一个基本圈. 两个相交的基本圈的公共部分是一条(简单)路.

推论 3 设 G 为图, 若 G 中存在一棵生成树 T , 使得对于任意两条不同的边 $e, f \in E(G) \setminus E(T)$, 圈 $C_T(e)$ 与 $C_T(f)$ 是相交的, 则 G 是上可嵌入的.

证 反证法. 假设 G 不是上可嵌入的, 即 $\xi(G) = k \geq 2$. 由定理 2, 至少存在 G 的两个点不相交的导出子图 H_1 和 H_2 满足定理 2 中的 (a) 和 (b). 从而, 不难看出分别存在边 $e_i \in E(H_i)$ ($i=1, 2$) 使得 $e_i \notin E(T)$, 而且圈 $C_T(e_i)$ 是 H_i 中的子图. 因此 $C_T(e_1)$ 和 $C_T(e_2)$ 是不相交的. 这与推论的条件矛盾. $\square$

图 G 的一棵生成树 T 称为最优生成树, 如果 $\xi(G) = \xi(G, T)$.

推论 4 在定理 2 的条件下, 若 T 为图 G 的一棵最优生成树, 则 G 中恰好只存在 $\xi(G)$ 个互不相交的, 连通的导出子图 H_i ($1 \leq i \leq \xi(G)$) 满足定理 2 中的 (a) 和 (b).

证 假设 G 中存在 m 个互不相交的, 连通的导出子图 $H_1, H_2, \dots, H_m$ 满足定理 2 中的 (a) 和 (b), 这里 $m > \xi(G)$. 由上述注记, 则有 $\xi(G, T) \geq m$. 因为 T 为 G 的最优生成树, 所以 $\xi(G) = \xi(G, T) \geq m > \xi(G)$. 显然是一个矛盾! $\square$

设 T 为图 G 的一棵生成树. 对于 G 中的任意两点 x 和 y (不排除 $x=y$), T 中连接 x 和 y 的唯一路记为 $P_T(x, y)$. 我们称图 G' 是由 G 加入一对关于 T 相邻的边 e' 和 e'' 所得到的图, 如果满足条件: 设加入的边 e' 和 e'' 的两个端点分别为 u 和 v , 以及 s 和 t , 则路 $P_T(u, v)$ 和 $P_T(s, t)$ 是相交的. 此时易知, T 也是 G' 的生成树, 而且 G' 中的基本圈 $C_T(e')$ 和 $C_T(e'')$ 是相交的.

文献[2]给出如下结果: 向一个图 G 中加入一对相邻边 e_1 和 e_2 (即, e_1 和 e_2 至少有一个公共端点) 后所得到的图 G' 的最大亏格至少增加 1; 特别地, 若 G 是上可嵌入的, 则 G' 也是上可嵌入的. 下面我们用“加入关于某棵生成树相邻的边对”取代条件“加入相邻的边对”, 从而推广上述结论.

推论 5 设 T 为一个图 G 的一棵最优生成树. 记 G' 是在 G 中加入一对关于 T 相邻的边 e' 和 e'' 所得到的图. 则 $\xi(G') \leq \xi(G)$, 从而 $\gamma_M(G') \geq \gamma_M(G) + 1$; 特别地, 若 G 是上可嵌入的, 则 G' 也是上可嵌入的.

证 首先我们注意到如下事实: $\beta(G') = \beta(G) + 2$, T 也是 G' 的一棵生成树, 而且 G' 中关于 T 的基本圈 $C_T(e')$ 和 $C_T(e'')$ 是相交的. 只要证得 $\xi(G') \leq \xi(G)$, 则推论的其余结论可直接由定理 A 得到. 下证 $\xi(G') \leq \xi(G)$. 由定义, 一个图的 Betti 亏数与这个图的圈秩数具有相同的奇偶性. 因为 $\beta(G')$ 与 $\beta(G)$ 同奇偶, 所以 $\xi(G')$ 与 $\xi(G)$ 同奇偶. 现假设 $\xi(G') \not\leq \xi(G)$, 则有 $\xi(G') \geq \xi(G) + 2 \geq 2$. 取 G' 中的生成树 T 同时运用定理 2, 则 G' 中存在 $\xi(G')$ 个互不相交的, 连通的导出子图 $H_1, H_2, \dots, H_{\xi(G')}$ 满足定理 2 中的 (a) 和 (b). 若 e' 和 e'' 中最多只有一个属于某个 H_i , 或者 e' 和 e'' 同时属于某个 H_i , 由定理 2 中的 (a) 和 (b), 我们有

$$\xi(G, T) \geq |\{H_i: 1 \leq i \leq \xi(G) \text{ 且 } H_i \text{ 既不含边 } e' \text{ 也不含边 } e''\}| \geq \xi(G) - 1.$$

