INTERESTING ELEMENTARY FUNCTION STUDY AND APPRECIATION (I)

趣味初等函数研究与欣赏（上）

● 邓寿才　编著

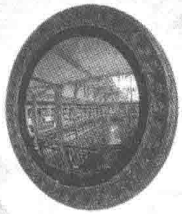
$$\sum_1^5 kx_k = a$$

$$\sum_1^5 k^3 x_k = a^2$$

$$\sum_1^5 k^5 x_k = a^3$$

HITP 哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

INTERESTING ELEMENTARY FUNCTION STUDY AND APPRECIATION (I)



趣味初等函数研究与欣赏（上）

● 邓寿才　编著

$\sum_1^5 k^5 x_k = a^3$

$\sum_1^5 k^3 x_k = a^2$

$\sum_1^5 k x_k = a$

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书详细而全面地介绍了初等函数的相关概念、研究方法及初等函数趣题，并详细介绍了初等函数的各种性质、函数题常用的解题方法及函数题的一题多解，供读者参考.

本书可作为大、中学生及初等数学爱好者学习初等函数的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

趣味初等函数研究与欣赏. 上/邓寿才编著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2017. 1

ISBN 978 - 7 - 5603 - 6177 - 2

Ⅰ. ①趣… Ⅱ. ①邓… Ⅲ. ①初等函数 - 研究 Ⅳ. ①O171

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 209595 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　刘春雷
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451 - 86414749
网　　址　http://hitpress. hit. edu. cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm × 1092mm　1/16　印张 17. 75　字数 310 千字
版　　次　2017 年 1 月第 1 版　2017 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978 - 7 - 5603 - 6177 - 2
定　　价　48. 00 元

◎目录

基本内容简介

第一章

1.1 映射与函数

映射 设 A,B 是两个集合,如果按照某种对应法则 f,对于集合 A 中的任何一个元素,在集合 B 中都有唯一的元素与它对应,这样的对应叫作从集合 A 到集合 B 的映射,记作

$$f:A\to B$$

象和原象 如果给定一个从集合 A 到集合 B 的映射,那么,A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b 叫作 a 的象,a 叫作 b 的原象,为了便于理解与记忆,可简单表示为

$$A:a(\text{原象})\leftrightarrow B:b(\text{象})$$

到内和到上的映射 设 $f:A\to B$ 是 A 到 B 的映射,如果在 f 的作用下,象集合 $C\subset B$,就称 $f:A\to B$ 是 A 到 B 内的映射;如果在 f 的作用下,象集合 $C=B$,则称 $f:A\to B$ 是 A 到 B 上的映射.

一一映射 如果映射 $f:A\to B$ 满足:集合 A 中不同的元素,在集合 B 中有不同的象,并且 B 中的每一个元素都有原象,那么,这个映射就叫作 A 到 B 上的一一映射.

逆映射 设 $f:A\to B$ 是集合 A 到集合 B 上的一一映射,如果 B 中每一个元素 b,使 b 在 A 中的原象 a 和它对应,这样得到的映射叫作映射 $f:A\to B$ 的逆映射,记作 $f^{-1}:B\to A$.(注:只有一一映射才有逆映射;映射 $f:A\to B$ 的逆映射 $f^{-1}:B\to A$ 也是一一映射.)

函数 如果 $f:A\to B$ 是从集合 A 到集合 B 上的映射,并且 A,B 都是非空集合时,就称这个映射 $f:A\to B$ 是从定义域 A 到值域 B 上的函数,记作

$$y=f(x)\quad (x\in A, y\in B)$$

用一一映射,逆映射定义反函数 如果确定函数 $y=f(x)$ 的映射 $f:A\to B$ 是 $f(x)$ 的定义域 A 到值域 B 上的一一映射. 那么这个映射的逆映射所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$ 叫作函数 $y=f(x)$ 的反函数.

说明 (1)习惯上,我们一般用 x 表示自变量,用 y 表示函数,因此将函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x,y 互换,写成 $y=f^{-1}(x)$.

(2)函数 $y=f(x)$ 的定义域正好是它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的值域;函数 $y=f(x)$ 的值域正好是它的反函数的定义域.

(3)函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数(函数 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域常常是通过求函数 $y=f(x)$ 的值域得到).

