2004年上海大学博士学位论文 50

Boussinesq方程的稳定性

作　者：陈达段
专　业：流体力学
导　师：施惟慧

上海大学出版社
·上海·

2004年上海大学博士学位论文

Boussinesq 方程的稳定性

作　者：　陈达段
专　业：　流体力学
导　师：　施惟慧

上海大学出版社
· 上海 ·

Shanghai University Doctoral Dissertation (2004)

The Stability of Boussinesq Equation

Candidate: Chen Da-duan
Major: Fluid Mechanics
Supervisor: Prof. Shi Wei-hui

Shanghai University Press
• Shanghai •

上 海 大 学

本论文经答辩委员会全体委员审查，确认符合上海大学博士学位论文质量要求.

答辩委员会名单:

主任:	李邦河	院士, 中国科学院数学与系统研究院	100080
委员:	戴世强	教授, 上海大学应用数学和力学研究所	200072
	周锦诚	教授, Univ. de Perpinan, FRANCE	F66000
	J.A.Marti	教授, Univ. des Antilles et de La Guyane	F97159
	张　铭	教授, 中国人民解放军理工大学	211101
	黄思训	教授, 中国人民解放军理工大学	211101
	盛万成	教授, 上海大学数学系	200444
导师:	施惟慧	教授, 上海大学	200072

评阅人名单:

李雅卿	研究员，中国科学院数学与系统研究院	100080
张　铭	教授，中国人民解放军理工大学	211101
黄思训	教授，中国人民解放军理工大学	211101

评议人名单:

周锦诚	教授，Univ. de Perpinan, FRANCE	F66000
郑　权	教授，上海大学数学系	200444
石钟锐	教授，上海大学数学系	200444
李　乔	教授，上海交通大学应用数学系	200030

答辩委员会对论文的评语

“Boussinesq 方程的稳定性”一文运用分层理论研究了一般的 Boussinesq 方程，关于干空气的 Boussinesq 方程，以 Reyleigh 摩擦力代替湍流粘性力、Newton 冷却代替热耗散效应的 Boussinesq 方程的稳定性以及它们的初边值问题的适定性，并给出实例. 对适定的定解问题给出唯一稳定解；对不适定问题，给出形式解.

对 Boussinesq 方程性质的研究以及对定解问题适定性的讨论涉及到相应大气模式的合理性、可靠性等前沿问题，所以本论文的选题具有重要的理论意义和潜在的应用价值.

该论文的研究在以下方面有所创新:

(1) 运用拓扑学的方法研究了描述大气中尺度运动的 Boussinesq 方程组的拓扑学性质;

(2) 对方程组的定解问题进行讨论，并得到了有新意义的结论;

(3) 给出了该方程组定解问题的计算机符号求解的程序.

论文反映出作者具有扎实的基础理论和系统的专门知识，表明作者具有独立的科研能力和钻研精神. 论文立论正确、层次分明、条理清楚、结果合理. 在答辩过程中，回答问题正确、思路敏捷、条理清楚.

答辩委员会表决结果

经答辩委员会表决，全票同意通过陈达段同学的博士学位论文答辩，建议授予理学博士学位.

答辩委员会主席：李邦河

2004 年 5 月 26 日

摘 要

Boussinesq 方程是大气运动方程组的一种简化模式. 它适用于中小尺度的、非静力平衡的、准不可压缩的、地转的层结流体的运动. 它的特点是:

1. 在连续性方程中忽略密度的个别变化，近似地作为不可压缩流体处理;

2. 在与重力相联系的(竖直方向上的)运动方程中则部分地考虑密度变化带来的影响——由密度差异产生的阿基米德浮力与重力的差值(净浮力);

3. 在状态方程和热力学方程中考虑密度变化的影响，但视密度变化仅为位温变化的结果，而不考虑压力的作用;

4. 把空气的分子粘性系数和分子热传导系数都当作常数处理;

5. 受地转产生的 Coriolis 力的作用;

6. 非静力平衡.

