万学教育 海文考研

最新版
考研系列图书

考研数学 <珍藏版>
真题大解析（数学一）

1989-2003试题分册

主编：丁勇　副主编：周晓燕　刘曦

★ 历年考点分学科分章节归纳

★ 命题规律及趋势一目了然

★ 题目解析简单明了直击得分点

★ 附加分套装订真题，研读演练两不误

名师点题，答疑

中国政法大学出版社

万学教育
UNIVERSAL EDUCATION GROUP

海文考研

最新版

考研数学真题大解析 < 珍藏版 >（数学一）

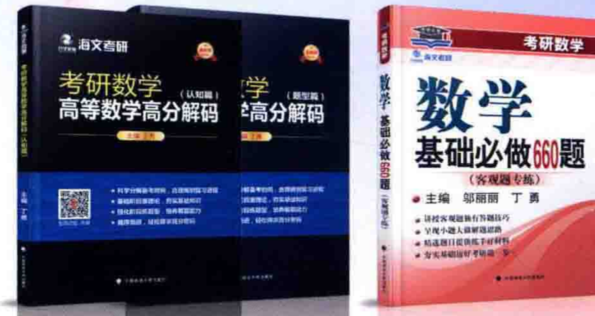
1989-2003试题分册

主编：丁勇　副主编：周晓燕　刘曦

中国政法大学出版社

2017・北京

万学教育 海文考研



考研数学基础阶段参考用书

《考研数学高等数学高分解码》

《考研数学线性代数高分解码》

《考研数学概率论与数理统计高分解码》

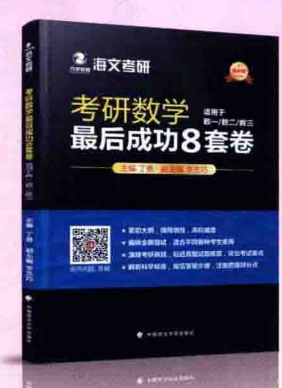
《考研数学基础必做660题》

考研数学全程阶段参考用书

《考研数学真题大解析（标准版）》

《考研数学真题大解析（珍藏版）》

《考研数学公式速记随身宝》



考研数学冲刺阶段参考用书

《考研数学最后成功8套题》

1989年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题

一、填空题(本题共5个小题,每小题3分,满分15分。)

(1) 已知 $f'(3)=2$,则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$ ________.

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数,且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$,则 $f(x)=$ ________.

(3) 设平面曲线 L 为下半圆周 $y=-\sqrt{1-x^2}$,则曲线积分 $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=$ ________.

(4) 向量场 $\boldsymbol{u}(x,y,z)=xy^2\boldsymbol{i}+ye^z\boldsymbol{j}+x\ln(1+z^2)\boldsymbol{k}$ 在点 $P(1,1,0)$ 处的散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{u}=$ ________.

(5) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&0&0\\1&4&0\\0&0&3\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$,则逆矩阵 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=$ ________.

二、选择题(本题共5个小题,每小题3分,满分15分。)

(1) 当 $x>0$ 时,曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ (   )

(A) 有且仅有水平渐近线.

(B) 有且仅有铅直渐近线.

(C) 既有水平渐近线,也有铅直渐近线.

(D) 既无水平渐近线,也无铅直渐近线.

(2) 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$,则点 P 的坐标是(   )

(A) $(1,-1,2)$.　　(B) $(-1,1,2)$.

(C) $(1,1,2)$.　　(D) $(-1,-1,2)$.

(3) 设线性无关的函数 y_1、y_2、y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解,C_1、C_2 是任意常数,则该非齐次方程的通解是(   )

(A) $C_1y_1+C_2y_2+y_3$.　　(B) $C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$.

(C) $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$.　　(D) $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$.

(4) 设函数 $f(x)=x^2, 0\leqslant x<1$,而 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x, -\infty<x<+\infty$,其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x, n=1,2,3,\cdots$,则 $S\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ 等于(   )

(A) $-\dfrac{1}{2}$.　　(B) $-\dfrac{1}{4}$.　　(C) $\dfrac{1}{4}$.　　(D) $\dfrac{1}{2}$.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$,则 $\boldsymbol{A}$ 中(   )

(A) 必有一列元素全为0.