因 T 为 G 的最优生成树, 即 $\xi(G) = \xi(G, T)$, 由此得到一个矛盾的式子: $\xi(G) \geq \xi(G) - 1$. 若 e' 和 e'' 分别属于某两个不同的 H_i 和 H_j , 由于 $e', e'' \notin E(T)$, 以及定理 2 中 (b), 则 G' 中关于生成树 T 的基本圈 $C_T(e')$ 和 $C_T(e'')$ 是不相交的, 这与前面所述的事实矛盾. 因此, $\xi(G') \leq \xi(G)$. 这样推论获证. $\square$

推论 6^[4] 设 G 为图, 则 $\gamma_M(G) = 0$, 当且仅当 G 中任意两个圈不相交.

证 若 G 中任意两个圈是不相交的, 则对 G 的任意生成树 T , 由定义 $\xi(G, T) = \beta(G)$. 由 T 的任意性, $\xi(G) = \beta(G)$, 进而由定理 A, $\gamma_M(G) = \frac{1}{2}(\beta(G) - \xi(G)) = 0$. 若 $\gamma_M(G) = 0$, 假设 G 中存在两个相交的圈 C_1 和 C_2 , 从而一定存在两个相交圈 C' 和 C'' 使得它们相交的公共部分是一条路. 因此, 存在两条不同的边 $e' \in E(C')$ 及 $e'' \in E(C'')$ 使得 $C' \cup C'' \setminus \{e', e''\}$ 是一棵树 T' (不一定是 G 的生成树). 现把 T' 扩充为 G 的一棵生成树 T . 记 $G' = T + \{e', e''\}$. 由 T 的得到, G' 可看成在 T 加入一对关于 T 相交的边 e' 和 e'' 所得到的图. 运用推论 5, $\gamma_M(G') \geq \gamma_M(T) + 1 = 1$. 又因为 G' 为 G 的子图, 由文献[2], $\gamma_M(G) \geq \gamma_M(G') \geq 1$. 这与 $\gamma_M(G) = 0$ 矛盾, 因此 G 中任意两个圈不相交. $\square$

参 考 文 献

- [1] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications. London; Macmillan and New York; Elsevier, 1979
- [2] 刘彦佩. 图的可嵌入性理论. 北京: 科学出版社, 1994
- [3] Gross J L, Tucker T W. Topological Graph Theory. New York; Wiley, 1987
- [4] Xiong N H. How to determine the maximum genus of a graph. J Combinatorial Theory Series B, 1979, 26: 217-225
- [5] Nebesky L. N_2 -locally connected graphs and their upper embeddability. J Czechoslovak Math, 1991, 41: 731-735
- [6] Skoviera M. The decay number and the maximum genus of a graph. Math Slovaca, 1992, 42(4): 391-406
- [7] Stahl S. On the number of maximum genus embeddings of almost all graphs. Euro J Combinatorics, 1992, 13: 119-126
- [8] Chen J, Archdeacon D, Gross J L. Maximum genus and connectivity. Discrete Math, 1996, 149: 11-29
- [9] Hunglin Fu, Minchu Tsai. The maximum genus of diameter three graphs. Australasian J Combinatorics, 1996, 14: 187-197
- [10] Yuanqiu Huang, Yanpei Liu. Maximum genus and maximum nonseparating independent set of a 3-regular graph. Discrete Math, 1997, 176: 149-158
- [11] Yuanqiu Huang, Yanpei Liu. Maximum genus and girth of graphs. Discrete Math, 1999, 194: 253-259
- [12] 黄元秋. 与最小度有关的图的最大亏格的下界. 应用数学学报, 1999, 22(2): 193-198

Spanning Trees, Basic Cycles and Betti Deficiency of a Graph

Huang Yuanqiu

(Department of Mathematics, Normal University of Hunan, Changsha 410081)

Liu Yanpei

(Department of Mathematics, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044)

Abstract: Let G be a graph and T be a spanning tree of it. The sign $\xi(G, T)$ denotes the number of components of $G \setminus E(T)$ with odd number of edges, and it is known that the value $\xi(G) = \min_T \xi(G, T)$ is defined as Betti deficiency of G , where min is taken over all spanning trees of G . In this paper the authors study the characteristic structure of a graph connecting to its Betti deficiency, and obtain some new results on the maximum genus of a graph.

Key words: Spanning tree; Betti Deficiency; Upper Embeddability; Maximum Genus.

MR(2000) Subject Classification: 05C

一类新图类的可定向嵌入的亏格分布

万良霞, 刘彦佩

(北京交通大学 理学院, 北京 100044)

摘要:在刘彦佩提出的联树法的基础上,通过分类一类新图类的可定向嵌入曲面求出了这类图类的可定向嵌入的亏格分布.所用方法与国际上现有方法不同,且易于推广,所考虑的非平面图类比已有计算图的嵌入亏格分布文献中的非平面图更复杂.