区间 设 a,b 是两个实数,且 $a<b$,规定:

(1)闭区间:满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集合叫作闭区间,表示为 $[a,b]$;

(2)半开半闭区间:满足 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 的实数 x 的集合叫作半开半闭区间,分别表示为 $[a,b)$,$(a,b]$,这里的实数 a,b 都叫作相应区间的端点.

(3)开区间:满足 $a<x<b$ 的实数 x 的集合叫作开区间,表示为 (a,b).

(4)无穷区间:满足 $x\geqslant a, x>a, x\leqslant b, x<b$ 的实数 x 的集合都称为无穷区间,分别表示为 $[a,+\infty)$,$(a,+\infty)$,$(-\infty,b]$,$(-\infty,b)$,全体实数也可以用区间表示为 $(-\infty,+\infty)$.

反函数的求法 式子 $y=f(x)$ 表示 y 是自变量 x 的函数,设它的定义域是 A,值域为 C,我们从式子 $y=f(x)$ 中解出 x,得到式子 $x=\varphi(y)$,如果对于 y 在 C 中的任何一个值,通过式子 $x=\varphi(y)$,x 在 A 中有唯一的值和它对应,那么式子 $x=\varphi(y)$ 就表示 x 是自变量 y 的函数,这样的函数 $x=\varphi(y)$,叫作函数 $y=f(x)$ 的反函数,记作 $x=f^{-1}(y)$,改写为 $y=f^{-1}(x)$.

如:函数 $f(x)=kx+b(k\neq 0)$ 的定义域为 $x\in\mathbf{R}$,值域为 $y\in\mathbf{R}$,由

$$y=kx+b$$

解出

$$x=\frac{y}{k}-\frac{b}{k}$$

再改写为

$$y=\frac{x}{k}-\frac{b}{k}\quad (k\neq 0)$$

这就是所求的反函数.

1.2　函数分类

如果把数学比喻为一株参天大树,那么函数就是大树的主干,即函数思想贯穿整个数学世界,使得数学世界山清水秀,鸟语花香,使得数学世界五彩缤纷,风光迷人.

从不同的视角,我们可以对函数进行不同的分类

$$\text{初等函数}\begin{cases}\text{初等超越函数}\\ \text{初等代数函数}\begin{cases}\text{无理函数}\\ \text{有理函数}\begin{cases}\text{有理整函数}\\ \text{有理分函数}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

其中,初等超越函数的解析式是初等超越式,无理函数的解析式是无理式,有理整函数的解析式是多项式,有理分函数的解析式是分式,即上面以函数解析式进行分类,从这种分类讲,多项式(包括分解因式与恒等式)、方程、代数式化简也可列入函数的内容.

初等函数仅指代数显函数,通常又简称为代数函数,严格地讲,代数函数具有更为广泛的意义:不是代数函数的函数称为超越函数,如

$$y=A\sin(\omega x+\varphi_0)\quad (A\neq 0)$$

$$y=\ln\sqrt{x}\quad (x>0)$$

$$y=x^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

$$y=a^x\quad (a\neq 1)$$

$$y=\arccos x$$

而有的书刊上,干脆以函数的性质命名、分类,即如果某函数 $y=f(x)$ 具有什么性质,就称为什么函数(表 1.1).

表 1.1

名称	举例
1. 对称函数	$f(x,y)=k(x^2+y^2)$
2. 单调函数	$y=mx^3+b$
3. 周期函数	$y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$, $y_n=f(n)=2(-1)^n$
4. 连续函数	$y=kx+b\quad (k\neq 0, x\in \mathbf{R})$

续表 1.1

名称	举例
5. 凸函数	$y=\tan x \quad (x\in(0,\frac{\pi}{2}))$
6. 凹函数	$y=\sin x \quad (x\in(0,\pi))$
7. 离散函数	$f(n)=2n-1 \quad (n\in\mathbf{N}^*)$
8. 分段函数	$y=\begin{cases}0 & (x>0)\\ -x^2 & (x\leqslant 0)\end{cases}$
9. 正比例函数	$y=5x-2$
10. 反比例函数	$y=\frac{2}{x} \quad (x\neq 0)$
11. 增函数	$y=x^3+x^2+x+1 \quad (x\geqslant 0)$
12. 减函数	$y=\frac{1}{x}(x>0), y=-x^2$
13. 二次函数	$y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$
14. 奇函数	$y=x^3+x$
15. 偶函数	$y=x^4+x^2$
16. 复合函数	$f(x)=g^2(x)+\sqrt{g(2x)}, g(x)=2x$
17. 复变函数	$f(x)=g(x)+ki, g(x)=\frac{a+di}{a+bi}$
18. 三角函数	$f(x)=A\sin mx+B\cos nx$

