大學用書

相對論

田渠編著

正中書局印行

大學用書

相　對　論

田　渠　編著
（國立湖南大學教授）

正中書局印行

序　言

物理學之萌芽，雖遠紹於古希臘時代，然物理學之規模，實由 Newton 之動力學定律及其萬有引力定律，始行樹立.蓋以力學爲物理之基礎，而力學中之一切現象，幾完全包羅於此數定律之內，是爲古典之 Newton 力學.由十七世紀直至十九世紀之末，Newton 力學之權威，日趨發展.而物理學之一切進步，亦均可謂爲 Newton 之功也.

1905 年，Einstein 發表其特殊相對論，可視爲物理學中驚人之革命.蓋以水星近日點之移動，以及太陽光譜向紅內線之移動等現象，非 Newton 力學所能解釋，而必須應用此種新的 Einstein 力學矣.雖在日常生活中，Newton 力學仍有其相當之權威，但遇精微之處，卽須應用 Einstein 力學.近代原子物理學日趨發展，在此種單微現象中，Einstein 之相對論，已普偏採用.蓋 Newton 力學，僅可視爲 Einstein 力學之一種特例而已.然則相對論在物理學中之地位可知矣.

本篇係由著者就其所授課程之講義，加以整理，而將相對論概念，作一普通之介紹，以爲研究此課者之津梁而已.

再本書原稿，曾由湖大助教羅守琳君及同學彭朝材君分任抄寫，僅附數語以誌謝忱!

田　渠敬識於國立湖南大學

三十六年二月

目　次

上篇　狹義相對論

下篇 廣義相對論

上　篇

狹義相對論

1. Newton 力學中之絕對時間及絕對空間　運動為相對的．一物體 A 對於一物體 B 之位置有變更時，則可謂 A 對於 B 有一運動．然則欲研究一物體之運動，須先確定此物體對於其他各種物體之相對位置．確定此種位置，通常應用三個正交之座標軸，而以此物體之三個座標表示之，是為 Cartesian 座標[1]．此種座標系，通常固定於一物體或一羣物體之上，是為 Galilean 系[2]．

設有兩個 Galilean 系 S' 及 S，其座標軸 y' 及 z' 與 y 及 z 互為平行，其 x' 軸則以一固定之速度 v，在 x 軸上滑動；即是 S' 系以一速度 v 對於 S 系作一個等速直線運動．假定在時間為零時，兩系之原點 O' 與 O 相合；即是說，兩系之三個正交座標軸線，是時均兩兩互相疊合．在此種情形下，S 系中一點 $M(x, y, z)$，在 S' 系中之觀察者視之，將見其座標為

$$x'=x-vt, \quad y'=y, \quad z'=z.$$

在上式中，t 表示觀察之時間．另外，對於 S' 系中一點 $M'(x', y', z')$，

---

(1) 直線座標為 Cartesian 座標，係因紀念解析幾何之發明人 Descartes，而以其名之縮寫，以名此座標．

(2) 係用以紀念意大利之大物理學家 Galileo．

在 S 系中之觀察者視之，將見其座標爲

$$x=x'+vt,\quad y=y',\quad z=z'.$$

當觀察者所在之座標系轉換時，所見一事變座標之變更，可由上二組公式示之，是爲 Galilean 轉換式(Galilean transformation). 在此種轉換式中，兩系所用之時間 t 爲公同的. 推廣之，此公同之時間，可應用於任何之 Galilean 系；卽是說，對於一切動系，時間爲均一之流過，各系中所計算之時間，均毫無差別. 然則在 Newton 力學中，時間爲絕對的.

在 S 系中任取二點 M_1 及 M_2，其座標爲 (x_1, y_1, z_1) 及 (x_2, y_2, z_2). 令，

$$\Delta x=x_2-x_1,\quad \Delta y=y_2-y_1,\quad \Delta z=z_2-z_1.$$

則此二點間之距離，其平方爲

$$\Delta s^2=\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2.$$

因時間爲絕對的，在 S' 系中之觀察者，將見此二點之座標爲

$$x_1'=x_1-vt,\quad y_1'=y_1,\quad z_1'=z_1,$$

$$x_2'=x_2-vt,\quad y_2'=y_2,\quad z_2'=z_2;$$

及

$$\Delta x'=x_2'-x_1'=x_2-x_1=\Delta x,$$

$$\Delta y'=\Delta y,\qquad \Delta z'=\Delta z.$$

然則所見此二點之距離，其平方爲

$$\Delta s'^2=\Delta x'^2+\Delta y'^2+\Delta z'^2,$$

或

$$\Delta s'=\Delta s.$$

由上式可見在三度空間中，任意二點間之距離，不隨觀察者所在之座標系之轉換而變更；卽是說，在 Newton 力學中，二點間之距離可視爲一個不變數(invarient). 然則此三度空間，應有其絕對性，

是爲絕對空間(absolute space). 在此絕對空間中靜止之物體,將爲絕對靜止的. 以絕對靜止之物體爲參考系(system of reference),則在此參考系中運動之物體,將爲絕對運動(absolute motion),其運動之速度,名曰絕對速度(absolute velocity).

