高等院校数学精品教材

微积分

邱淦俤 兰星 主编

清华大学出版社

高等院校数学精品教材

微积分

邱淦俤 兰星 主编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要针对经管类应用型本科生而编写，内容包括：极限与连续、导数及其应用、积分及其应用、微分方程、多元积分学.

本书可作为经管类专业的教材，也可作为独立学院、民办学院及成人高校相关专业的教材.

图书在版编目（CIP）数据

微积分/邱淦俤，兰星主编. –北京：清华大学出版社，2017
高等院校数学精品教材
ISBN 978-7-302-43991-2

I. ① 微… II. ① 邱…② 兰… III. ① 微积分 –高等学校 –教材 IV. ① O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 120529 号

责任编辑：佟丽霞
封面设计：何凤霞
责任校对：王淑云
责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编：100084
社 总 机：010-62770175 邮 购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市金元印装有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：185mm × 260mm **印 张**：9.75 **字 数**：234 千字
版 次：2017 年 7 月第 1 版 **印 次**：2017 年 7 月第 1 次印刷
印 数：1 ～ 1500
定 价：32.00 元

产品编号：066645-01

前 言

微积分是高等学校经管类专业的重要公共基础课，对于学生应用数学知识与方法解决经济问题以及数量经济方面的后续课程起着十分重大的作用. 虽然当前国内外微积分的书籍为数不少，但针对应用型大学、独立学院和民办高校学生使用的教材却几乎空白，给这类院校的教师与学生均带来诸多不便和困难，鉴于此, 我们编写本书以期解决上述问题.

本书以够用为原则，以实用为指导，以应用为主线来构建财经类高等数学的知识体系，在内容组织上体现如下特色：

1. 以经济活动中的实例引入相关数学概念，着重介绍数学知识的产生、应用和发展的全过程，强化学生对概念的经济背景的认识. 同时，突出数学知识在经济活动中的各种应用，提高学以致用的实效.

2. 淡化抽象的数学定理的严谨推理论证，着重强调其实际应用，最大限度地降低学生的学习难度.

3. 将多元函数的知识有机整合于一元函数相关知识之中（如函数、极限、连续、导数（偏导数）等概念、性质、计算方法），这样既方便学生从一元函数知识类似推移到多元函数，又减少了许多简单的重复，显得更为精炼、富有条理性.

4. 以牛顿–莱布尼茨公式为纽带将不定积分与定积分计算融为一体，充分展示两者之间的紧密关系. 此外，强调了两者之间的异同以及综合应用.

衷心感谢宁德师范学院数学系陈省江、郭伟红、林影、周仙耕、李小燕、刘涛、张静、林珑、陈婷、张玉玲、江西红、叶秋盈、林燕莲等师生在本书编写过程中所付出的精力和心血，同时感谢清华大学出版社给予的大力支持和帮助.

虽然我们精心致力于编写一本重点突出、特色鲜明的教材，限于水平，书中不尽如人意之处恐在所难免，敬请广大读者不吝指正.

邱淦俤

ndsyqgd@aliyun.com

2017 年 2 月

目 录

第 1 章　极限与连续

学习目标与要求

1. 熟练掌握经济活动中的常见函数.
2. 理解函数极限与连续的概念和性质.
3. 掌握求极限的基本方法.

1.1　经济活动中的几个常见函数

1.1.1　需求函数

需求是指消费者在一定的价格水平上对某种商品有支付能力的需要. 因此, 需求是以消费者货币购买力为前提的, 它是对商品的某一价格水平而言的. 人们对某一商品的需求受许多因素的影响, 如价格、收入、偏好等. 一般来说, 需求主要是价格的函数, 记为 $Q=Q(P)$, 其中 P 表示价格, Q 表示需求量.依实际意义, 需求函数 $Q=Q(P)$ 总是单调下降的.

例 1.1　市场上小麦的需求量 (每月)如表 1.1 所示.

表 1.1　小麦的价格与需求量

价格 P /(元/ kg)	1	2	3	4	5	6	7	8
需求量 Q / kg	30	25	20	15	12	10	9	8

需求函数的曲线, 如图 1.1 所示.