说明 函数 $y=f(x)$ 中,对于自变量 x 的不同取值有着不同的对应法则,这样的函数通常称为分段函数,如函数

$$y=f(x)=\begin{cases}2x, x\in[0,+\infty)\\ -1, x\in(-\infty,0)\end{cases}$$

就是分段函数. 注意,分段函数是一个函数,而不是两个或多个函数.

1.3 函数的基本性质

1. 对称性:设函数 $f(x), x\in D$ 的定义域 D 关于原点对称,则

$$-D=\{-x \mid x\in D\}=D$$

2. 奇偶性：如果对所有的 $x\in D$（即定义域 D 内的所有 x），均有

$$f(-x)=-f(x)\quad(x\in D)$$

则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

如果对所有的 $x\in D$，均有

$$f(-x)=f(x)\quad(x\in D)$$

则称函数 $f(x)$ 为偶函数.

3. 单调性：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果对任意 $x_1,x_2\in D_1\subset D$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说 $y=f(x)$ 在 D_1 上是增函数；如果当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就说 $y=f(x)$ 在 D_1 上是减函数，其中 D_1 叫作函数 $f(x)$ 的单调区间.

4. 周期性：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个非零常数 T，使得对每个 $x\in D$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是周期函数，T 称作 $f(x)$ 的一个周期，如果 $f(x)$ 的所有正周期中存在最小值 T_0，那么这个 T_0 称为周期函数 $f(x)$ 的最小正周期.

如果奇函数与偶函数体现了函数的某种对称不变性，那么周期函数体现了函数的平移不变性.

5. 连续性

定义 1（函数在一点处的连续性）　设 x_0 是函数 $f(x)$ 的定义域 D 中的某点，如果对于任一极限为 x_0 的序列 $\{x_n\}\subset D$，均有 $f(x_n)\to f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 处是连续的.

定义 2（函数在区间上的连续性）　设函数的定义域为 D，区间 I 是 D 的子集，如果在 I 中的任意点 x 处，函数 $f(x)$ 均连续，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是连续的.

6. 凹凸性：设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数，如果对于任意的 $x,y\in I$ 和任意的 $t\in[0,1]$，均有

$$f(tx+(1-t)y)\leqslant tf(x)+(1-t)f(y)$$

则称 f 在 I 上是凸函数，相应地，如果对于任意的 $x,y\in I$ 和任意的 $t\in[0,1]$，均有

$$f(tx+(1-t)y)\geqslant tf(x)+(1-t)f(y)$$

则称 f 在 I 上是凹函数.

设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数，如果对于任意的 $x,y\in I,x\neq y$ 和任意的 $t\in(0,1)$ 均有

$$f(tx+(1-t)y)<tf(x)+(1-t)f(y)$$

则称 f 在 I 上是严格凸函数，相应地，如果对于任意的 $x,y\in I,x\neq y$ 和任意的 $t\in(0,1)$ 均有

$$f(tx+(1-t)y)>tf(x)+(1-t)f(y)$$

则称 f 在 I 上是严格凹函数.

在高等数学中，有时还要考虑函数的发散性、收敛性、可导性、可积性等.

1.4　函数的基本要素

1. 函数的定义域：函数关系（如 $y=f(x)$）中自变量（如 x）的取值集合叫作函数的定义域（通常记为 D），求用解析式表示的函数的定义域，就是求使函数各个组成部分有意义的集合的交集，对实际问题中函数关系的定义域，还需要考虑实际问题的条件.

2. 函数值：函数 $y=f(x)$ 当 x 在定义域内取一个确定的值 a 时，对应的 y 值称为函数值，记作 $f(a)$.

3. 函数的值域：对于定义域内的所有 x 值对应的函数值形成的集合，叫作函数的值域.

函数的概念中，定义域，值域，对应法则是它的三要素，但最重要的是对应法则和定义域，而值域则是由定义域与对应法则确定的，两个函数当且仅当其定义域与对应法则均相同时才是相同的函数.