2. Newton **力學中之相對性** 設以作各種等速運動之Galilean系爲參考系,則各種物體運動時,其運動定律,不隨座標系之轉換而變更. 蓋以支配物體運動之力量,或物體運動時所產生之慣性力,不因座標系之轉換而變更也.是爲 Newton 力學中之相對性,茲證明之如下:

命物體之質量爲 m, 在 Newton 力學中, 係默認此質量爲不變的. 在 S 系中, 設此物體之座標爲 x, y, z, 則其所受之作用力, 有其三個分力爲

$$X=m\ddot{x},\qquad Y=m\ddot{y},\qquad Z=m\ddot{z}. \tag{1}$$

是爲在 Newton 力學中,該物體 $M(x,y,z)$ 在 S 系中運動之公式. 在 S' 系中視之,由 Galilean 轉換式,將見此物體之座標爲

$$x'=x-vt,\qquad y'=y,\qquad z'=z;$$

其三個分速度爲

$$\dot{x}'=\dot{x}-v,\qquad \dot{y}'=\dot{y},\qquad \dot{z}'=\dot{z};$$

其三個分加速度爲

$$\ddot{x}'=\ddot{x},\qquad \ddot{y}'=\ddot{y},\qquad \ddot{z}'=\ddot{z}; \tag{2}$$

及三個分力

$$X'=m\ddot{x}',\qquad Y'=m\ddot{y}',\qquad Z'=m\ddot{z}'. \tag{3}$$

由(1),(2),及(3)式,求得

$$X'=X,\qquad Y'=Y,\qquad Z'=Z.$$

由上式見當座標系轉換時，此物體所受之力量不變；即是說，不因座標系之轉換而產生新的力量．物體所受之力量旣不變，物體運動之定律，亦將完全相同，以及其運動之路線，亦將爲種類相同之曲線．如以$F(x,y,z,t)=0$表示一物體在S系中運動之公式，$F(x',y',z',t')=0$表示在S'系中所見此物體運動之公式，則此二函數之形式，應爲完全相同．例如在地面所見物體自由墜落，爲一個等加速度垂直運動，任意投物，常爲一個拋物線運動；在一以等速前進之密閉車廂中，所見之物體自由墜落，仍爲一個等加速度垂直運動，任意投物，亦常爲一個拋物線運動．假設此觀察者完全密閉於此車廂中，則此觀察者將無法由車中之各種實驗，以發現此車廂在軌道上之等速運動．蓋以同一力量所作之各種運動，與地面所見之各種運動，均無差異，是爲 Newton 力學中之相對性．

在 Newton 力學中，雖有此種相對性之存在，即是在一完全密閉之動系中，無法發現其本身對於其他參考系之等速直線運動，或其絕對運動，然並不否認此種絕對性運動之存在．蓋空間旣有絕對性，則對於絕對運動之存在，應爲默認的．

3．相對論之產生 相對論之產生，實導源於光學理論之爭論．光之性質究爲如何？自十七世紀 Newton 創微粒學說，Huggens 創波動學說(1679)以後，物理學者，聚訟紛紜，迄不能完全解決．蓋以微粒學說僅能解釋光之直進現象，對於折射、繞射及干涉各現象，解釋頗爲牽強．波動學說則不僅對於幾何光學中各種現象如干涉及繞射等，解釋頗爲自然，即對於幾何光學中一切現象，亦能圓滿解釋．

