普通高等教育“十二五”规划教材·应用型本科系列

线性代数

（第二版）

主编　徐 勇　李景和　马秀娟

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材·应用型本科系列

线性代数(第二版)

主　编　徐　勇　李景和　马秀娟
副主编　苏国忠　赵娇云　吴梦虹　白　云

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是为适应高等学校理工科和经济类专业的教学需要而编写的教材，内容包括：线性方程组与矩阵、方阵的行列式、矩阵与向量的运算、向量组与向量空间、矩阵的特征值与特征向量、二次型、MATLAB 软件在线性代数中的应用．每节内穿插有例题、练习题，每章末附有习题．书末附录包括用逆序法定义行列式的值及习题参考解答．

本书注意理论和实际相结合，选材适当，体系新颖，论述严谨，条理清楚，对概念的解释透彻并具有一定的可读性，便于教学和学生自学．

本书可作为高等学校理工类与经济类本、专科“线性代数”课程的教材用书．

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/徐勇，李景和，马秀娟主编．—2 版．—北京：科学出版社，2016
普通高等教育“十二五”规划教材・应用型本科系列
ISBN 978-7-03-048945-6

Ⅰ. ①线…　Ⅱ. ①徐…　②李…　③马…　Ⅲ. ①线性代数 – 高等学校 – 教材
Ⅳ. ①O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016) 第 139032 号

责任编辑：滕亚帆／责任校对：郭瑞芝
责任印制：赵　博／封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市密东印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2017 年 2 月第　一　版　开本：787 × 1092 1/16
2017 年 2 月第一次印刷　印张：14 1/2
字数：350 000

定价：34. 60 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

对理工科大学生来说, "线性代数" 是一门十分重要的数学基础理论课. 一方面, 在培养学生严谨的逻辑思维方法方面, 它有着其他课程不可替代的重要作用; 另一方面, 这门课程所包含的数学概念和基础知识, 也为理工科各专业的后续课程提供了必备的数学基础. 编写本书, 主要是为了满足高等学校理工科和经济类专业的教学需要, 为 "线性代数" 课程提供一本内容完整、体系设计新颖、易读好用、努力反映课程教学改革成果的新教材.

本书以一种较新的方式组织课程内容, 主要考虑了以下几点: 一是便于学生阅读, 内容组织方式易于被学生接受; 二是便于教师组织教学; 三是尽量争取内容前后呼应, 结构联系紧密. 全书以线性代数方程组和矩阵为两条主线, 全部内容围绕线性方程组和矩阵展开, 矩阵初等变换是贯穿全书的基本方法.

本书以线性方程组为切入点, 由线性方程组及高斯消元法引进矩阵及其初等变换的概念; 第 2 章在行列式性质的证明中, 强调了矩阵初等变换的作用, 这使得矩阵及其初等变换背景清晰, 加强了矩阵和行列式的联系; 向量线性相关性, 是读者较难理解的概念, 本书中加了一个直观性较强的引例, 同时将矩阵秩的性质较多地用在了线性相关性问题的讨论中, 降低了理解上的难度; 将向量的内积运算与矩阵乘法放在了一起, 以期引起读者对二者关联性的注意; 将向量空间改放在第 4 章, 一方面利用了向量空间基与维数与向量组最大无关组和秩的相似性, 叙述上简略一些, 另一方面也便于叙述线性方程组解的理论, 突出了向量空间的实用性. 以上考虑, 较少见于国内同类教材.

每一章的最后, 都给出了一个与内容有联系的阅读材料, 以增加本书的可读性, 也希望读者能够对线性代数的问题感兴趣. 一些定理的证明和一些拓展性的内容, 书中用小字排列, 初学者可以略去, 不影响对其他内容的理解.

一些与线性代数有关的实际问题, 必须借助于计算机才能求出解答, 为了满足读者利用计算软件解线性代数问题的需求, 本书第 7 章给出了 MATLAB 软件在线性代数中的应用. 为便于读者掌握课程的基本内容, 在每节中穿插有若干练习题, 作为基本训练之用. 每章末附有习题, 书后附有习题的参考答案或简要解答, 供读者参考. 本书包含的内容, 可以满足 48 学时的教学需要, 删掉一些定理的证明和第 7 章, 也可在 36 学时内完成主要部分的教学. 本书初稿在河北工业大学及其他部分学校经过 5 届以上的学生使用, 反映较好.