此外，在中学数学中还要重点学习表 1.2 中的三种函数.

表 1.2

名称	解析式
幂函数	$y=x^a\quad(a\in\mathbf{R})$
指数函数	$y=a^x\quad(a>0,a\neq1)$
对数函数	$y=\log_a x\quad(a>0,a\neq1)$

1.5 重要基本定理

1. 中值定理:设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,则$f(x)$在$[a,b]$内可取遍一切$f(a)$与$f(b)$之间的函数值.

2. 零点存在定理:设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,$f(a)$和$f(b)$异号,则在$[a,b]$中$f(x)$至少有一个零点(使得$f(x)=0$的x).

3. 最值定理:设$f(x)$是区间$[a,b]$上的连续函数,则一定存在$c\in[a,b]$,使得$f(c)$是该区间上的最大值,即任取$x\in[a,b]$,$f(x)\leqslant f(c)$,同样地,也一定存在$d\in[a,b]$,使得$f(d)$是该区间上的最小值,即任取$x\in[a,b]$,$f(x)\geqslant f(d)$.

注 中值定理是一个表明存在性的定理,它有一个直接的推论,它在方程求根(尤其是数值方法求近似根)时有相当大的作用,从而产生了零点存在定理.

最值定理也是一个表明存在性的定理,它和中值定理结合可以得到结论:连续函数将闭区间映射到闭区间(或一点),开区间(a,b)上的凸函数一定连续,闭区间$[a,b]$上的凸函数至多在端点处不连续.

说明 笔者编写的这本关于初等函数的书,其重点不在于研究初等函数的系统理论,而在于:(1)将关于初等函数的名题、妙题、趣味题精挑细选一部分出来,然后进行简单分类;(2)对部分经典美妙的好题,力求多提供一些解法,以体现出解题方法与技巧;(3)力求让数学的简洁美、和谐美、奇异美、对称美、趣味美等绽放出芳香艳丽的花朵,让数学世界五彩缤纷,美妙无穷…….

反比例函数与二次函数

第二章

2.1 知识概括

反比例函数与二次函数是初中中考与初中竞赛必考的重点，也是初中数学的难点.

我们先简单介绍.

1. 一次函数

函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 称为一次函数，其函数图像是一条直线. 若 $b=0$，则称函数 $y=kx$ 为正比例函数，故正比例函数是一次函数的特殊情况.

当 $k>0$ 时，函数 $y=kx+b$ 是单调递增函数；当 $k<0$ 时，$y=kx+b$ 是单调递减函数.

2. 反比例函数

函数 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq0)$ 称为反比例函数，其函数图像是双曲线.

下面对 k 分两种情况进行讨论，并将结果列于表 2.1.

表 2.1

	$x>0$	$x<0$	图像	增减性
$k>0$	减函数	减函数	一、三象限	减函数
$k<0$	增函数	增函数	二、四象限	增函数

3. 二次函数

设 a,b,c 均为常数，并且 $a\neq0$，则称函数

$$y=ax^2+bx+c$$

为二次函数,其图像称为抛物线,抛物线是轴对称图形.

(1)二次函数的形式

一般式:$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$;

顶点式:$y=a(x-m)^2+k(a\neq0)$;

交点式:$y=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq0,x_1,x_2$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根).

(2)二次函数的性质

$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的对称轴为 $x=-\frac{b}{2a}$,顶点坐标为$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

当 $a>0$ 时,在 $x\leqslant-\frac{b}{2a}$时,$y=ax^2+bx+c$ 单调递减,在 $x\geqslant-\frac{b}{2a}$时,单调递增,当 $x=-\frac{b}{2a}$时,y 有最小值

$$y_{\min}=\frac{4ac-b^2}{4a}$$

当 $a<0$ 时,在 $x\leqslant-\frac{b}{2a}$时,$y=ax^2+bx+c$ 单调递增,在 $x\geqslant-\frac{b}{2a}$时,单调递减,当 $x=-\frac{b}{2a}$时,y 有最大值

$$y_{\max}=\frac{4ac-b^2}{4a}$$

(3)二次函数与二次方程的关系

$$y=ax^2+bx+c(a\neq0),ax^2+bx+c=0,\Delta=b^2-4ac(a\neq0)$$

图像与 x 轴有两个交点;方程有两个不等的根;$\Delta>0$;

图像与 x 轴有一个交点;方程有两个相等的根;$\Delta=0$;

图像与 x 轴没有交点;方程没有实数根;$\Delta<0$.