1850 年, Foucault 求得光在水中之速度,僅爲光在空氣中速度之四分之三,更給微粒學說以致命之打擊.惟一切波動,均須在一適當之媒質中進行.光波能穿過眞空,然則其媒質果爲何物?按眞空中毫無物質存在,爲維持光之波動學說,於是物理學家有以太(ether)之假設;即是認爲在眞空中及各種透明物質之中,均有一種假想之媒質存在.此種物質名曰以太.以太既非物質,自無質量可言,不能應用天平等儀器,加以秤定.更無色,無臭,無味,不具有物質之任何特性.欲證實此種媒質之爲存在,惟有從其對於空間之運動狀態着手.在天文學中,已發現對於一切方向上之恆星,均有光行差(aberration)現象.由此推論,以太在宇宙間,應爲靜止的.Doppler 效應,亦可應用於任何方向上恆星或星雲之光譜;即是說,其光譜波長之改變,僅受光源與觀察者之相對運動之影響,而與空間之方向無關,亦可證明以太在空間爲靜止的.此外尙有許多種實驗,其結果俱維持以太應爲靜止的假想.直至 1887 年, Michelson-Morley 之實驗,其結果又恰與前者相反,惟有認爲以太係隨地球運動,始能加以解釋.相對論之產生,即由此種矛盾而來,而求能作一圓滿之解釋.關於 Michelson-Morley 之實驗,當於 §5 中詳述之.下節先將空間與此種假想媒質之特性,作一比較之硏究.

4. 以太與空間 毫無物質之空間,是爲眞空(vacuum),例如舊日所謂之星際空間是也[1].在此種眞空中,雖無物質存在,亦常能顯示許多物理特性.例如各種力場之存在,光波及電磁波之傳播等

---

(1) 近由恆星吸收光譜之研究,已知此星際空間,亦有極爲稀薄之吸收物質存在.在銀河平面附近,其密度比較稍大,向銀極則其密度愈爲稀薄.

是；而有一固定之折射係數、介電常數及導磁係數等等. 故十九世紀之物理學家，遂認爲此種毫無物質之空間，不能謂爲眞空，而充滿有一種理想之媒質，是爲以太. 理想之眞空 (empty space)，僅應有各種幾何特性，而不能發生任何物理特性. 至眞空中之各種物理特性，係發生於此種媒質之中. 各種力場之存在，可視爲以太之一種變形，光波及電磁波之傳播，可視爲以太振動之進行. 於是將舊日所謂之眞空，分爲空間與以太兩部分. 前者爲理想之幾何空間，後者爲實驗之物理空間.

在理論方面，研究空間之各種幾何特性，應用 Cartesian 座標系，固無須依附於一種物質之上. 惟此僅爲一種研究之方法，不能認爲卽可證明幾何空間之眞實存在. 實則一切幾何量度之確定，必須藉助於各種具體之目標. 故吾人研究幾何空間，仍不能離開物質. 倘空間之物質完全消除，則此空間之各種幾何特性或幾何量度，亦將隨之消滅矣.

另外，空間之各種物理特性，如一切力場，均由各種物質（包括各種電荷）所發出. 質量可視爲一切力場之中心點. 物質如有一運動，則此力場亦隨之運動. 卽當物質靜止時，如物質之質量（亦包括電荷等而言）有一變更，或其速度有一變更時，則其所發生之力場，亦將向各種方向輻射，而質量卽爲此種輻射之出發點. 又由量子學說，吾人認爲一切量子，俱有其相當之質量 $\frac{h\nu}{c^2}$，是爲此量子之電磁質量. 以及電磁場輻射時，亦有其相當之動量. 然則一切力場與輻射，亦不能與物質分開. 倘認爲此種力場之存在及輻射之進行，係由於以太

之變形，然則以太之各種狀態，亦將受物質之支配矣．

幾何空間與以太，均同受物質之影響．然則幾何空間之眞空，與物理世界之以太，實際上亦將無法判別．以太卽可視爲空間，空間卽可視爲以太．各種力場之存在，與其視爲以太之變形，亦可視爲空間之一種彎曲．各種輻射之傳播，與其視爲以太之一種振動，亦可視爲各種力場之振動．然則此種理想媒質之假設，直可視爲無此種必要矣．

5． Michelson-Morley **實驗**　由光源 S 發出之光線 SM，以 45° 之角，射於一個半鍍銀之平面玻璃 M 上，而分爲透射之 MA 及反射之 MB 二條，如圖 1 所示．A 及 B 二點各有一個平面鏡，鏡面與 MA 及 MB 二線互爲正交．經此二平面鏡反射之後，光線 AM 及 BM 各循原路而達於 M．再由此平面玻璃之反射與透射，而共取 ME 之方向．在此方向上用一小望遠鏡視之，可以看出此二組光線之干涉條紋．

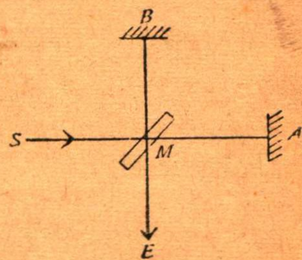

圖 1.