关键词:亏格分布;嵌入分布;联树;曲面;亏格

中图分类号:O175.5 **文献标识码:**A

Genus Distribution of the Orientable Embeddings
for A Type of New Graphs

WAN Liang-xia, LIU Yan-pei

(School of Sciences, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: At the basis of joint trees introduced by Yanpei Liu, by using the method which sorts the embedding surfaces of these graphs, the genus distribution of the orientable embeddings for a type of new graphs are provided. The method is distinct from these methods used in the papers published to calculate the genus distribution of the embeddings for a graph. Moreover, the non-planar graphs considered are more complex than those non-planar graphs whose embedding distribution by genus have been published until now. This method can be used to calculate the genus distribution of the embeddings for other graphs.

Key words: genus distribution; embedding distribution; joint tree; surface; genus

1 问题的提出

自从图的嵌入的亏格分布^[1]提出以来, Furst, et al, McGeoch, Tesar, Gross 及本文作者分别得到了 closed-end ladders 和 cobblestone paths^[2], circular ladders 和 Möbius ladders^[3], Ringel ladders^[4], Bouquets of circles^[5] 及某种非平面图^[6] 的可定向嵌入的亏格分布. 在已经出版的文献中, 用来求图的嵌入的亏格分布的方法主要有组合的方法、Jackson 公式、矩阵法^[7]. 刘彦佩^[8] 提出了图的联树, 建立了图的联树与嵌入的对应关系, 为求图的嵌入的亏格分布提供了更有效的工具. 本文作者在联树法的基础上,

通过运用曲面分类的方法, 计算了一些曲面集的亏格分布, 从而得到了一类新图类的嵌入的亏格分布. 其中考虑的非平面图比所引文献中的非平面图更复杂. 此方法可以用于求其它图类的亏格分布.

本文所考虑的曲面是紧的 2-维闭流形, 图是连通图, 嵌入是图在曲面上的可定向胞腔嵌入. 一个线性序 $S = abc \cdots z$ 是指一个具有关系 $a < b < c < \cdots < z$ 的字母序列. S 的倒序表示为 $\bar{S}$ 且 $\bar{S} = z \cdots cba$. 设 S_1 是线性序, 若对任意的 $a \in S_1$ 有 $a \in S$ 且对 S_1 中任意的 $a < b$ 在 S 中也成立, 则 S_1 称为 S 的子序, 记为 $S_1 \subseteq S$. 显然, 空序是任意线性序的子序. 由 S 中所有不属于 S_1 的字母构成的 S 的一个

收稿日期: 2005-10-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (60373030)

作者简介: 万良霞 (1973—), 女, 河南开封人, 博士生. email: wanliangxia@126.com

刘彦佩 (1939—), 男, 天津市人, 教授, 博士生导师.

子序称为 S_1 的补序, 记为 $\bar{S}_1$. 字母 a 和 a^- 是互逆的字母. 一个曲面可被视为一个具有下面性质的一个序列 $S^{[9]}$: 如果 $a \in S$, 那么 $a^- \in S$ 且 a 和 a^- 在 S 中恰出现一次. 令 $o(S)$ 是曲面 S 的亏格. 设 $\mathcal{S}$ 是曲面集, AB 是曲面且 $e \in AB$. 一个定义在 S 上的等价关系 $\sim^{[9]}$ 被下面的运算决定:

运算 1 $AB \sim (Ae)(e^-B)$;

运算 2 $Ae_1e_2Be_2^-e_1^- \sim AeBe^- = Ae^-Be$;

运算 3 $Aee^-B \sim AB$. 其中 $AB \neq \emptyset$.

因此每一个曲面等价于平面和亏格为 i 的标准

曲面 $a_0a_0^-$ 和 $\prod_{k=1}^i a_kb_k a_k^- b_k^-^{[9]}$ 中之一. 其中, $i \geq 1$ 且 $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots, a_i, b_i$ 是不同的字母.