它的一般形式如下:

$$
\text{(A)}\qquad
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p - 2\vec{\Omega}\times\vec{V} - \vec{g} + \vec{F} \\
\nabla\cdot\vec{V} = 0 \\
\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dot{Q} + \Delta\theta \\
\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dot{Q}_q + \Delta q
\end{cases}
$$

如果讨论干空气问题，位温方程中的汇(源)项不受水气的影响，则也可去掉水气方程，剩下运动方程、连续性方程和位温方程共五个方程，u, v, w, p, θ 五个未知函数，方程组仍然闭合. 运动方程中的 $\bar{F}$ 主要考虑湍流粘性力，水平方向和垂直方向上的湍流粘性系数和热耗散系数均视为不同(但都作为常数处理)，在位温方程中还考虑由于空气的垂直运动引起的温度变化. 这时方程组形式为

$$
(\mathrm{B}) \quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\bar{V}}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p - 2\bar{\Omega}\times\bar{V} - \bar{g} + \left(K_M^H(\partial_{xx} + \partial_{yy}) + K_M^V\partial_{zz}\right)\bar{V} \\ \nabla\cdot\bar{V} = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = c(z)w + K_H^H\left(\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\right) + K_H^V\dfrac{\partial^2\theta}{\partial z^2} \end{cases}
$$

如果用 Reyleigh 摩擦力来替代湍流粘性力的作用，和 Newton 冷却来替代热耗散效应，这就有了以下的模式

$$
(\mathrm{C}) \quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\bar{V}}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p - 2\bar{\Omega}\times\bar{V} - \bar{g} - k\bar{V} \\ \nabla\cdot\bar{V} = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = c(z)w - k_1\theta \end{cases}
$$

本文的主要工作是对以上三个方程的稳定性以及它们的初边值问题的适定性进行研究.

本文的第二章介绍了分层理论的专用术语、基本概念、定义和定理，并用实例作出解释或验证. 此外还以一些常用的方程为例，求出了它们的准本方程、本方程，讨论了它们的 L-简单性.

本文的第三章应用分层理论的方法，对以上三个不同形式的

Boussinesq 模式的稳定性. 以及它们的初(边) 值问题的适定性进行了研究和分析，得到了如下结果：

1. 方程组(A) 是 0-简单的；横截层 $S^t_{3,k-1}(D)$ 非空；方程组是稳定的. 对于适当的初边值问题，存在唯一的稳定解. 但通常意义下的初值问题(这里指初值条件定义在超曲面 $\{t=t_0\}$ 上)则是不适定的. 给出了解空间的结构.

2. 方程组(B)是 1-简单的；横截层 $S^t_{3,k-1}(D)=\varPhi$；方程组是不稳定的；

对于在任何超曲面上给出的任何初边值条件，此方程的定解问题都不会有唯一的稳定解. 给出了存在形式解的充分必要条件.

3. 方程组(C) 是 0-简单的. 横截层 $S^t_{3,k-1}(D)$ 非空, 方程组是稳定的. 对于适当的初边值问题, 存在唯一稳定的 C^k $(k\geq 1)$ 解; 给出了解空间的结构.

给出了 3 个实例，对于适定的定解问题，求出了它的唯一稳定的解析解，对于两个不适定问题，则给出了 2 个以上的不同的形式解.

本文的第四章以 Navier-Stokes 方程为例，给出了求形式解的具体步骤.

关键词 分层理论, 稳定性, 形式解, L-简单

Abstract

Boussinesq equation is a simplified model of the atmospheric movement equation. It is applicable to mesoscale, non-static equilibrium, quasi-incompressible fluid movement. Its specific features are as follows:

1. Ignoring the individual change of density in continuity equations， and thus making it approximately incompressible fluid;

2. Partially considering the effect brought about by the change of density in the movement equation related to gravity (vertically upward);

3. Taking into account the effect of density change in status equation and thermo-dynamics equation, while regarding the density change as the result of change in temperature only, without any thought being given to pressure;