本书共 7 章. 第 1 章由赵娇云编写, 第 2 章由吴梦虹编写, 第 3 章由徐勇编写, 第 4 章由马秀娟编写, 第 5、6 章由李景和编写, 第 7 章由苏国忠编写. 各章习题及答案由白云组织编写. 全书由徐勇定稿.

河北铁道大学刘国欣教授审阅了全书, 提出了很好的建议, 河北工业大学何华教授对本书的出版给予了极大的支持. 科学出版社的编辑对本书的出版倾注了大量心血, 在此一

并致以深深的谢意.

另外, 也感谢参考文献中所列的诸位作者, 本书作者从他们的著作中得到许多有益的启示, 并采纳了若干优秀的例题、习题及阅读材料, 所有这些都极大地丰富了本书的内容.

由于作者的水平所限, 书中难免有考虑不周之处, 所以, 热忱地希望使用本书的教师和学生予以指正, 以便再版时订正.

徐　勇

2016 年 4 月于天津

目 录

第 1 章　线性方程组与矩阵

线性方程组是各个方程关于未知量均为一次的方程组. 对线性方程组的研究, 是线性代数的一个重要内容, 也是科学计算中最常遇到的问题. 例如, 在应力分析、分子结构、电路分析和测量学中都会遇到线性代数方程组的求解问题. 在数学问题的数值计算方法中, 大量的问题, 如最小二乘法、三次样条函数插值、微分方程边值问题的有限元法、差分法等, 也都涉及线性方程组的求解.

在线性代数中, 线性方程组的求解和矩阵及矩阵初等变换的理论密切相关. 本章首先给出求解线性方程组的一个重要方法 —— 高斯消元法, 然后引进矩阵和矩阵初等变换的概念, 并利用矩阵初等变换的方法讨论线性方程组的求解.

1.1　线性方程组

1.1.1　线性方程组的概念

n 个自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性方程通常表示为

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

其中系数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 b 为已知实数或复数, b 称为常数项, n 为任意正整数. m 个方程构成的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1.1}$$

称为一个**线性代数方程组**, 其中, a_{ij} 表示第 i 个方程中第 j 个自变量 x_j 的系数, $i = 1, 2, \cdots, m,\ j = 1, 2, \cdots, n$, b_i 为第 i 个方程的常数项.

当常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 全为零时, 方程组 (1.1.1) 中所有项均为一次项, 方程组变为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}, \tag{1.1.2}$$

式 (1.1.2) 称为方程组 (1.1.1) 对应的**齐次线性方程组**, 相应的式 (1.1.1) 称为**非齐次线性方程组**.

例 1.1.1　3 个自变量的线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 = -5 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

是一个非齐次线性方程组, 这个方程组对应的齐次线性方程组为

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

定义 1.1.1(方程组的解)　当将方程组中的未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 用一组常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 代替时, 若方程组两边的值相等, 则称 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是方程组的一组**解**.

当方程组 (1.1.1) 有解时, 称方程组是**相容**的, 否则称方程组**不相容**.

对给定的一个线性方程组, 它的解可能①有唯一解; ②有无穷解; ③无解. 对于 3 个未知量, 3 个方程的情形, 每个方程表示一个平面. 当方程组有唯一解时, 表示 3 个平面有唯一的交点; 方程组有无穷多解时, 表示 3 个平面重合或交于一条直线; 方程组无解时, 则表示 3 个平面没有共同的交点.

线性方程组的所有解构成的集合, 称为方程组的解集. 如果两个线性方程组有相同的解集, 称这两个方程组是等价方程组, 或称同解方程组.

求解线性方程组的方法, 是利用同解变换的方法, 将线性方程组化为相对较简单的同解方程组, 逐步简化以得出线性方程组的解.

1.1.2　非齐次线性方程组的解法

设线性方程组 (1.1.1) 是相容的, 下面介绍解线性方程组的基本方法 —— **高斯消元法**.

例 1.1.2　求解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 = -5 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}.$$

解　将第一个方程与第二个方程对调位置, 使对调后的第一个方程中 x_1 的系数为 1, 得到

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4 \\ 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 = -5 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}. \tag{1.1.3}$$

为了消去第二、三个方程中的 x_1 项, 将第一个方程的两边乘以 -3 加到第二个方程上, 两边乘以 -4 加到第三个方程上, 得

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4 \\ 2x_2 - 5x_3 = 7 \\ 6x_2 - 14x_3 = 20 \end{cases}. \tag{1.1.4}$$

消去式 (1.1.4) 中第三个方程的 x_2 项, 为此, 将第二个方程两端乘以 -3 后加到第三个方程上, 得

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4 \\ 2x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_3 = -1 \end{cases}. \tag{1.1.5}$$

可以看到, 式 (1.1.3)~式 (1.1.5) 都是同解方程组, 但式 (1.1.5) 的求解却要容易得多, 形如式 (1.1.5) 的方程组称为梯形方程组 (echelon form linear system).