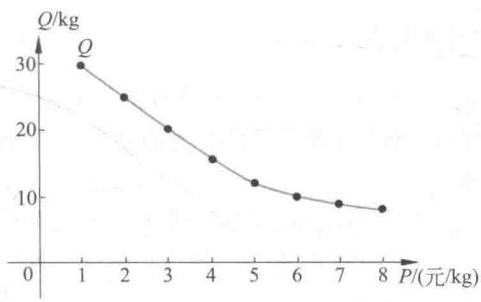

图 1.1　需求函数的曲线

这条曲线说明, 小麦的需求量是价格的减函数, 即当 P 增加时, Q 下降, 这一性质在经济学上称为需求向下倾斜规律, 这一规律适合许多商品.

1.1.2　供给函数

供给函数是生产者或销售者在一定价格水平下提供给市场的商品量.

供给量受诸多因素的影响. 一般而言, 它主要是价格的函数, 记为 $S=S(P)$. 依实际意义, 供给函数 $S=S(P)$ 总是单调上升的.

例 1.2 生产者愿意提供的小麦数量 (每月)如表 1.2 与图 1.2 所示.

表 1.2 小麦的价格与供给量

价格 P/ (元/ kg)	1	2	3	4	5	6	7	8
供给量 S / kg	0	2	4	5	7	10	16	25

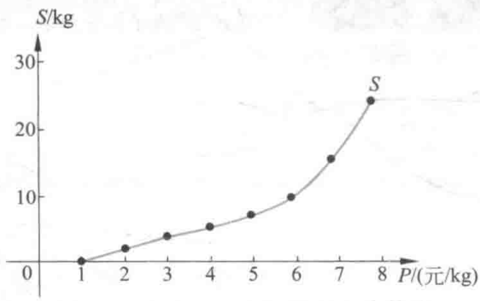

图 1.2 生产者愿意提供的小麦数量

这条供给曲线向上倾斜, 说明当小麦的价格较高时, 农民愿意并有能力增加小麦的产量. 这一性质在经济学上称为供给向上倾斜规律.

现把例 1.1 与例 1.2 所给的需求曲线与供给曲线结合起来分析, 如图 1.3 所示.

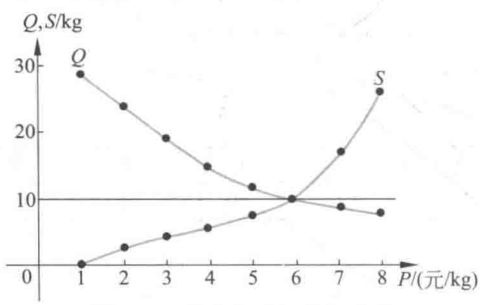

图 1.3 需求曲线与供给曲线

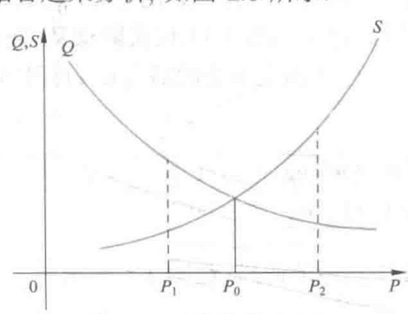

图 1.4 均衡价格示意图

需求曲线 $Q = Q(P)$ 与供给曲线 $S = S(P)$ 相交处的价格 $P = 6$ 元/kg. 在这个价格上, 消费者愿意购买的小麦量为 10kg, 生产者愿意提供小麦的数量为 10kg, 两者处于平衡状态. 这时 $P = 6$ 元/kg 称为它们的均衡价格.

一般地, 需求曲线 $Q = Q(P)$ 与供给曲线相交处的价格称为均衡价格 (如图 1.4 所示). 在 P_1 处, 商品供不应求, 商品的价格将提高. 在 P_2 处, 供过于求, 商品价格有下降的趋势. 在 P_0 处, 供给量等于需求量, 价格平衡.

