普通高等学校工科类 · 经管类数学深化训练与考研辅导丛书

考研首轮基础复习优选图书

高等数学
深化训练与考研指导

刘强　丛书主编

袁安锋　刘强　窦昌胜　编著

一书在手　考试不愁

知识要点梳理，方便温习知识
典型例题分析，掌握解题技巧
深化训练讲解，做到融会贯通
后附考研真题，模拟考试不慌

中国工信出版集团　電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

普通高等学校工科类·经管类数学深化训练与考研辅导丛书

高等数学
深化训练与考研指导

刘 强 丛书主编

袁安锋 刘 强 窦昌胜 编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书是作者在多年本科教学和考研辅导经验的基础上编写而成的. 全书共分为 11 章，每章包括 5 个模块，即知识要点、典型例题分析、深化训练、深化训练详解及综合提高训练. 本书编写的主要目的有两个：一是为了满足学生报考研究生的需要，本书编写紧扣“数学一”考研大纲，贴切考试实际，做到分门别类、详略得当，帮助考研学生在短时间内迅速掌握各种解题方法和技巧，提高综合分析问题、解决问题的能力，以达到融会贯通、举一反三的学习效果；二是帮助学有余力的在校本科生更好地学习“高等数学”课程，开阔学习视野，拓展解题思路.

本书既可以作为全国硕士研究生统一入学考试的辅导用书，也可以作为普通高等学校工科类、经管类本科生学习“高等数学”课程的深化训练用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学深化训练与考研指导 / 袁安锋，刘强，窦昌胜编著. —北京：电子工业出版社，2017.5

ISBN 978-7-121-31148-2

I. ①高… II. ①袁… ②刘… ③窦… III. ①高等数学－高等学校－教学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 057522 号

策划编辑：王二华
责任编辑：王二华
印　　刷：三河市良远印务有限公司
装　　订：三河市良远印务有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编　100036
开　　本：787×1092　1/16　印张：22.75　字数：580 千字
版　　次：2017 年 5 月第 1 版
印　　次：2017 年 5 月第 1 次印刷
定　　价：49.90 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：(010)88254532。

前　言

为了更好地帮助普通高等学校工科类、经管类本科生学好大学数学，同时为了满足众多考生考研的需要，我们结合多年的考研辅导经验，编写了"普通高等学校工科类·经管类数学深化训练与考研辅导丛书". 该丛书包括微积分、高等数学、线性代数、概率论与数理统计及大学生数学竞赛课程的训练辅导用书，由首都经济贸易大学的刘强教授担任丛书主编.

本书涵盖了考研"数学一"中高等数学部分的全部考点. 本书编写的主要目的有两个：一是帮助学有余力的在校学生更好地学习"高等数学"课程，以开阔学习视野，拓展解题思路；二是为了满足学生报考研究生的需要，本书编写紧扣考研大纲，贴切考试实际，做到分门别类、详略得当，使考生能在短时间内迅速掌握各种解题方法和技巧，综合分析问题、解决问题的能力得到有效提升，达到融会贯通、举一反三的学习效果.

全书共分为 11 章，每章包括 5 个模块，即知识要点、典型例题分析、深化训练、深化训练详解及综合提高训练. 具体模块内容介绍如下.

一、**知识要点**：本模块对基本概念、基本理论、基本公式等内容进行系统梳理，方便读者查阅相关内容.

二、**典型例题分析**：本模块在作者多年考研辅导经验的基础上，创新性地构思了大量有代表性的例题，并选编了部分国内外优秀教材、辅导资料的经典题目，汇集了一些有代表性的考研真题，按照知识结构、解题思路、解题方法等对典型例题进行了系统归类，通过专题讲解，详细阐述了相关问题的解题方法与技巧.

三、**深化训练**：本模块精心选编了部分具有代表性的习题及历年的考研真题，帮助读者巩固强化所学知识，提升读者学习效果，做到融会贯通和举一反三.

四、**深化训练详解**：本部分对深化训练部分给出了详细的解答过程，部分习题给出多种解法，以开拓读者的解题思路，培养读者的分析能力和发散思维.