由方程组 (1.1.5) 逐步回代, 可以顺次解出

$$x_3 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_1 = 3. \tag{1.1.6}$$

上述解题过程中, 对线性方程组施行的变换称为对线性方程组的**初等变换**(elementary operation). 归纳起来, 对线性方程组施行的初等变换共有三种:

I. 交换任意两个方程的位置, 第 i 个方程和第 j 个方程相交换, 记作 $L_i \leftrightarrow L_j$;

II. 以非零常数 λ 乘以某一个方程的两边, 第 i 个方程两端乘以常数 λ, 记作 λL_i;

III. 以常数 k 乘以第 j 个方程后加到第 i 个方程上, 记作 $L_i + kL_j$.

这三种类型的初等变换均不改变线性方程组的解.

利用方程组的初等变换将方程组化为梯形方程组的过程称为**消元过程**, 由梯形方程组回代得出方程组的解的过程称为**回代过程**, 消元过程和回代过程合称为**高斯消元法**.

当线性方程组的解不唯一时, 可以用线性方程组的通解表示线性方程组的全部解. 所谓通解, 就是可以表示线性方程组的全部解的一个表示式, 通解中一般包含若干个任意常数 $t_1, t_2, \cdots, t_s$. 方程组的任一个解, 都对应于 $t_1, t_2, \cdots, t_s$ 的一组值, 反过来, $t_1, t_2, \cdots, t_s$ 的任一组值, 都对应于方程组的一个解.

求线性方程组的通解, 可以用相似的方法.

例 1.1.3 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 12x_4 = 2 \end{cases}. \tag{1.1.7}$$

解 对方程组作初等变换 $L_2 + (-2)L_1$, $L_3 + (-4)L_1$, 消去第二、三个方程中的未知量 x_1, 得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -1 \\ -2x_2 + 6x_3 - 4x_4 = -2 \end{cases}.$$

作初等变换 $L_3 + (-2)L_2$, 消去第三个方程, 得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 1 \\ -x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -1 \end{cases}.$$

最后作初等变换 $L_1 + L_2, (-1)L_2$, 得

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}.$$

将未知量 x_3, x_4 移到等号的右侧, 得

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 - 2x_4 \\ x_2 = 3x_3 - 2x_4 + 1 \end{cases}. \tag{1.1.8}$$

在方程组 (1.1.8) 中, 任意取定变量 x_3, x_4 的一组值. 例如, 令

$$x_3 = t_1, \quad x_4 = t_2,$$

回代得出

$$\begin{cases} x_1 = -2t_1 - 2t_2 \\ x_2 = 3t_1 - 2t_2 + 1 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \end{cases}, \tag{1.1.9}$$

其中 t_1, t_2 可以取任意的实数值. 当 t_1, t_2 取所有可能的值时, 式 (1.1.9) 给出方程组的全部解. 式 (1.1.9) 是方程组 (1.1.7) 的**通解**.

当方程组中含有矛盾方程时, 方程组会出现无解的情况.

例 1.1.4　讨论下列线性方程组的解的情况:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 9x_2 + 9x_3 + 7x_4 = -1 \end{cases}. \tag{1.1.10}$$

解　对方程组作初等变换 $L_2 + (-2)L_1$, $L_3 + (-3)L_1$, 得

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ -3x_2 - 6x_3 - 5x_4 = -1 \\ -3x_2 - 6x_3 - 5x_4 = -7 \end{cases}.$$

作变换 $L_3 + (-1)L_2$, 得

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ -3x_2 - 6x_3 - 5x_4 = -1 \\ 0 = -6 \end{cases}. \tag{1.1.11}$$

在方程组 (1.1.11) 中, 第三个方程是矛盾方程, 故方程组 (1.1.11) 无解, 从而方程组 (1.1.10) 也无解.

练习 1.1.1　求解下列方程组:

(1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$;　(2) $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11 \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 5 \\ -x_1 - 9x_2 - 4x_4 = 17 \end{cases}$;

(3) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -2 \end{cases}$;　(4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 5x_1 + 12x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -7 \end{cases}$.