这里需要说明的是, 在需求函数和供给函数中, 作为自变量的价格 P 并不一定是按实数值连续变化的. 如例 1.1 和例 1.2 中 P 限制在某个范围且仅取正整数值. 在研究时为方便, 将其连续化, 并给出相应的近似的解析表达式, 由此所得的结果是实际情形的近似. 在经济与商务分析中所应用的大部分函数都有类似的情况.

1.1.3 成本函数

成本是指生产制造产品所投入的原材料、劳动力与技术等生产资料的货币表现. 它是产量的函数, 记为 $C(x)$, 其中 x 为产量.

在经济和商务分析中, 把一定时期内的成本划分为固定成本和变动成本. 固定成本是指在一定时期和一定业务量范围内, 不受产量增减变动影响的成本, 如厂房、机器、管理等费用, 记为 F. 变动成本是指在一定范围内随产量变化而变化的成本, 如原材料、燃料等费用, 记为 $V(x)$, 其中 x 为产量. 一定时期的总成本函数为

$$C(x)=F+V(x).$$

单位成本函数 (也称为平均成本函数)为

$$\overline{C}(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{F}{x}+\frac{V(x)}{x}.$$

1.1.4 收益函数与利润函数

销售收益是生产者出售一定量的产品所得到的全部收入, 记为 R. 假设在销售过程中价格不动, 则销售收益等于产品单价 P 与销售量 Q 的乘积, 即

$$R=PQ.$$

当把销售量看成是价格的函数时, 即 $Q=Q(P)$ (需求函数), 则有

$$R=PQ(P),$$

即收益函数是价格的函数. 当把价格看成是销售量的函数时, 则销售收益为

$$R=P(Q)Q,$$

即销售收益是销售量的函数, R 也称为收益函数.

收益与成本之差称为利润, 视为 L, 于是

$$L=R(Q)-C(Q).$$

习 题 1.1

1. 已知某产品的总成本函数为 $C(Q)=1000+\dfrac{Q^2}{10}$，求生产 100 个该种产品时的总成本和平均成本.

2. 设生产与销售某产品的总收益 R 为产量 x 的二次函数, 经统计得知当 $x=0,2,4$ 时, $R=0,6,8$, 试确定总收益 R 与产量 x 的函数式.

3. 某制造厂以每件 5 元的价格出售其产品, 问: (1)销售 5000 件产品时, 总收益是多少? (2)固定成本为 3000 元, 估计可变成本为总收益的 40%, 销售 5000 件产品后总成本是多少? (3)该厂的保本产量是多少?

4. 某商品供给量 Q 对价格 P 的函数关系为

$$Q=Q(P)=a+bc^P.$$

已知当 $P=2$ 时, $Q=30$; $P=3$ 时, $Q=50$; $P=4$ 时, $Q=90$. 求供给量 Q 对价格 P 的函数关系.

5. 某化肥厂生产某产品 1000t, 每吨定价为 130 元, 销售量在 700t 以内时按原价出售; 超过 700t 时, 超过部分需打 9 折出售, 试将销售总收益与总销售量的函数关系用数学表达式表示.

1.2　极　限

1.2.1　函数极限

1. 自变量趋于无穷大 ($x \to \infty$) 时的极限

定义 1.1　函数极限 ($x \to \infty$)

如果当 $x \to \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A, 则称 A 为 $x \to \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限, 记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A, x \to \infty.$$

当 $x \to -\infty$ (x 沿着负实轴趋于 $-\infty$)与 $x \to +\infty$ (x 沿着正实轴趋于 $+\infty$)时, 可类似定义.

例 1.3　(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$;　　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 0$;　　(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$.

2. 数列极限

一般地, 我们把按一定顺序排列的无穷多个数称为数列. 数列中第 n 项 x_n 叫做数列的通项或一般项. 因此, 数列也可用通项简记为 $\{x_n\}$.

例如:

$$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots \tag{1.1}$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots \tag{1.2}$$

$$1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^n, \cdots \tag{1.3}$$

$$a, a, a, \cdots, a, \cdots \tag{1.4}$$

都是数列, 其通项分别为 $x_n = n, \dfrac{1}{n}, (-1)^n, a$.