(B) 必有两列元素对应成比例.

(C) 必有一列向量是其余列向量的线性组合.

(D) 任一列向量是其余列向量的线性组合.

三、(本题满分 15 分，每小题 5 分。)

(1) 设 $z=f(2x-y)+g(x,xy)$，其中函数 $f(t)$ 二阶可导，$g(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(2) 设曲线积分 $\int_C xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数，且 $\varphi(0)=0$，计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2+y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 的值.

(3) 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+z)\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域.

四、(本题满分 6 分。)

将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数.

五、(本题满分 7 分。)

设 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 为连续函数，求 $f(x)$.

六、(本题满分 7 分。)

证明方程 $\ln x=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\mathrm{d}x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个不同实根.

七、(本题满分 6 分。)

问 λ 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad + x_3 = \lambda, \\ 4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2, \\ 6x_1+x_2+4x_3=2\lambda+3 \end{cases}$$

有解，并求出解的一般形式.

八、(本题满分 8 分。)

设 λ 为 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，证明：

(1) $\dfrac{1}{\lambda}$ 为 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值；

(2) $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值.

九、(本题满分 9 分。)

设半径为 R 的球面 Σ 的球心在定球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 上，问当 R 为何值时，球面 Σ 在定球面内部的那部分的面积最大？

十、填空题(本题满分 6 分，每小题 2 分。)

(1) 已知随机事件 A 的概率 $P(A)=0.5$，随机事件 B 的概率 $P(B)=0.6$ 及条件概率 $P(B\mid A)=0.8$，则和事件 $A\cup B$ 的概率 $P(A\cup B)=$ ________.

(2) 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为 0.6 和 0.5. 现已知目标被命中，则它是甲射中的概率为________.

(3) 若随机变量 ξ 在区间 $(1,6)$ 上服从均匀分布，则方程 $x^2+\xi x+1=0$ 有实根的概率是________.

十一、(本题满分 6 分。)

设随机变量 X 与 Y 独立，且 X 服从均值为 1，标准差(均方差)为 $\sqrt{2}$ 的正态分布，而 Y 服从标准正态分布. 试求随机变量 $Z=2X-Y+3$ 的概率密度函数.

1989 答案速查表

题号	答案	详解对应页码
一、填空题		
(1)	-1	P9
(2)	$x-1$	P24
(3)	π	P52
(4)	2	P65
(5)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	P97
二、选择题		
(1)	A	P18
(2)	C	P40
(3)	D	P82
(4)	B	P78
(5)	C	P105
三、		
(1)	$-2f''+xg''_{12}+g'_2+xyg''_{22}$	P37
(2)	$\frac{1}{2}$	P52
(3)	$\frac{\pi}{8}$	P48
四、	$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},x\in[-1,1)$	P72
五、	$f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x$	P82
六、	略	P18
七、	$\lambda=1$	P112
八、	略	P115
九、	$R=\frac{4}{3}a$	P60
十、		

(1)	0.7	P131
(2)	0.75	P131
(3)	0.8	P135
十一、	$f_Z(z)=\dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-5)^2}{18}}$	P143

1990 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题

一、填空题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分。)

(1) 过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $\begin{cases} x=-t+2, \\ y=3t-4, \\ z=t-1 \end{cases}$ 垂直的平面方程是 ________.

(2) 设 a 为非零常数,则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=$ ________.

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases} 1, & |x|\leqslant 1, \\ 0, & |x|>1, \end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$ ________.

(4) 积分 $\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$ 的值等于 ________.

(5) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4,5)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,5,6)$,$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,5,6,7)$,则该向量组的秩是________.

二、选择题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分。)

(1) 设 $f(x)$ 是连续函数,且 $F(x)=\int_x^{\mathrm{e}^{-x}} f(t)\mathrm{d}t$,则 $F'(x)$ 等于(　　)

(A) $-\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})-f(x)$.　　(B) $-\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})+f(x)$.