1.1.3 齐次线性方程组的解法

对于齐次线性方程组 (1.1.2), 因为

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \cdots, \quad x_n = 0 \tag{1.1.12}$$

总是它的一个解, 故齐次线性方程组一定相容, 称式 (1.1.12) 为方程组 (1.1.2) 的**平凡解**(trivial solution) 或**零解**. 如果方程组有非零解, 则它必有无穷多个解. 可以利用高斯消元法对齐次线性方程组进行求解.

例 1.1.5 判断下列方程组是否有非零解, 如果有非零解, 求出其通解:

$$\begin{cases} x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}. \tag{1.1.13}$$

解 因为第一个方程中 x_1 的系数为零, 首先作变换 $L_1 \leftrightarrow L_2$, 将第一、二个方程调换位置, 得

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 0 \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

作变换 $L_3 + \left(-\dfrac{5}{2}\right) L_1$, 消去第三个方程中的 x_1 项, 得

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 0 \\ \dfrac{1}{2}x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

由第二个方程消去第三个方程, 得

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}.$$

在上式中选定一个变量, 如 x_3, 移到等号的右边, 得到

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -2x_3 \\ x_2 = 4x_3 \end{cases}.$$

令 $x_3 = t$, 解得

$$\begin{cases} x_1 = 5t \\ x_2 = 4t \\ x_3 = t \end{cases}, \tag{1.1.14}$$

其中, 参数 t 可以取任何实数. 当 $t = 0$ 时, 得到方程组的零解; 当 $t \neq 0$ 时, 就得方程组的非零解. 可以看到, 这个方程组有无穷多个非零解, 式 (1.1.14) 是它的**通解**.

例 1.1.6　求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 = 0 \\ -4x_1 + 6x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

解　利用初等变换, 把方程组化为梯形方程组, 可以得到

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases},$$

由此得到

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0.$$

故方程组只有零解.

在例 1.1.3 和例 1.1.5 所得到的通解中, 分别含有任意常数 t_1, t_2 和任意常数 t, 这些常数的取得, 是在由方程组化成的梯形方程组中, 选定每个方程的第一项对应的未知量, 将其余未知量对应的项移到等号的右边. 那些移到等号右边的自变量称为**自由未知量**, 留在等号左边的未知量称为**基本自变量**, 再将自由未知量取为任意常数, 而将基本未知量用这些任意常数表示, 得到方程组的通解.

练习 1.1.2　判断下列齐次线性方程组是否有非零解, 若有非零解, 求出方程组的通解:

(1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_1 + 8x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$;　　(2) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$;

(3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$.

练习 1.1.3　当常数 a 为何值时, 方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ ax_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

有非平凡解, 求出方程组的通解.

1.2　矩阵与向量

1.2.1　矩阵与向量的概念

对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

的求解, 根据 1.1 节的讨论, 可以看到, 利用高斯消元法解线性方程组, 其实只有系数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 和常数项 $b_i(i=1,2,\cdots,m)$ 参与运算. 在方程组中去掉各个自变量 x_i, 加号 "+", 等号 "=" 后, 剩下一个矩形数组, 两边括以方括号, 表示为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \tag{1.2.1}$$

这个数组携带了线性方程组的全部信息, 它和对应的线性方程组相互唯一确定.

对于齐次线性方程组 (1.1.2), 常数项全部为零, 在式 (1.2.1) 中去掉最后一列, 得到

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{1.2.2}$$

称形如式 (1.2.1) 和式 (1.2.2) 的矩形数组为 "矩阵".

定义 1.2.1 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成一个 m 行、n 列的数表, 记作

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.2.3}$$

称为一个 m 行 n 列的矩阵, 简称为 $m\times n$ 矩阵或**矩阵**(matrix), a_{ij} 称为矩阵的元素, 元素 a_{ij} 的下标 i 表示它所在的行, 称为**行标**, 下标 j 表示它所在的列, 称为**列标**.

矩阵常用一个大写英文字母表示. 例如, 元素为 a_{ij} 的矩阵 (1.2.3) 可记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}$, 表示出它的元素, 矩阵也简记作 $[a_{ij}]_{m\times n}$, 或 $[a_{ij}]$, 即

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_{m\times n}=[a_{ij}]_{m\times n}=[a_{ij}]. \tag{1.2.4}$$

式 (1.2.2) 称为线性方程组的**系数矩阵**, 而式 (1.2.1) 称为线性方程组的**增广矩阵**, 矩阵中的元素可以是实数、复数, 也可以是矩阵、函数或其他数学符号. 元素为实数的矩阵称为实矩阵, 元素为复数的矩阵称为复矩阵, 元素为其他对象的矩阵称为超矩阵 (hypermatrix). 本书中大多数情况下讨论的是实矩阵.