设 $G = (V, E)$ 为图, u 是 G 的一个顶点, u 处的一个旋 σ_u 是与 u 关联的边的一个循环置换. 设 σ 是 G 的一个旋, 则 $\sigma = \prod_{u \in V(G)} \sigma_u$. 设 ρ_u 是 u 的度, 则 G 有 $\prod_{u \in V(G)} (\rho_u - 1)!$ 嵌入. 设 i 为非负整数, $g_i(G)$ 为 G 的亏格为 i 的不同嵌入的数目, G 的嵌入的亏格分布^[1]是: $g_0(G), g_1(G), g_2(G), \dots$. G 的嵌入分布多项式^[1]是

$$f_G(x) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i(G) x^i.$$

设 M 是一个曲面集, $g_i(M)$ 为 M 中亏格为 i 的不同曲面的数目, M 的亏格分布是: $g_0(M), g_1(M), g_2(M), \dots$, M 的亏格分布多项式是

$$f_M(x) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i(M) x^i.$$

2 引理

设 T 为图 G 的一棵支撑树, 把 G 的每一条余树边 e 分成分别带有字母 e 和 e^- 的两条半边, 则得 G 的一个联树 $\tilde{T}^{[8]}$.

引理 1^[8] 设 σ_1 和 σ_2 是 G 的两个不同的旋, 则嵌入 G_{σ_1} 和 G_{σ_2} , 也就是 $\tilde{T}_{\sigma_1}$ 和 $\tilde{T}_{\sigma_2}$ 不同胚.

引理 2^[8] 设 T 和 T^1 是 G 的两个不同的支撑树, $\sum$ 是 G 的旋的集合. 则在 $(\sum, \tilde{T})$ 和 $(\sum, \tilde{T}^1)$ 之间存在一个双射. 其中

$$(\sum, \tilde{T}) = \{\tilde{T}_\sigma \mid \sigma \in \sum\},$$

及 $(\sum, \tilde{T}^1) = \{\tilde{T}_\sigma^1 \mid \sigma \in \sum\}.$

设 $\tilde{T}_\sigma$ 是 G 的一个联树, 由所有的半边字母组成的一个曲面 P_σ 被称为 G 的一个嵌入曲面.

引理 3^[6] 设 A, B, C, D 是线性序, $ABCD$ 是曲面且 $a, b, c \in ABCD$. 则:

$$(1) aABa^-CD \sim aBAa^-CD \sim aABa^-DC;$$

$$(2) AaBa^-bCb^-cDc^- \sim aBa^-AbCb^-cDc^- \sim aBa^-bCb^-AcDc^-;$$

$$(3) AaBa^-bCb^-cDc^- \sim BaAa^-bCb^-cDc^- \sim CaAa^-bBb^-cDc^- \sim DaAa^-bBb^-cCc^-.$$

证明 由运算 1, 2, 3 易得.

引理 4^[9] 设 A, B, C, D, E 是线性序, $ABCDE$ 是曲面且 $a, b \in ABCDE$. 则

$$AaBbCa^-Db^-E \sim ADCBEaba^-b^-.$$

引理 5^[8] 设 S_1, S_2 是曲面且 $a, b \in S_2$. 若 $S_1 \sim S_2aba^-b^-$, 则 $o(S_1) = o(S_2) + 1$.

3 H_j^i 的亏格分布

设 n 是一个正整数, $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ 是不同的字母, 且对于

$$1 \leq l \leq n, A_l = a_l b_l, B_l = b_l^- a_l^-,$$

是线性序. 为表示方便, 设

$$\bigotimes_{i=1}^n Y_i = Y_1 Y_2 Y_3 \cdots Y_n.$$

其中 Y_i 是线性序. 设

$$H_1^1 = |X_1^1 X_2^1 X_3^1 X_4^1|,$$

$$H_2^1 = |X_1^1 X_2^1 X_4^1 X_3^1|,$$

$$H_3^1 = |X_1^1 X_3^1 X_2^1 X_4^1|,$$

$$H_4^1 = |aX_1^1 X_2^1 a^- X_3^1 X_4^1|,$$

$$H_5^1 = |aX_1^1 X_3^1 a^- X_2^1 X_4^1|,$$

$$H_6^1 = |aX_1^1 X_4^1 a^- X_2^1 X_3^1|,$$

$$H_7^1 = |aX_2^1 a^- X_1^1 X_3^1 X_4^1|,$$

$$H_8^1 = |X_1^1 X_2^1 aX_3^1 a^- bX_4^1 b^-|,$$

$$H_9^1 = |X_1^1 X_3^1 aX_2^1 a^- bX_4^1 b^-|,$$

$$H_{10}^1 = |X_1^1 X_4^1 aX_2^1 a^- bX_3^1 b^-|,$$

$$H_{11}^1 = |X_1^1 aX_2^1 a^- bX_3^1 bc^- X_4^1 c^-|,$$

$$H_{12}^1 = |X_1^1 X_4^1 X_2^1 X_3^1|,$$

$$H_{13}^1 = |aX_1^1 a^- X_2^1 X_3^1 X_4^1|,$$

$$H_{14}^1 = |aX_3^1 a^- X_1^1 X_4^1 X_2^1|,$$

$$H_{15}^1 = |aX_4^1 a^- X_3^1 X_2^1 X_1^1|,$$

$$H_{16}^1 = |X_3^1 X_4^1 aX_1^1 a^- bX_2^1 b^-|.$$

其中

$$X_1^1 = \bigotimes_{l=1}^n \bar{C}_l, X_2^1 = \bigotimes_{l=1}^n C_l,$$

$$X_3^1 = \bigotimes_{l=1}^n D_l, X_4^1 = \bigotimes_{l=1}^n \bar{D}_l,$$

对任意的整数 $l (1 \leq l \leq n)$ 有 $C_l \subseteq A_l, D_l \subseteq B_l$.