五、**综合提高训练**：本部分的例题综合性较强，有较高的难度和较强的灵活性，通过本模块的学习，提升读者的综合能力和应变能力.

为了便于读者阅读本书，书中有一定难度的结论、例题和综合练习题等将用"**"标出. 另外为了便于读者查阅，本书在考研真题后面加上了标志，如【2010（1）】表示该题是 2010 年硕士研究生入学考试"数学一"考题，【2010（1，3）】表示该题是 2010 年"数学一"和"数学三"考题，其余类推.

本丛书在编写过程中，得到了北京工业大学程维虎教授、李高荣教授，北京工商大学曹显兵教授，北方工业大学刘喜波教授，首都经济贸易大学张宝学教授、马立平教授、任韬副教授，昆明理工大学吴刘仓教授，北京化工大学李志强副教授，中央财经大学贾尚晖教授及同事的大力支持，电子工业出版社高教分社的谭海平社长和王二华编辑也为丛书的出版付出了很多的努力，在此表示诚挚的感谢.

本书既可以作为全国硕士研究生统一入学考试的辅导用书，也可以作为普通高等学校工科类、经管类本科生学习“高等数学”课程的深化训练用书.

由于作者水平有限，尽管付出了很大努力，但书中仍可能存在不妥甚至错误之处，恳请读者和同行们不吝指正．邮件地址为：cuebliuqiang@163.com.

作　者
2017 年 4 月

目　录

第 1 章　函数与极限

1.1　知 识 要 点

1.1.1　映射与函数

1．映射

设 X 和 Y 是两个非空集合，如果存在一个对应法则 f，使得对 X 中的每个元素 x，按照法则 f，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的**映射**，记作：$f:X\to Y$，并称 y 为元素 x 在映射 f 下的**像**，记作 $y=f(x)$，x 称为元素 y 的一个**原像**，集合 X 称为映射 f 的**定义域**，也记为 D_f，X 中所有元素的像组成的集合称为映射 f 的**值域**，通常记为 $Z(f)$，即 $Z(f)=\{y\,|\,y=f(x),x\in X\}$．

从映射的定义可以看到，映射 f 的值域是集合 Y 的一个子集，即 $Z(f)\subseteq Y$．

如果 $Z(f)=Y$，则称 f 为从 X 到 Y 的**满射**；若对 X 中的任意两个不同的元素 $x_1\neq x_2$，它们的像 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为从 X 到 Y 的**单射**；若 f 既是满射又是单射，则称 f 为**一一映射**（或**双射**）.

映射又称为**算子**，根据集合 X 与 Y 的不同情形，映射有不同的习惯称谓，如从非空集合 X 到数集 Y 的映射称为**泛函**，从非空数集 X 到它自身的映射称为**变换**，从实数集 X 到实数集 Y 的映射又称为**函数**.

2．函数

设 D 为一个非空实数集，如果存在一个对应法则 f，使得对于每一个 $x\in D$，都能由 f 唯一确定一个实数 y 与之对应，则称对应法则 f 为定义在实数集 D 上的一个**函数**，记作 $y=f(x)$，其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，实数集 D 称为函数的**定义域**，也可记为 $D(f)$ 或者 D_f．集合 $\{y\,|\,y=f(x),x\in D_f\}$ 称为函数的**值域**，一般记为 $Z(f)$ 或者 Z_f．

定义域和**对应法则**是函数的两要素，值域由定义域和对应法则确定.

1.1.2　函数的基本特性

函数的基本特性主要有四种，即奇偶性、单调性、周期性和有界性.

1．奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 上关于原点对称，如果对于 $\forall x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；如果对于 $\forall x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

奇函数的图像关于坐标原点对称；偶函数的图像关于 y 轴对称．需要注意的是：函数的奇偶性是相对于对称区间而言的，因此如果函数的定义域关于原点不对称，则该函数不具有奇偶性.