(C) $\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})-f(x)$.　　(D) $\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})+f(x)$.

(2) 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数,且 $f'(x)=[f(x)]^2$,则当 n 为大于 2 的正整数时,$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是(　　)

(A) $n![f(x)]^{n+1}$.　　(B) $n[f(x)]^{n+1}$.　　(C) $[f(x)]^{2n}$.　　(D) $n![f(x)]^{2n}$.

(3) 设 α 为常数,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$(　　)

(A) 绝对收敛.　　(B) 条件收敛.

(C) 发散.　　(D) 收敛性与 α 的取值有关.

(4) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续,且 $f(0)=0$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$,则在点 $x=0$ 处(　　)

(A) 不可导.　　(B) 可导,且 $f'(0)\neq 0$.

(C) 取得极大值.　　(D) 取得极小值.

(5) 已知 $\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解,$\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,k_1,k_2 为任意常数,则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解(一般解)必是(　　)

(A) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.　　(B) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

(C) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.　　(D) $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$.

三、(本题满分 15 分,每小题 5 分。)

(1) 求 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\mathrm{d}x$.

(2) 设 $z=f(2x-y, y\sin x)$,其中 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(3) 求微分方程 $y''+4y'+4y=\mathrm{e}^{-2x}$ 的通解(一般解).

四、(本题满分 6 分。)

求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域,并求其和函数.

五、(本题满分 8 分。)

求曲面积分 $I=\iint\limits_S yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 外侧在 $z\geqslant 0$ 的部分.

六、(本题满分 7 分。)

设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间(a,b) 内可导,且 $f(a)=f(b)$. 证明在(a,b) 内至少存在一点 ξ,使得 $f'(\xi)>0$.

七、(本题满分 6 分。)

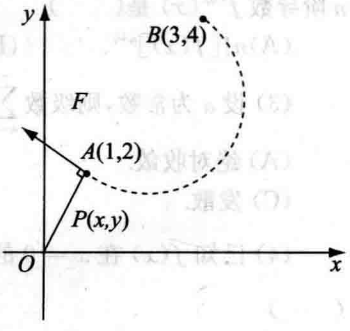
设四阶矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$,且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足关系式 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为四阶单位矩阵,$\boldsymbol{C}^{-1}$ 表示 $\boldsymbol{C}$ 的逆矩阵,$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{C}$ 的转置矩阵. 将上述关系式简化并求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

八、(本题满分 8 分。)

求一个正交变换,化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$ 为标准形.

九、(本题满分 8 分。)

质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周,从点 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3,4)$ 的过程中受变力 $\boldsymbol{F}$ 作用(见图). $\boldsymbol{F}$ 的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离,其方向垂直于线段 OP,且与 y 轴正向的夹角小于$\frac{\pi}{2}$,求变力 $\boldsymbol{F}$ 对质点 P 所作的功.



十、填空题(本题满分 6 分,每小题 2 分。)

(1) 已知随机变量的概率密度函数 $f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$,$-\infty<x<+\infty$,则 X 的概率分布函数 $F(X)=$ ________.

(2) 设随机事件 A、B 及其和事件 $A\cup B$ 的概率分别是 0.4,0.3 和 0.6,若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件,那么积事件 $A\overline{B}$ 的概率 $P(A\overline{B})=$ ________.

(3) 已知离散型随机变量 X 服从参数为 2 的泊松(Poisson)分布,即 $P\{X=k\}=\frac{2^k\mathrm{e}^{-2}}{k!}$,$k=0,1,2\cdots$,则随机变量 $Z=3X-2$ 的数学期望 $E(Z)=$ ________.

十一、(本题满分 6 分。)

设二维随机变量(X,Y) 在区域 D:$0<x<1$,$|y|<x$ 内服从均匀分布,求关于 X 的边缘概率密度函数及随机变量 $Z=2X+1$ 的方差 $D(Z)$.