由于数列可以看成定义在正整数集上的特殊函数 $f(n) = x_n (n = 1, 2, \cdots)$, 因此仿照定义 1.1 可得数列极限定义如下:

定义 1.2　数列极限

如果当 $n \to \infty$ 时, 数列 $\{x_n\}$ 无限接近于一个常数 A, 则称数列 $\{x_n\}$ 为收敛数列, A 称为 $n \to \infty$ 时 $\{x_n\}$ 的极限, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A.$$

不收敛的数列称为发散数列.

例 1.4　(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \ (|q| < 1)$.

3. 自变量趋于有限值 ($x \to x_0$) 时的极限

先考察一个例子: 从函数 $f(x) = 2x + 1$ 的图形 (图 1.5)可以看出, 当 x 趋向于 1 时, 函数值应该无限接近于 3.

我们将 x 趋向于 1 时函数值的变化趋势列表如下:

表 1.3　x 趋向于 1 时函数值的变化趋势

x	0	0.1	0.4	0.7	0.9	0.99	0.999	1
$f(x)$	1	1.2	1.8	2.4	2.8	2.98	2.998	3

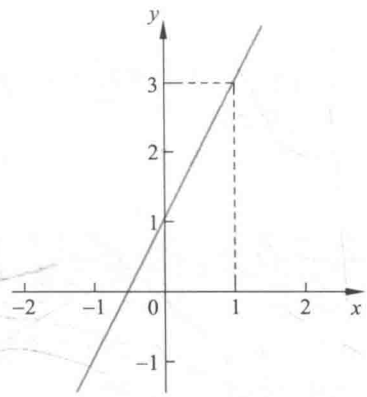

图 1.5

很明显地, 当 x 越来越接近 1 时, $f(x)$ 的值越来越接近于 3. 据此, 我们引进自变量趋向有限值时函数的极限概念.

定义 1.3 函数极限 ($x \to x_0$)

设函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ $(\delta>0)$ 内有定义 ($f(x)$ 在 x_0 可以没有定义). 如果当 $x \to x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A, 则称 A 为 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限, 记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A, x \to x_0.$$

注: 定义中 $f(x)$ 在 x_0 处可以没有定义，说明 $f(x)$ 的极限与 $f(x)$ 在 x_0 有无定义即 $f(x_0)$ 为何值无关.

1.2.2 左、右极限

当自变量 x 只从 x_0 的左 (右)侧单边趋向于 x_0 时的极限称为 $x \to x_0$ 时的左 (右)极限. 记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A \text{ (或 } \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A).$$

根据定义容易证明:

定理 1.1 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A.$

例 1.5 讨论 $f(x) = \begin{cases} x+1, x<1, \\ x^2, \quad x \geqslant 1, \end{cases}$ 当 $x \to 1$ 时的极限.

解: 当 $x<1$ 时,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x+1) = 2;$$

当 $x \geqslant 1$ 时,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 = 1.$$

因为 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, 故 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在.

1.2.3 二元函数极限

一元函数 $y=f(x)$ 是定义实轴上的函数, 其自变量只有一个. 而二元函数 $z=f(x,y)$ 是指定义在 xOy 平面上的函数, 其自变量个数有两个, 一般用有序数对 (x,y) 表示这两个自变量, 其中 x 称为横坐标, y 称为纵坐标. 类似于一元函数极限的定义 1.3, 二元函数在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的极限定义为:

定义 1.4 二元函数极限 $(P\to P_0)$

设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义, 如果在该邻域内点 $P(x,y)$ 沿任意路径无限接近点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 的值都无限接近于一个确定的常数 A, 则称 A 为 $f(x,y)$ 当 $P\to P_0$ 时的极限, 记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \text{ 或 } \lim_{P\to P_0} f(P)=A.$$

注 1: 所谓 “点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域”是指以 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心, 以某个正实数 δ 为半径的圆域 D, 即 $D=\{(x,y):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$.

注 2: 对一元函数的极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 我们知道, 它等价于 x 沿着 x_0 的左边和右边两个方向趋于 x_0 的极限均等于 A. 但对二元函数的极限 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$, 则要求 P 沿着任何方向趋于 P_0 的极限都等于 A. 因此, 若 P 沿着两个不同方向趋于 P_0 时的极限不相等, 或 P 沿着某个特殊方向的极限不存在, 则可断定 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ 不存在.