定理 1 设 $g_j(n)$ 表示 H_j^i 中亏格为 i 的曲面的数目, $x_j = g_j(n-1)$ 且设 $f_{H_j^i}(x) = 1$. 则

$$g_i(n) = 4x_{i_7} + 4x_{i_8} + 4x_{(i-1)_1} + 4x_{(i-1)_2},$$

当 $j=1$;

$$2x_{i_2} + 6x_{i_4} + 8x_{(i-1)_2}, \quad \text{当 } j=2;$$

$$2x_{i_5} + 4x_{i_7} + 4x_{i_9} + 2x_{(i-1)_2} + 4x_{(i-1)_3},$$

当 $j=3, 12$;

$$8x_{(i-1)_2} + 8x_{(i-1)_4}, \quad \text{当 } j=4;$$

$$2x_{i_5} + 6x_{(i-1)_2} + 8x_{(i-1)_5}, \quad \text{当 } j=5;$$

$$2x_{i_{10}} + 2x_{i_{11}} + 2x_{(i-1)_5} + 2x_{(i-1)_6} + 8x_{(i-1)_7},$$

当 $j=6$;

$$2x_{i_8} + 2x_{(i-1)_1} + 2x_{(i-1)_2} + 2x_{(i-1)_4} + 8x_{(i-1)_7},$$

当 $j=7, 13, 14, 15$;

$$4x_{(i-1)_8} + 4x_{(i-1)_7} + 4x_{(i-2)_1} + 4x_{(i-2)_2},$$

当 $j=8, 16$;

$$2x_{(i-1)_5} + 4x_{(i-1)_7} + 4x_{(i-1)_9} + 2x_{(i-2)_2} + 4x_{(i-2)_3},$$

当 $j=9$;

$$x_{i_{11}} + x_{(i-1)_6} + 2x_{(i-1)_8} + 2x_{(i-1)_9} + 4x_{(i-1)_{10}} +$$

$$2x_{(i-2)_1} + 2x_{(i-2)_2} + x_{(i-2)_3} + x_{(i-2)_7},$$

当 $j=10$;

$$2x_{(i-1)_{10}} + 2x_{(i-1)_{11}} + 2x_{(i-2)_5} + 2x_{(i-2)_6} + 8x_{(i-2)_7},$$

当 $j=11$.

证明 根据 H_1^n 的定义知

$$H_1^{n-1} = \{X_1^{n-1}X_2^{n-1}X_3^{n-1}X_4^{n-1}\}.$$

其中 $X_1^{n-1} = \bigoplus_{l=n-1}^1 \bar{C}_l, X_2^{n-1} = \bigoplus_{l=1}^{n-1} C_l,$

$$X_3^{n-1} = \bigoplus_{l=1}^{n-1} D_l, X_4^{n-1} = \bigoplus_{l=n-1}^1 \bar{D}_l,$$