奇、偶函数的一些常用结论：

（1）常函数为偶函数；

（2）有限个奇函数的代数和为奇函数，有限个偶函数的代数和为偶函数；

（3）奇函数与偶函数的乘积为奇函数；

（4）奇数个奇函数的乘积为奇函数，偶数个奇函数的乘积为偶函数.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 在某个区间 D 上有定义，对于 $\forall x_1, x_2 \in D$，且 $x_1 < x_2$，有

（1）若 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调增加（单调递增）；

（2）若 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调减少（单调递减）.

3. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 T，使得对任意一个 $x \in D$，有 $x \pm T \in D$，且

$$f(x+T) = f(x)$$

恒成立，则称该函数为**周期函数**. T 称为函数 $f(x)$ 的**周期**，满足上式的最小的正数 T_0 称为函数的**最小正周期**，通常我们所说的函数的周期指的是函数的最小正周期.

周期函数的一些常用结论：

（1）若 $f(x)$ 的周期为 T，则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\dfrac{T}{|a|}(a \neq 0)$；

（2）若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的周期均为 T，则 $f(x) \pm g(x)$ 也是周期为 T 的周期函数.

4. 有界性

定义 1　设函数 $f(x)$ 在集合 $f(x)$ 上有定义，若存在正数 M，使得对于 $\forall x \in D$，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有界**，否则称 $f(x)$ 在 D 上**无界**.

定义 2　若存在实数 a 和 b，使得对 $\forall x \in D$，恒有 $a \leqslant f(x) \leqslant b$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界，否则称 $f(x)$ 在 D 上**无界**，其中 a 称为函数的**下界**，b 称为函数的**上界**.

1.1.3　反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 Z_f. 如果对于 Z_f 中的每一个 y 值，都存在唯一的满足 $y = f(x)$ 的 $x \in D_f$ 与之对应，这样确定的以 y 为自变量、以 x 为因变量的函数，称为函数 $y = f(x)$ 的**反函数**，并记为 $x = f^{-1}(y)$. 习惯上，一般将 $y = f(x)$ 的反函数记为 $y = f^{-1}(x)$.

显然，反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的定义域为 Z_f，值域为 D_f，且对任意的 $y \in Z_f$，有

$$f[f^{-1}(y)] = y,$$

对任意的 $x \in D_f$，有

$$f^{-1}[f(x)] = x.$$

单调函数一定存在反函数，且函数与反函数具有相同的单调性.

在同一坐标系下，函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的图像是重合的，$y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

1.1.4 复合函数

已知两个函数

$$y = f(u), \quad u \in D_f, \quad y \in Z_f,$$

$$u = g(x), \quad x \in D_g, \quad u \in Z_g,$$

若 $D_f \cap Z_g \neq \varnothing$，则可通过中间变量 u 将 $u = g(x)$ 代入 $y = f(u)$ 构成一个以 x 为自变量、以 y 为因变量的函数 $y = f[g(x)]$，称 $y = f[g(x)]$ 为 $y = f(u)$ 与 $u = g(x)$ 的**复合函数**.

1.1.5 基本初等函数与初等函数

常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数以及反三角函数共 6 大类函数统称为**基本初等函数**.

由基本初等函数经有限次四则运算和（或）复合运算而得到的函数称为**初等函数**.

几个常见的结论：

（1） $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2} \ (|x| \leqslant 1)$；

（2） $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{2}$；

（3） $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} \ (x \neq 0)$.

1.1.6 极限的概念与性质

1. 数列的极限

$\lim\limits_{n \to \infty} u_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，存在正整数 N，当 $n > N$ 时，恒有 $|u_n - A| < \varepsilon$ 成立.

注 在数列极限的定义中，一方面，$\varepsilon > 0$ 要多小就可以多小，或者说可以任意的小；另一方面，ε 一旦给定，若存在一个正整数 N_0，使得当 $n > N_0$ 时，恒有 $|u_n - A| < \varepsilon$ 成立，则对任意一个大于 N_0 的正整数，都可以作为定义中的 N，即 N 与 ε 有关，但不唯一.

2. $x \to \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

设有函数 $y = f(x)$ 和常数 A，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，若存在 $M > 0$，使当 $|x| > M$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立，则称当 $x \to \infty$ 时，$y = f(x)$ 的**极限**为 A，记作

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \quad (x \to \infty).$$

类似地可以定义 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ 和 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

3. $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

设有函数 $y = f(x)$ 和常数 A，如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立，则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的**极限**为 A，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to x_0).$$

类似地可以定义右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 和左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$.