例 1.6 设 $f(x,y)=\dfrac{2x}{x+2y}$, 讨论 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 的存在性.

解：由于当 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 的方向趋于 $(0,0)$ 时,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x+2kx}=\frac{2}{1+2k},$$

上述极限与 k 有关, 因此当 (x,y) 沿着两条不同直线 $y=k_1x$ 与 $y=k_2x$ 的方向趋于 $(0,0)$ 时将得到两个不同的极限. 故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

1.2.4 极限运算法则

以下我们以 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限为例引入极限的四则运算法则 (它同样适用于其他类型的极限和二元函数的极限):

假定 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, 则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} c\cdot f(x)=c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=cA$ (c 为常数);

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\pm B$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=AB$;

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

利用极限的运算法则可以大大地简化极限的计算过程.

例 1.7 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+1}{2x^2+3}$.

解:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1}{2x^2+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{3}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{3}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{2+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

注意：原式分母的极限为 0, 因而不能直接应用商的极限法则.

一般地, 对于有理函数有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}0,\ m<n,\\ \dfrac{a_m}{b_n}, m=n,\\ \infty,\ m>n,\end{cases}$$

其中 m,n 为非负整数, $a_mb_n\neq 0$.

因此, 计算 $x\to\infty$ 时有理函数的极限, 只要依据其分子、分母的最高次项即可直接得到结果.

例 1.8 求 $\lim\limits_{x\to 3}(2x^3+3x+5)$.

解: 原式 $=2\lim\limits_{x\to 3}x^3+3\lim\limits_{x\to 3}x+5=54+9+5=68$.

例 1.9 求 $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{6}{x^2-x-2}\right)$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2(x-2)}{(x-2)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{2}{3}$.

例 1.10 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n}{2}(n+1)}{n^2}=\dfrac{1}{2}$.

1.2.5 两个重要极限

1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \ (\text{图 } 1.6). \tag{1.5}$$

利用式 (1.5)求极限时, 务必注意以下两个问题:

(1) 极限过程必须是 $x\to 0$ 时, 否则不能用, 例如 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0\neq 1$.

(2) 式 (1.5)中分子与分母的自变量必须完全一样, 例如 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=2\neq 1$.

这是因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}(2\cos x)=2$, 或者

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}=2\lim_{2x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2\times 1=2.$$

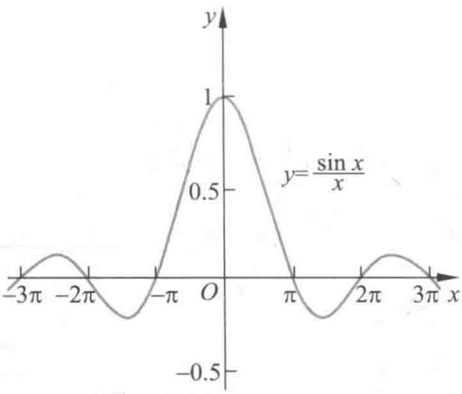

图 1.6

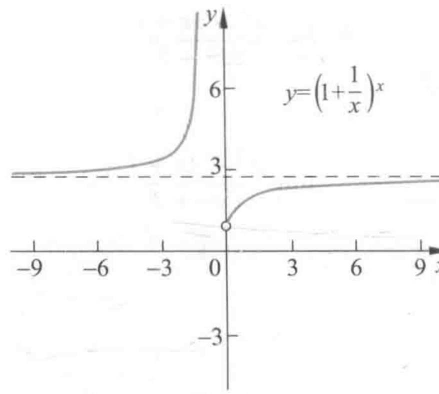

图 1.7

2.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\ \ (\text{图 } 1.7). \tag{1.6}$$

式 (1.6)是一个十分重要且应用非常广泛的极限公式, 它还有以下两种常见形式:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}\ \ \text{及}\ \ \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$$

实际问题 1.1　连续复利息问题

设本金为 A_0, 利率为 r, 期数为 t. 若每期结算一次, 则本利和为

$$A=A_0(1+r)^t.$$

若每期结算 m 次, 则 t 期本利和为

$$A_m=A_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}.$$

如果是立即产生、立即结算, 则可理解为 $m\to\infty$, 从而有

$$\lim_{m\to\infty}A_m=\lim_{m\to\infty}A_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}=A_0\mathrm{e}^{rt}.$$

这种极限反映了现实生活中许多事物的生长或消失的数量规律 (如细胞繁殖、树木生长等), 是一个实际中十分有用的极限.