1990 答案速查表

题号	答案	详解对应页码
一、填空题		
(1)	$x-3y-z+4=0$	P31
(2)	e^{2a}	P3
(3)	1	P3
(4)	$\frac{1}{2}(1-e^{-4})$	P46
(5)	2	P107
二、选择题		
(1)	A	P25
(2)	A	P9
(3)	C	P67
(4)	D	P19
(5)	B	P112
三、		
(1)	$\frac{1}{3}\ln 2$	P25
(2)	$-2f''_{11}+(2\sin x-y\cos x)f''_{12}+y\sin x\cos xf''_{22}+\cos xf'_2$	P37
(3)	$y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\frac{1}{2}x^2e^{-2x}$,其中 C_1,C_2 为常数	P82
四、	$\frac{x+1}{(1-x)^2}(\|x\|<1)$	P73
五、	12π	P62
六、	略	P13
七、	$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$	P98

八、	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$	P123
九、	$2(\pi-1)$	P53
十、		
(1)	$\begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x<0, \\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x\geqslant 0 \end{cases}$	P135
(2)	0.3	P131
(3)	4	P146
十一、	$\frac{2}{9}$	P142

1991 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题

一、填空题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分。)

(1) 设$\begin{cases} x = 1 + t^2, \\ y = \cos t, \end{cases}$ 则$\dfrac{d^2 y}{dx^2} =$ ________.

(2) 由方程 $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2}$ 所确定的函数 $z = z(x,y)$ 在点$(1,0,-1)$处的全微分 $dz =$ ________.

(3) 已知两条直线的方程是 $L_1: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{0} = \dfrac{z-3}{-1}$;$L_2: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1}$,则过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程是________.

(4) 已知当 $x \to 0$ 时,$(1 + ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小,则常数 $a =$ ________.

(5) 设 4 阶方阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1} =$ ________.

二、选择题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分。)

(1) 曲线 $y = \dfrac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}$(　　)

(A) 没有渐近线.　　(B) 仅有水平渐近线.

(C) 仅有铅直渐近线.　　(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线.

(2) 若连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x) = \int_0^{2x} f\left(\dfrac{t}{2}\right) dt + \ln 2$,则 $f(x)$ 等于(　　)

(A)$e^x \ln 2$.　　(B)$e^{2x} \ln 2$.　　(C)$e^x + \ln 2$.　　(D)$e^{2x} + \ln 2$.

(3) 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = 2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 5$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 等于(　　)

(A)3.　　(B)7.　　(C)8.　　(D)9.

(4) 设 D 是平面 xOy 上以$(1,1)$、$(-1,1)$和$(-1,-1)$为顶点的三角形区域,D_1 是 D 在第一象限的部分,则$\iint\limits_D (xy + \cos x \sin y) dxdy$ 等于(　　)

(A)$2\iint\limits_{D_1} \cos x \sin y dxdy$.　　(B)$2\iint\limits_{D_1} xy dxdy$.

(C)$4\iint\limits_{D_1} (xy + \cos x \sin y) dxdy$.　　(D)0.

(5) 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 满足关系式 $\boldsymbol{ABC} = \boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位阵,则必有(　　)

(A)$\boldsymbol{ACB} = \boldsymbol{E}$.　　(B)$\boldsymbol{CBA} = \boldsymbol{E}$.　　(C)$\boldsymbol{BAC} = \boldsymbol{E}$.　　(D)$\boldsymbol{BCA} = \boldsymbol{E}$.

三、(本题满分 15 分,每小题 5 分。)

(1) 求$\lim\limits_{x \to 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$.

(2) 设 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的指向外侧的法向量，求函数 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向的 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数.

(3) 求 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}V$，其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases} y^2=2z, \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而形成的曲面与平面 $z=4$ 所围成的立体.

四、(本题满分 6 分)

在过点 $O(0,0)$ 和 $A(\pi,0)$ 的曲线族 $y=a\sin x(a>0)$ 中，求一条曲线 L，使沿该曲线从 O 到 A 的积分 $\int_L(1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$ 的值最小.

五、(本题满分 8 分。)

将函数 $f(x)=2+|x|\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数，并由此求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和.