2.2　A 组 妙 题

题 1　求函数 $y=x^2+x+1$ 与直线 $y=2x-2$ 的图像最近点之间的距离.

分析　如图 2.1 所示,二次函数

$$y=x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$$

是开口向上的抛物线. 它的顶点为$(-\frac{1}{2},\frac{3}{4})$,对称轴为$x=-\frac{1}{2}$. 而直线

$$l:y=2x-2$$

的斜率为2,若将l平移至恰好与抛物线相切时,设其切点为$P(x_0,y_0)$,则P到l的距离才最近;另外,也可以在抛物线上选一点$M(x_0,y_0)$,表示出M到l的距离(应用点到直线的距离公式),并配方进行判断即可求出点M的坐标与最近距离,因此,我们可用两种方法解答本题.

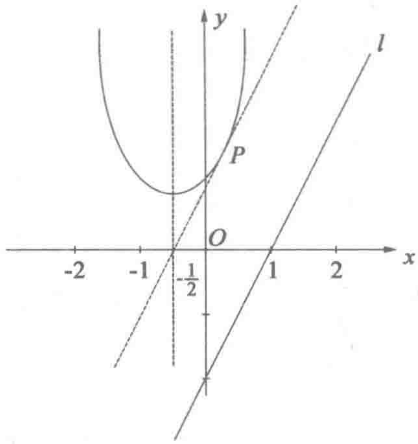


图 2.1

解法 1　因为直线(设为l)$y=2x-2$的斜率为2,于是可设与l平行且与抛物线相切的直线方程为

$$y=2x+m \tag{1}$$

与抛物线方程

$$y=x^2+x+1 \tag{2}$$

联立得

$$x^2+x+1=2x+m$$

整理为

$$x^2-x-(m-1)=0 \tag{3}$$

由于直线$y=2x+m$与抛物线相切,因此方程(3)的判别式为0,即

$$(-1)^2+4(m-1)=0\Rightarrow m=\frac{3}{4}$$

代入方程(3)得

$$x^2-x+\frac{1}{4}=0\Rightarrow x_0=\frac{1}{2}$$

代入式(2)得 $y_0=\frac{7}{4}$，所以切点 P 的坐标为 $P(\frac{1}{2},\frac{7}{4})$，于是所求最近距离为

$$d_{\min}=\frac{|2x_0-y_0-2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left|2\times\frac{1}{2}-\frac{7}{4}-2\right|=\frac{11\sqrt{5}}{20}$$

解法 2　设 $M(x_0,y_0)$ 为二次函数上的一个动点，则

$$y_0=x_0^2+x_0+1$$

那么，点 M 到直线 $y=2x-2$ 的距离为

$$\begin{aligned} d&=\frac{|2x_0-y_0-2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}|2x_0-(x_0^2+x_0+1)-2| \\ &=\frac{1}{\sqrt{5}}|x_0^2-x_0+3|=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[(x_0-\frac{1}{2})^2+\frac{11}{4}\right]\end{aligned}$$

可知，当 $x_0=\frac{1}{2}$ 时，$d_{\min}=\frac{11\sqrt{5}}{20}$；且当 $x_0=\frac{1}{2}$ 时，$y_0=\frac{7}{4}$，即所求点为 $M(\frac{1}{2},\frac{7}{4})$.

评注　本题虽然是一道解析几何题，但难度并不大，作为初中二次函数综合题是比较适合的，前面的解法 1 巧妙利用直线平移原理与曲线切线原理，轻松解答了题目；解法 2 单刀直入，先设 $M(x_0,y_0)$ 为已知二次曲线上的任一个动点，利用点到直线的距离公式，再结合配方法解出了题目.

题 2　已知 $y=ax^2+bx+c(a>0,b>0,c>0)$ 且 $a+b+c=1$，而且方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实数根，证明

$$\max\{a,b,c\}\geqslant\frac{4}{9}$$

分析　题目的已知条件告诉我们，如果设二次函数

$$y=f(x)=ax^2+bx+c$$

那么，有 $f(1)=a+b+c=1$，再结合 $a,b,c>0$ 知 $a,b,c\in(0,1)$，于是 $\max\{a,b,c\}\in[\frac{1}{3},1)$，即

$$1>\max\{a,b,c\}\geqslant\frac{1}{3}$$

但 $\frac{1}{3}<\frac{4}{9}$，所以距我们的目标还有“一步之遥”.