只有一列或一行的矩阵称为向量.

定义 1.2.2 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的一个有序数组

$$\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

称为一个 n 维**列向量**, 简称 n 维向量, 其中 a_i 称为 $\boldsymbol{a}$ 的第 i 个**分量**或**坐标**. 当将 n 维向量写作

$$[a_1, a_2, \cdots, a_n]$$

时, 则称为 n 维**行向量**, 记作 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$.

n 维向量也可以看作是一个 $n\times 1$ 矩阵, 称为列矩阵; 同时一个 n 维行向量也可看作是 $1\times n$ 矩阵, 称为行矩阵.

线性方程组的未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和右端项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 构成两个向量

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

分别称为线性方程组的未知向量和常数向量.

下面介绍几个来自实际问题的矩阵例子.

例 1.2.1(交换矩阵)　设一个经济系统由 3 个产业部门构成, 分别是煤矿、发电厂和钢铁厂, 每一个部门的产品在各个部门之间的分配情况可以用表 1.2.1 表示.

表 1.2.1　各部门产品交换表

产品使用部门	产品生产部门		
	煤矿	发电厂	钢铁厂
煤矿	0.0	0.4	0.6
发电厂	0.6	0.1	0.2
钢铁厂	0.4	0.5	0.2

其中每一列的 3 个数分别表示这个部门的产品在 3 个部门之间的分布比例. 例如, 表中的第二列表示发电厂的电能有 40%被煤矿利用, 50%用于钢铁厂, 10%留给发电厂自己使用, 假设各个部门的产品只在系统内部分配, 故各列的数字之和等于 1. 由表 1.2.1 可以得到矩阵

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{E}$ 称为交换矩阵①.

例 1.2.2(通路矩阵)　设有 4 座城市 A_1, A_2, A_3, A_4, 其间道路通向如图 1.2.1 所示. 以数 r_{ij} 表示由第 i 个城市直接通向第 j 个城市的道路通路条数, 则由图 1.2.1 提供的城市之间的通路信息, 可以由如下的矩阵表示 (注意道路指向是有方向的):

① 交换矩阵由美国经济学家, 诺贝尔经济学奖获得者 Wassily Leontief 提出.

$$R = [r_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{R}$ 称为**通路矩阵**. 例如, 工厂中设备之间的连接, 或产品在各工序之间的流动, 均可以用通路矩阵表示.

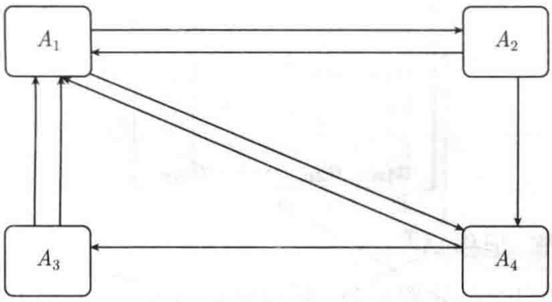

图 1.2.1

例 1.2.3(成本矩阵和产量矩阵) 某厂生产三种产品, 每件产品的成本包括材料成本、劳动力成本和管理成本三部分, 每件产品的成本数据由表 1.2.2 给出, 该厂第 1~4 月的产量统计由表 1.2.3 给出.

表 1.2.2 各种产品成本数据表

产品 成本/元	A	B	C
原材料	0.10	0.30	0.15
劳动力	0.30	0.40	0.25
管理费用	0.10	0.20	0.15

表 1.2.3 产量统计表

月份 产品	1	2	3	4
A	4000	4500	4500	4000
B	2000	2600	2400	2200
C	5800	6200	6000	6000

表 1.1.2 和表 1.2.3 中的数据分别可以用矩阵

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0.10 & 0.30 & 0.15 \\ 0.30 & 0.40 & 0.25 \\ 0.10 & 0.20 & 0.15 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 4000 & 4500 & 4500 & 4000 \\ 2000 & 2600 & 2400 & 2200 \\ 5800 & 6200 & 6000 & 6000 \end{bmatrix}$$

表示, $\boldsymbol{M}$ 称为**成本矩阵**, $\boldsymbol{P}$ 称为**产量矩阵**.

下面对矩阵的概念作进一步的介绍.

定义 1.2.3(矩阵相等) 设 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$, $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]_{p\times q}$, 如果