令 MA 及 MB 之距離均爲 l．假設以太爲靜止的，則光線在此靜止之以太中，其速度應爲各向相同的．令此速度爲 c，及地球對於以太之速度爲 v．先令 MA 與地球運動之方向相合，然則光線由 M 至 A 時，其速度爲 $(c-v)$，由 A 返 M 時，其速度爲 $(c+v)$．於是求得光線由 M 出發經 A 鏡反射而再達 M 時所經過之時間爲

$$t_1=\frac{l}{c-v}+\frac{l}{c+v}=\frac{2l}{c}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}. \tag{1}$$

MB 垂直於地球運動之方向.當 M 在 M_1 之位置如圖 2 所示時,光線由 M 鏡出發,當其經 B 鏡反射而復落於 M 上時,此平面玻璃 M 將隨地球運行而達至 M_2 之位置矣. 令光線由 M 點出發,經 B 鏡反射而復落於 M 上所經過之時間爲 t_2,則有

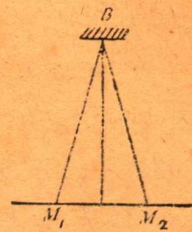

圖 2.

$$t_2=\frac{2}{c}\sqrt{l^2+\left(\frac{M_1M_2}{2}\right)^2}.$$

按 $M_1M_2=vt_2$, 然則有

$$t_2=\frac{2}{c}\sqrt{l^2+\frac{v^2t_2^2}{4}},$$

或

$$t_2^2=\frac{4l^2}{c^2}+\frac{v^2}{c^2}t_2^2.$$

由上式移項,得

$$t_2=\frac{2l}{c}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

再由(1)及(2)式,求得

$$t_1-t_2=\frac{2l}{c}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}-\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

然則在此實驗中, MAM 及 MBM 二光線間,有一光程差

$$\delta=c(t_1-t_2)=2l\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}-\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$=2l\left[\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}-\frac{5}{8}\frac{v^4}{c^4}+\cdots\cdots\right].$$

如忽略上式括弧中$\left(\frac{v}{c}\right)$之高次方，則此光程差之近似值為$\frac{lv^2}{c^2}$.

Michelson-Morley 將此實驗之儀器，全部置於一個可以自由轉動之平臺上. 當全部儀器轉動 90°，即是 MB 與地球運動之方向相合時，MAM 及 MBM 二光線間之光程差之變更，將為 $2lv^2/c^2$. 然則望遠鏡中所見之干涉條紋，將發生一移動. 設所用之單色光，其波長為 λ，則干涉條紋移動之間隔(interval)，應為

$$\alpha=2\frac{lv^2}{\lambda c^2}.$$

按地球之軌道運動，其速度 v 為 3×10^6 厘米/秒. Michelson-Morley 實驗中所用之距離 l 為 11 米，其所用之波長 λ 約為6×10^{-5}厘米，然則有

$$\alpha=\frac{2\times1.1\times10^3}{6\times10^{-5}}\times(10^{-4})^2=0.4.$$

在干涉條紋中，移動至 4/10 之間隔，通常應可量出. Michelson-Morley 實驗之結果，見其干涉條紋，並不隨儀器之轉動而移動[1]. 然則，僅有承認以太係隨地球運動，始能加以解釋. 此點又與 §3 中所述以太應為靜止之說相衝突. 於是以太之性質，無法確定. 而以太之是否眞實存在，從此發生問題矣.

6. Fitzgerald 收縮 為解釋 Michelson-Morley 實驗之結果，Fitzgerald 曾假設空間及一切物體，在運動之方向上，將發生一收

---

(1) Miller 曾於 1924 年，求得一相反之結果. 惟 Michelson 之實驗，曾經許多物理學家之證明，實較 Miller 之結果，更為精確.

縮. 此收縮之係數，卽可由 Michelson-Morley 實驗之結果求出.

假設 MA 及 MB 二距離，原爲相同，或當 MA 及 MB 均爲靜止時，其長度均爲 l. 實驗時，MB 垂直於運動之方向，其長度不變. MA 與地球運動之方向相合，其長度將縮小爲 l'，而有

$$t_1-t_2=\frac{2}{c}\left[\frac{l'}{1-\frac{v^2}{c^2}}-\frac{l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right].$$

Michelson-Morley 實驗之結果，干涉條紋並無移動，然則應有其 t_2 與 t_1 相等，卽是應有

$$\frac{l'}{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

由上式，可以求得此收縮係數爲

$$\alpha=\frac{l'}{l}=\sqrt{1-v^2/c^2}\ ,$$

或其倒數爲

$$\beta=\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

卽是說，在運動之方向上，空間及物體之長度，將縮爲其原有長度之 $1/\beta$.