且对任意的整数

$$l(1 \leq l \leq n-1) \text{ 有 } C_l \subseteq A_l, D_l \subseteq B_l.$$

因此, H_1^n 由下面的 16 种曲面集构成, 这些曲面集按从上到下依次记为

$$F_1 = \{X_1^{n-1}X_2^{n-1}a_nb_nX_3^{n-1}b_na_nX_4^{n-1}\},$$

$$F_2 = \{X_1^{n-1}X_2^{n-1}a_nb_nX_3^{n-1}b_na_nX_4^{n-1}\},$$

$$F_3 = \{a_nX_1^{n-1}X_2^{n-1}b_nX_3^{n-1}b_na_nX_4^{n-1}\},$$

$$F_4 = \{a_nX_1^{n-1}X_2^{n-1}b_nX_3^{n-1}b_na_nX_4^{n-1}\},$$

$$F_5 = \{b_nX_1^{n-1}X_2^{n-1}a_nX_3^{n-1}a_nb_nX_4^{n-1}\},$$

$$F_6 = \{b_nX_1^{n-1}X_2^{n-1}a_nX_3^{n-1}a_nb_nX_4^{n-1}\},$$

$$F_7 = \{b_na_nX_1^{n-1}X_2^{n-1}X_3^{n-1}a_nb_nX_4^{n-1}\},$$

$$F_8 = \{b_na_nX_1^{n-1}X_2^{n-1}X_3^{n-1}a_nb_nX_4^{n-1}\},$$

$$F_9 = \{X_1^{n-1}X_2^{n-1}a_nb_nX_3^{n-1}a_nb_nX_4^{n-1}\},$$

$$F_{10} = \{b_na_nX_1^{n-1}X_2^{n-1}X_3^{n-1}b_na_nX_4^{n-1}\},$$

$$F_{11} = \{X_1^{n-1}X_2^{n-1}a_nb_nX_3^{n-1}a_nb_nX_4^{n-1}\},$$

$$F_{12} = \{b_na_nX_1^{n-1}X_2^{n-1}X_3^{n-1}b_na_nX_4^{n-1}\},$$

$$F_{13} = \{b_nX_1^{n-1}X_2^{n-1}a_nX_3^{n-1}b_na_nX_4^{n-1}\},$$

$$F_{14} = \{a_nX_1^{n-1}X_2^{n-1}b_nX_3^{n-1}a_nb_nX_4^{n-1}\},$$

$$F_{15} = \{b_nX_1^{n-1}X_2^{n-1}a_nX_3^{n-1}b_na_nX_4^{n-1}\},$$

$$F_{16} = \{a_nX_1^{n-1}X_2^{n-1}b_nX_3^{n-1}a_nb_nX_4^{n-1}\}.$$

令 $R_1^{n-1} = \bigoplus_{l=n-1}^1 C_l', R_2^{n-1} = \bigoplus_{l=1}^{n-1} \bar{C}_l',$

$$R_3^{n-1} = \bigoplus_{l=1}^{n-1} \bar{D}_l', R_4^{n-1} = \bigoplus_{l=n-1}^1 D_l'.$$

其中, $C_l' \subseteq b_l a_l, D_l' \subseteq a_l b_l$ 且

若 $a_l \in C_l$, 则 $b_l \in C_l'$;

若 $b_l \in C_l$, 则 $a_l \in C_l'$;

若 $a_l \in D_l$, 则 $b_l \in C_l'$;

若 $b_l \in D_l$, 则 $a_l \in D_l'$.

在 F_1 与 H_{15}^{n-1} 之间存在一个双射 ϕ 使得

$$\phi(X_1^{n-1}X_2^{n-1}a_nb_nX_3^{n-1}b_na_nX_4^{n-1}) = aR_4^{n-1}a^-R_3^{n-1}R_2^{n-1}R_1^{n-1}.$$

由运算 2 得

$$o(aX_3^{n-1}a^-X_4^{n-1}X_1^{n-1}X_2^{n-1}) =$$

$$aR_4^{n-1}a^-R_3^{n-1}R_2^{n-1}R_1^{n-1},$$

由于

$$X_1^{n-1}X_2^{n-1}a_nb_nX_3^{n-1}b_na_nX_4^{n-1} \sim$$

$$X_1^{n-1}X_2^{n-1}aX_3^{n-1}a^-X_4^{n-1} =$$

$$aX_3^{n-1}a^-X_4^{n-1}X_1^{n-1}X_2^{n-1}.$$

则得

$$o(X_1^{n-1}X_2^{n-1}a_nb_nX_3^{n-1}b_na_nX_4^{n-1}) =$$

$$o(aX_3^{n-1}a^-X_4^{n-1}X_1^{n-1}X_2^{n-1}) =$$

$$aR_4^{n-1}a^-R_3^{n-1}R_2^{n-1}R_1^{n-1}.$$

因此

$$g_i(F_1) = g_{i_{15}}(n-1).$$

用类似的证明方法可得 $F_k(2 \leq k \leq 16)$ 与 $H_j^n(1 \leq j \leq 16)$ 的关系式, 则有

$$\begin{aligned} g_{i_1}(n) &= 4g_{i_8}(n-1) + 2g_{i_{14}}(n-1) + \\ &\quad 2g_{i_{15}}(n-1) + 4g_{(i-1)_1}(n-1) + \\ &\quad 4g_{(i-1)_2}(n-1) \end{aligned} \quad (1)$$

用与式(1)类似的证明方法可得

$$g_j(n)(2 \leq j \leq 16).$$

然后用归纳法证明

$$g_{i_{12}}(n) = g_{i_3}(n), g_{i_{13}}(n) = g_{i_7}(n)$$

及

$$g_{i_{16}}(n) = g_{i_8}(n).$$

经整理可得此公式成立.