4. Considering the coefficients of viscosity and thermo-conductivity as constants;

5. The functions of Coriolis force are being taken into consideration;

6. Non-static equilibrium.

Ordinarily, it takes the following form:

If the influence of moisture is ruled out for consideration, the moisture equation can be taken away. In movement equations, the viscosity of turbulent flow is mainly considered. The coefficients of

viscosity and thermo-dissipation in horizontal and vertical direction are regarded as different. The temperature change caused by the vertical motion is also taken into account. Under such circumstances, the equation goes like this:

$$
\text{(A)} \quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} - \vec{g} + \vec{F} \\ \nabla \cdot \vec{V} = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dot{Q} + \Delta\theta \\ \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dot{Q}_q + \Delta q \end{cases}
$$

$$
\text{(B)} \quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} - \vec{g} + \left(K_M^H(\partial_{xx} + \partial_{yy}) + K_M^V \partial_{zz}\right)\vec{V} \\ \nabla \cdot \vec{V} = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = c(z)w + K_H^H\left(\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\right) + K_H^V \dfrac{\partial^2\theta}{\partial z^2} \end{cases}
$$

If the viscosity of turbulent flow is replaced by Reyleigh friction and the thermo-dissipation replaced by Newton cooling, we come to the model below:

$$
\text{(C)} \quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} - \vec{g} - k\vec{V} \\ \nabla \cdot \vec{V} = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = c(z)w - k_1\theta \end{cases}
$$

The main work in this paper is to study the stability of the above three models, the suitability of the pose of the initial (boundary) value problem of those models are also discussed.

In Chapter two, the specific terms, basic concepts, definitions and theorems of stratification are introduced. Examples are given to explain, test and verify. Some common equations are taken as examples, their "pre-gradue" and "gradue" are found out. Their *L*-simplicity are discussed.

In Chapter three, the stability of the above three models, through the application of stratification theory, are studied and analyzed. The results are:

1. The system of equations (A) is 0 – simple; $S^{t}_{3,k-1}(D) \neq \Phi$. The system of equations (A) is stable. There exists a unique stable solution to suitable initial (boundary) value problem. As to the initial value given on $\{t = t_0\}$,the related problem is ill-posed. The structure of solution space is given.

2. The system of equations (B) is 1-simple; $S^{t}_{3,k-1}(D) = \Phi$. The system of equations (B) is unstable. To any initial value given on any hyper-surface, the problem is ill-posed. The necessary and sufficient condition of the existence of formal solution is given.

3. The system of equations (C) is 0-simple; $S^{t}_{3,k-1}(D) \neq \Phi$. The system of equations (C) is stable. There exists a unique stable solution to suitable initial (boundary) value problem.

The structure of solution space is given. Three cases are presented. One of them is a well-posed problem, its unique stable solution is worked out. Other two are ill-posed and more than two solutions are found in both case.

In Chapter four, with the Navier-Stokes equation as an example,

the procedure to find the formal solution of a partial differential equation is presented.

Key words stratification theory, stability, formal solution, L- simplicity

目　录

第一章　前　言

1.1 大气运动方程组及其简化

研究天气变化首先要对大气运动的特性和相应的分析方法有所了解. 大气的运动规律主要受热力、重力和地球的旋转这三种基本因素所支配. 根据物理学基本定律推导出来的原始的大气动力学方程组是一个相当复杂的非线性方程组，它主要包括：流体运动方程(牛顿第二定律)、连续性方程(质量守恒定律)、状态方程(气体状态定律)、热力学方程(热力学第一定律)、水气方程(水气质量守恒定律)等等[1,2]. 在局地直角坐标系中大气运动(干空气)基本方程组可表示为：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t}=-\vec{g}-\dfrac{1}{\rho}\nabla p-2\vec{\Omega}\times\vec{V}+\vec{F}\\ \dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\nabla\cdot\vec{V}=0\\ p=\rho RT\\ C_p\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}-\dfrac{RT}{p}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\dot{Q}\end{cases}\tag{1.1}$$

式中

$\vec{V}=(u,v,w)$ 是流体速度；