此種收縮，亦可由 Lorentz 之轉換式導出，故通常又稱爲 Fitzgerald-Lorentz 收縮.

絕對靜止之以太，旣無法證實其爲存在. 空間之距離，在其運動之方向上，又將隨其速度之大小，而發生一相對應之收縮. 然則空間之絕對性，實已消失，而絕對運動，實爲一個無意義之名詞矣. 實際

方面，在宇宙中，亦難覓一絕對靜止之點，以爲絕對運動之標準．吾人所居住之地球，有其軌道運動及自轉．各行星亦然．整個太陽系，在銀河中，又向武仙星座移動．一切恆星均有自行(proper motion)．整個銀河系有其轉動．以及各銀河系間又有其相互之運動．然則整個宇宙，實可視爲一個動的宇宙矣．

7．時間之相對性　在 Newton 力學中，係認時間爲絕對的．按時間之發生，係由運動而來．假設在此大宇宙中，一切物體均爲靜止的，則時間問題，將無法確定．按絕對運動，旣無意義，然則絕對時間一名詞，亦將發生問題矣．實際方面，Newton 力學中時間之定義，有欠完善之處．例如兩個事變同時在 A, B 二點發生，其意義究爲如何，假設我們承認時間爲絕對的，在一切動系中，皆爲均一之流過，則此種同時性之存在，當無問題．當我們採取實驗的論證來研究此種同時性時，將有困難問題發生矣．我們必須有兩個完全相同之同步鐘(synchronized clocks)，分置於 A, B 二點，以表示此絕對時間．由此二同步鐘所示事變發生之時間，倘爲相同，則此二事變始有其同時性．玆舉出一實地觀測之方法如下，以研究此同時性．

在 AB 之中點 C 用兩個互爲正交之平面鏡，其鏡面均與 AB 線作 45° 之角，如圖 3 所示，以同時觀測 A, B 二點所發生之事變，及二同步鐘所示之時間．在 C 點所見 A, B 二鐘所示之時間相同，則此二鐘可稱爲同步鐘．但是由絕對之意念，假設 A, B, C 三點均在地球之上，則此同步鐘，實際上將無法實現．蓋以地球在以太中，有其軌道運動，以及

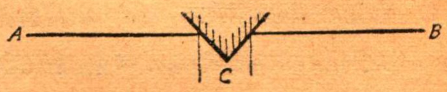

圖 3.

隨太陽系及隨銀河系所作之種種運動.設 AB 與地球運動之方向相同,v 爲地球運動之速度,$2l$ 爲 A,B 二點間之距離,則由 A,B 二鐘同時發出之火花,達到 C 點所需之時間,其一將爲 $l/(c+v)$,其另一將爲 $l/(c-v)$. Michelson-Morley 實驗之結果,曾表示光速在任何方向上,均爲相同,不受地球運動之影響;卽是說,在 C 點所見 A,B 二同步鐘所示之時刻,應仍爲相同.倘認時間爲絕對的,則 Michelson-Morley 實驗之結果,無法解釋.惟有認爲時間隨運動之速度而發生變更;卽是說,在各 Galilean 系中,所計算之時間 t 與 t',並不相同,始能解釋 Michelson-Morley 之實驗.於是產生時間亦有其相對性之概念.

8. Lorentz 轉換式 在各種動系 G' 及 G 中,如認時間及空間均爲絕對的,則其座標之轉換,曾由 Galilean 轉換式表示之.如承認時間及空間均爲相對的,則此 Galilean 轉換式,不能再行應用矣.在研究一新的轉換式之前,吾人應先述一基理(postulate),是爲相對速度基理,或簡稱基理 V:

設有 S' 及 S 二系,彼此作一相對運動,其相對速度之絕對値,對於兩系中之觀察者,可用同一數値表示之.

蓋由此基理,始能使二系中之各種量度發生關係.根據此基理,可以認爲在 S 系中之觀察者,以其自系(1)中所用之各種單位,量得 S' 系之運動,其速度爲 v. S' 系中之觀察者,亦以其自系中所用之各種單位,量得 S 系運動之速度,其大小亦爲 v,惟二者之方向,恰爲相反.

(1) 對於此系爲靜止之觀察者,常視此系爲自系(proper system).