六、(本题满分 7 分。)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，且 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(0)$，证明在 $(0,1)$ 内存在一点 c，使 $f'(c)=0$.

七、(本题满分 8 分。)

已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3,5)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,4,a+8)$，及 $\boldsymbol{\beta}=(1,1,b+3,5)$.

(1) a、b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$、$\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合？

(2) a、b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 有 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$、$\boldsymbol{\alpha}_4$ 的唯一的线性表达式?并写出该表示式.

八、(本题满分 6 分。)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定阵，$\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位阵，证明 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的行列式大于 1.

九、(本题满分 8 分。)

在上半平面求一条向上凹的曲线，其上任一点 $P(x,y)$ 处的曲率等于此曲线在该点的法线段 PQ 长度的倒数(Q 是法线与 x 轴的交点)，且曲线在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴平行.

十、填空题(本题满分 6 分，每小题 3 分。)

(1) 设随机变量 X 服从均值为 2，方差为 σ^2 的正态分布，且 $P\{2<x<4\}=0.3$，则 $P\{x<0\}=$ ________.

(2) 随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$ (a 为正常数) 内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\dfrac{\pi}{4}$ 的概率为________.

十一、(本题满分 6 分。)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} 2\mathrm{e}^{-(x+2y)}, & x>0,y>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 求随机变量 $Z=X+2Y$ 的分布函数.

1991 答案速查表

题号	答案	详解对应页码
一、填空题		
(1)	$\dfrac{\sin t - t\cos t}{4t^3}$	P9
(2)	$dx - \sqrt{2}dy$	P37
(3)	$x - 3y + z + 2 = 0$	P31
(4)	$-\dfrac{3}{2}$	P3
(5)	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$	P99
二、选择题		
(1)	D	P19
(2)	B	P83
(3)	C	P67
(4)	A	P46
(5)	D	P99
三、		
(1)	$e^{-\frac{\pi}{2}}$	P3
(2)	$\dfrac{11}{7}$	P41
(3)	$\dfrac{256}{3}\pi$	P48
四、	$y = \sin x, x \in [0, \pi]$	P53
五、	$\dfrac{\pi^2}{6}$	P78
六、	略	P14
七、	$(1)a = -1, b \neq 0$; $(2)a \neq -1$	P106

八、	略	P126
九、	$y=\frac{1}{2}(e^{x-1}+e^{1-x})$	P83
十、		
(1)	0.2	P136
(2)	$\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$	P131
十一、	$F(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ 1-e^{-z}-ze^{-z}, & z\geqslant 0.\end{cases}$	P144

1992 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题

一、填空题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分,把答案填在题中横线上)

(1) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}+\cos(xy)=0$ 确定,则$\dfrac{dy}{dx}=$ ________.

(2) 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $\mathbf{grad}u\Big|_M=$ ________.

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\leqslant 0,\\ 1+x^2, & 0<x\leqslant\pi,\end{cases}$ 则其以 2π 为周期的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于 ________.

(4) 微分方程 $y'+y\tan x=\cos x$ 的通解为 $y=$ ________.

(5) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{pmatrix}$,其中 $a_i\neq 0,b_i\neq 0,i=1,2,\cdots,n$,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=$ ________.

二、选择题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分。)

(1) 当 $x\to 1$ 时,函数$\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限(　　)

(A) 等于 2.　　(B) 等于 0.　　(C) 为 ∞.　　(D) 不存在但不为 ∞.

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{\alpha}{n}\right)$(常数 $\alpha>0$)(　　)

(A) 发散.　　(B) 条件收敛.　　(C) 绝对收敛.　　(D) 收敛性与 α 有关.

(3) 在曲线 $x=t,y=-t^2,z=t^3$ 的所有切线中,与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线(　　)

(A) 只有 1 条.　　(B) 只有 2 条.　　(C) 至少有 3 条.　　(D) 不存在.

(4) 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$,则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为(　　)

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

(5) 要使 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ 都是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解,只要系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为(　　)

(A)$(-2,1,1)$.　　(B)$\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

(C)$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$.　　(D)$\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 4 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

三、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分。)

(1) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$.