1.2.6　无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量

定义 1.5　无穷小量

以零为极限的变量称为无穷小量, 简称无穷小.

注意: 在上述定义中, 我们并没有指出具体的极限过程, 而实际上无穷小量是针对极限过程而言的. 例如, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, 则 $\dfrac{1}{n}$ 称为 $n\to\infty$ 时的无穷小量. $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$, $x-1$ 称为 $x\to1$ 时的无穷小量, 而 $\lim\limits_{x\to2}(x-1)=1$, 故 $x-1$ 不是 $x\to2$ 时的无穷小量. 特别地, 0 是任何极限过程的无穷小量.

为了叙述方便, 以下如无特别声明均用 $\lim u$ 表示数列极限或各种类型的函数极限.

2. 无穷小量的运算性质

性质 1　两个无穷小量之和 (差)仍为无穷小量.

性质 2 两个无穷小量之积仍为无穷小量.

这两个性质由极限运算法则即可得到, 且可推广到有限个无穷小量的情形.

性质 3 有界量与无穷小量之积仍为无穷小量.

例 1.11 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$.

解: 因为 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1(x\neq 0)$, 所以 $\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 的某一去心邻域 $\{x: 0<|x|<\delta, \delta>0\}$ 内有界, 而 $\lim\limits_{x\to 0} x=0$, 故 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

此外, 由极限的运算性质可知, 若 $\lim u=a$, 则 $\lim(u-a)=0$, 即 $u-a$ 为同一极限过程的无穷小量. 于是就得到下面这个极限与无穷小量之间的关系.

> 定理 1.2 $\lim u=a \Longleftrightarrow u=a+\alpha$ (其中 $\lim\alpha=0$, 且极限过程与 u 相同).

3. 无穷小量的比较

由无穷小量的性质可以知道, 两个无穷小量的和、差、积还是无穷小量. 但两个无穷小量的商却会出现不同的情况. 例如, 当 $n\to\infty$ 时, $\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n^2+1}$ 都是无穷小量, 但 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}\right]=\lim\limits_{n\to\infty} n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2+1}}\right]=1$. 也就是说, 对于相同的 n, $\dfrac{1}{n^2}$ 要比 $\dfrac{1}{n}$ 趋于零的速度要“快”一些, $\dfrac{1}{n^2}$ 与 $\dfrac{1}{n^2+1}$ 的“快、慢”速度差不多.

为了比较无穷小量之间趋于零的快、慢程度, 我们引进下面无穷小量的阶的概念.

> **定义 1.6 无穷小量的阶**
>
> 设 α, β 是无穷小量,
>
> 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$, 且 $\alpha\neq 0$, 就说 β 是比 α 高阶的无穷小量, 记作 $\beta=o(\alpha)$;
>
> 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$, 就说 β 是比 α 低阶的无穷小量;
>
> 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=C\neq 0$($C$ 为常数), 就说 β 与 α 是同阶无穷小量;
>
> 特别地, 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$, 就说 β 与 α 是等价无穷小量, 记作 $\alpha\sim\beta$.

显然, 等价无穷小量是同阶无穷小量的特殊情况, 即 $C=1$ 的情形.

例如, 因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2x}=0$, 故 $x^2=o(2x)(x\to 0)$; 因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, 故 $\sin x\sim x(x\to 0)$.

关于等价无穷小量, 我们有下面两个等价代换法则.

> 定理 1.3 设 α, β, γ 是同一极限过程的无穷小量, 且 $\alpha\sim\beta$. 则
>
> (1) $\lim\alpha\gamma=\lim\beta\gamma$;
>
> (2) $\lim\dfrac{\gamma}{\alpha}=\lim\dfrac{\gamma}{\beta}$.