证明　(1)如果 $b\geqslant\frac{4}{9}$，结论成立；

如果 $b<\dfrac{4}{9}$，那么

$$a+c=1-b>\frac{5}{9}$$

如果 $a\geqslant\dfrac{4}{9}$，结论成立；

(2) 设 $a<\dfrac{4}{9}\Rightarrow c>\dfrac{5}{9}-a>\dfrac{1}{9}$，且有

$$c>\frac{5}{9}-a\Rightarrow a>\frac{5}{9}-c$$

又因为方程

$$ax^2+bx+c=0$$

有实数根，那么

$$b^2-4ac\geqslant 0$$

$$\Rightarrow ac\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^2=\frac{4}{81}$$

$$\Rightarrow c\left(\frac{5}{9}-c\right)<ac\leqslant\frac{4}{81}$$

$$\Rightarrow c^2-\frac{5}{9}c+\frac{4}{81}\geqslant 0$$

$$\Rightarrow c\geqslant\frac{4}{9}\text{或 }c\leqslant\frac{1}{9}$$

但这与前面的假设 $a<\dfrac{4}{9}$，$c>\dfrac{1}{9}$矛盾！所以只能 $c\geqslant\dfrac{4}{9}$，从而结论成立.

评注　题目的已知条件不多，带有普遍性，而要求证明的结论却显得奇特，其证法采用了常规的分析与反证相结合的方法，略显抽象. 总之，题目揭示了二次函数的一个奇特性质.

对于 $a>0,b>0,c>0$ 及已知正常数 k，如果满足 $a+b+c=k$，那么

$$\frac{a}{k}+\frac{b}{k}+\frac{c}{k}=1$$

利用题目的结论，作置换

$$(a,b,c)\rightarrow\left(\frac{a}{k}+\frac{b}{k}+\frac{c}{k}\right)$$

有

$$\max\left\{\frac{a}{k}+\frac{b}{k}+\frac{c}{k}\right\}\geqslant\frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow\max\{a+b+c\}\geqslant\frac{4}{9}k$$

这一结论是耐人寻味的.

题 3　求出函数

$$y=5\sqrt{4+x^2}-3x \tag{1}$$

的最值.

分析　这是一个无理函数,可以先判断函数值 y 的正负性,再把变形式

$$3x+y=5\sqrt{4+x^2}$$

两边平方,整理成关于 x 为自变量的一元二次方程(将 y 视为函数),利用判别式 $\Delta\geqslant 0$ 得到关于 y 的不等式,再从此不等式解出 y 来,即可求出函数 y 的最值.

另外,也可注意观察函数(1)的结构,进行巧妙代换求解,还可应用导数方法求解,因此我们可用三种方法解本题.

解法 1　我们将函数 y 的解析式变化为

$$y=\frac{(5\sqrt{4+x^2})^2-(3x)^2}{5\sqrt{4+x^2}+3x}=\frac{100+16x^2}{5\sqrt{4+x^2}+3x}>0$$

又由

$$3x+y=5\sqrt{4+x^2}$$

$$\Rightarrow 9x^2+6xy+y^2=25(4+x^2)$$

$$\Rightarrow 16x^2-6xy-(y^2-100)=0 \tag{2}$$

由于 x,y 均为实数,因此方程(2)有实数解,其判别式

$$\Delta_x=(-6y)^2+4\times 16(y^2-100)\geqslant 0$$

$$\Rightarrow y^2\geqslant 64\Rightarrow y\geqslant 8\text{(因 }y>0\text{)}$$

$$\Rightarrow y_{\min}=8$$

当 $y=8$ 时,方程(2)变为

$$4x^2-12x+9=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

即当 $x=\frac{3}{2}$ 时,$y_{\min}=8$.

解法 2　由式(1)的结构特征,可作巧妙代换

$$x=t-\frac{1}{t}\quad(t>0)$$

$$\Rightarrow y=5\sqrt{4+(t-\frac{1}{t})^2}-3(t-\frac{1}{t})$$