4 一类图的亏格分布

任给一个图 G_0 和一个正整数 n , 在它的两条

边 uu' 和 vv' 上分别依次增加点

$$u_1, u_1', u_2, u_2', u_3, u_3', \dots, u_n, u_n',$$

和 $v_1', v_1, v_2', v_2, v_3', v_3, \dots, v_n', v_n,$

然后分别用 $a_l, b_l (1 \leq l \leq n)$ 表示边 $u_l v_l, u_l' v_l' (a_l$ 不是平行边), 则得图 G_n . 易知当 uu' 和 vv' 在同一个圈上时, $G_n (n \geq 3)$ 是非平面图.

定理 2 设 $g_i(G_n)$ 表示 G_n 的亏格为 i 的嵌入的数目, $g_i(n)$ 表示 $H_j^n (1 \leq j \leq 16)$ 中亏格为 i 的曲面的数目. 则 $g_i(G_n)$ 是 $g_r(n) (0 \leq r \leq i)$ 的线性组合.

证明 对于上述的 G_n , 选择一棵支撑树使得 $uu_1, u_n' u', vv_1', v_n v', u_l u_l', u_k' u_{k+1}, v_l' v_l, v_k v_{k+1} (1 \leq l \leq n, 1 \leq k \leq n-1)$ 是树边. 令在 G_n 的联树中每一个顶点有顺时针的旋, 则 G_n 的嵌入曲面形如

$$E_1 X_1 E_2 X_2 E_3 X_3 E_4 X_4 E_5.$$

其中, $E_s (1 \leq s \leq 5)$ 是线性序, $E_1 E_2 E_3 E_4 E_5$ 是 G_0 的嵌入曲面. 设

$$o(E_1 E_2 E_3 E_4 E_5) = p,$$

则 $o(E_1 X_1 E_2 X_2 E_3 X_3 E_4 X_4 E_5) =$

$$o(L_1 X_1 L_2 X_2 L_3 X_3 L_4 X_4) + p.$$

其中 $o(L_1 L_2 L_3 L_4) = 0$. 利用运算 2, 3 及引理 3 可得

$$o(L_1 X_1 L_2 X_2 L_3 X_3 L_4 X_4) = o(S_0),$$

其中 $S_0 \in H_j^n (1 \leq j \leq 16)$. 最后利用定理 1 可求出 G_n 的亏格分布.

例 G_0 和 G_3 如图 1 所示.

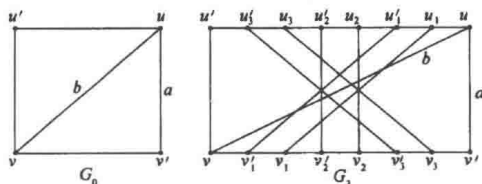


图 1 G_0 和 G_3

Fig. 1 G_0 and G_3

在 G_n 中令 $a, b, a_l, b_l (1 \leq l \leq n)$ 是余树边. 令 G_n 的每一棵联树在其顶点处有顺时针循环序. 考虑到 a, b 在顶点 u, v 处不同的旋, G_n 的嵌入曲面集由下面 4 个集合组成:

$$\{X_1^+ b a X_2^- b^- X_3^+ a^- X_4^+\},$$

$$\{X_1^+ b a X_2^+ X_3^+ a^- X_4^+ b^-\},$$

$$\{X_1^+ a b X_2^- b^- X_3^+ a^- X_4^+\},$$

$$\{X_1^+ a b X_2^+ X_3^+ a^- X_4^+ b^-\}.$$

其中, $X_1^+, X_2^-, X_3^+, X_4^+$ 如第 3 节所述. 用与式 (1) 同样的证明方法可得

$$g_i(G_n) = 2g_{i_{10}}(n) + g_{(i-1)_3}(n) + g_{(i-1)_{12}}(n).$$

由定理 1 得

$$g_i(G_n) = 2g_{i_{10}}(n) + 2g_{(i-1)_3}(n).$$

$G_n (1 \leq n \leq 5)$ 的亏格分布如下

$$f_{G_1}(x) = 2(1 + 19x + 12x^2),$$

$$f_{G_2}(x) = 2^4(3x + 41x^2 + 20x^3),$$

$$f_{G_3}(x) = 2^3(3x + 209x^2 + 1388x^3 + 448x^4),$$

$$f_{G_4}(x) = 2^5(x + 75x^2 +$$

$$1620x^3 + 5344x^4 + 1152x^5),$$

$$f_{G_5}(x) = 2^5(2x + 157x^2 +$$

$$4313x^3 + 40248x^4 + 75088x^5 + 11264x^6).$$

参考文献:

- [1] Gross J L, Furst M L. Hierarchy of Imbedding Distribution Invariants of A Graph[J]. J. Graph Theory, 1987, 11: 205 - 220.
- [2] Furst M L, Gross J L, Statman R. Genus Distributions for Two Classes of Graphs[J]. J. Combin. Theory(B), 1989, 46: 22 - 36.
- [3] McGeoch L A. Algorithms for Two Graph Problems: Computing Maximum-Genus Imbeddings and the Two-Server Problem[D]. Computer Science Dept., Carnegie Mellon University, PA: Ph. D Thesis, 1987.
- [4] Tesar E H. Genus Distribution of Ringel Ladders[J]. Discrete Math, 2000, 216: 235 - 252.
- [5] Gross J L, Robbins D P, Tucker T W. Genus Distributions for Bouquets of Circles[J]. J. Combin. Theory(B), 1989, 47: 292 - 306.
- [6] Wan L X, Liu Y P. Orientable Embedding Distributions by Genus for Certain Type of Non-Planar Graphs[J]. Accepted by Ars Combinatoria(to-be Publish).
- [7] Chen J, Gross J L, Rieper R G. Overlap Matrices and Total Imbedding Distributions[J]. Discrete Math, 1994, 128: 73 - 94.
- [8] 刘彦佩. 组合地图进阶[M]. 北京: 北方交通大学出版社, 2003.
LIU Yan-pei. Advances in Combinatorial Maps[M]. Beijing: North Jiaotong University Press, 2003. (in Chinese)
- [9] Liu Y P. Embeddability in Graphs[M]. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publisher, 1995.

文章编号:1673-0291(2005)06-0094-04

最大面次为6图的上可嵌入性

柴 钊, 刘彦佩

(北京交通大学 理学院, 北京 100044)

摘 要: 给出一类最大面次为6的图的集合 Φ , 证明对于任何一个无环图 $G \in \Phi$, 如果它能嵌入在平面上使得每个面次不超过6, 则 G 是上可嵌入的. 进而, 确定了集合 Φ 中图的构造.

关键词: 图论; 面次; 上可嵌入; 最大亏格

中图分类号: O157.5 **文献标识码:** A

Upper Embedability of Graphs Whose Maximal Degree of Every Face Is 6

CHAI Zhao, LIU Yan-pei

(School of Sciences, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: This paper gives a kind of group set whose maximal degree of every face is 6. And proves that if any loopless graph can be embedded in the plane and the degree of every face does not exceed 6, then G is upper embedable. And further constructs the graphs which belong to.

Key words: graphs; degree of face; upper embedable; maximum genus

本文作者考虑的图均是有限、无向、无环的连通图(允许有重边). 没有解释的定义或者记号参考文献[1, 2].

设曲面 S 是一个紧的, 连通的2维无界闭流形, 其亏格记为 $g(S)$. 图 G 在曲面 S 上的一个嵌入是指一个1-1连续映射 $h: G \rightarrow S$; 直观地讲, 图 G 能画在曲面 S 上使得边与边之间的交点只能是边的端点. 如果 $S \setminus h(G)$ 的每个连通分支与开圆盘同胚, 则称此嵌入为2-胞腔嵌入. 此时 $S \setminus h(G)$ 的每个连通分支为 G 的面. 图的最大定向亏格, 常称最大亏格, 记为 $\gamma_M(G)$, 是指最大的整数 k 使得 G 在亏格为 k 的定向曲面 S 上有2-胞腔嵌入(以下简称嵌入).

图的最大亏格是图的一个重要参数, 一直受到图论研究者的广泛关注. 文献[2-7]通过给定一些限制条件, 讨论了一些上可嵌入图类. Xuong^[5]证明每个4-边连通图是上可嵌入的, 特别指出, 文献[8]若

无环图能够2-胞腔嵌入到某曲面(可定向或不可定向)使最大面次不超过4, 则 G 是上可嵌入的. 黄元秋等在文献[3, 4]中, 将最大面次条件放宽到5.

本文作者将可嵌入到平面上且面次限制在一定条件下放宽到6, 并且构造出其不满足的集合.

1 基本概念和定理

设 G 已嵌入在曲面 S 上, 由 Euler

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = \begin{cases} 2 - 2g(S), & \text{当 } S \text{ 可定向;} \\ 2 - (S), & \text{当 } S \text{ 不可定向.} \end{cases}$$

得
$$\gamma_M(G) \leq \lfloor \frac{\beta(G)}{2} \rfloor,$$

其中 $\beta(G) = |E(G)| - |V(G)| + 1$ 称为 G 的 Betti 数. 如果 $\gamma_M(G) = \lfloor \frac{\beta(G)}{2} \rfloor$, 一个图 G 称为上可嵌入的. 可见, 一个图是上可嵌入的表明它的最大亏格可取到最好上界.

收稿日期: 2004-11-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60373030)

作者简介: 柴钊(1982—), 女, 山西临汾人, 硕士生. email: zhao-chai@eyou.com

刘彦佩(1936—), 男, 天津市人, 教授, 博士生导师.