4. 极限的性质

（1）**唯一性** 若极限 $\lim Y$ 存在，则极限值唯一.

（2）**有界性** 如果 $\lim Y$ 存在，则 Y 是局部有界的. 特别地，若数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 存在，则 $\{u_n\}$ 不仅是局部有界的，而且是全局有界的.

（3）**保号性** 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$）则 $f(x)$ 在 x_0 的某个空心邻域内恒有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

（4）若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且在 x_0 的某个空心邻域内恒有 $f(x)\geqslant 0$（或 $f(x)\leqslant 0$），则有 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

（5）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，且在 x_0 的某个空心邻域内恒有 $f(x)\geqslant g(x)$ [或 $f(x)\leqslant g(x)$]，则有 $A\geqslant B$（或 $A\leqslant B$）.

注 这里的变量 Y 既可以表示数列，也可以表示函数，下同.

1.1.7 无穷小与无穷大

1. 无穷小的概念及其性质

以 0 为极限的变量称为**无穷小**（或**无穷小量**）. 需要注意的是，0 是一种特殊的无穷小. 无穷小有如下性质：

（1）有限个无穷小的和是无穷小；

（2）有界变量与无穷小的乘积是无穷小；

（3）$\lim Y=A \Leftrightarrow Y=A+\alpha$，其中 α 是无穷小（与 Y 同在一个变化过程中）.

2. 无穷小的阶

设 α、β 是同一变化过程中的两个无穷小，则：

（1）若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α **高阶的无穷小**（或 α 是比 β **低阶的无穷小**），记作 $\beta=o(\alpha)$.

（2）若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，则称 β 是与 α **同阶的无穷小**，记作 $\beta=O(\alpha)$. 特殊地，当 $c=1$ 时，称 β 与 α 是**等价的无穷小**，记作 $\alpha\sim\beta$.

（3）若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0$，$k>0$，则称 β 是关于 α 的 k **阶的无穷小**，记作 $\beta=O(\alpha^k)$.

3. 等价无穷小的性质

性质 1 设 α、β、γ 是同一变化过程中的无穷小，则：

（1）若 $\alpha\sim\beta$，则 $\beta\sim\alpha$；

（2）若 $\alpha\sim\beta$，$\beta\sim\gamma$，则 $\alpha\sim\gamma$.

性质 2　设α、β、$\bar{\alpha}$和$\bar{\beta}$是同一变化过程中的无穷小，且$\alpha\sim\bar{\alpha}$，$\beta\sim\bar{\beta}$，$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}$存在，则$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\bar{\alpha}}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha}{\bar{\beta}}=\lim\dfrac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$.

4．无穷大的概念

如果在某个变化过程中，对于$\forall\ M>0$，存在某个时刻，使得在那个时刻以后恒有$|Y|>M$成立，则称变量Y为**无穷大**（或**无穷大量**）．记作$\lim Y=\infty$或$Y\to\infty$.

注　由于从本质上来讲，在相应的变化趋势下，无穷大的极限是不存在的，常用的极限运算法则不适用，因此无穷大的问题往往转化为无穷小来讨论.

5．无穷小与无穷大的关系

在自变量的同一个的变化趋势下，无穷小与无穷大有如下关系：若变量Y为无穷大，则$\dfrac{1}{Y}$为无穷小；若变量Y为无穷小（$Y\neq 0$），则$\dfrac{1}{Y}$为无穷大.

1.1.8　极限的运算法则

1．极限的四则运算法则

设极限$\lim X$，$\lim Y$均存在，则：

（1）$\lim(X\pm Y)$存在，且$\lim(X\pm Y)=\lim X\pm\lim Y$；

（2）$\lim(X\cdot Y)$存在，且$\lim(X\cdot Y)=\lim X\cdot\lim Y$；

（3）若$\lim Y\neq 0$，则$\lim\dfrac{X}{Y}$存在，且有$\lim\dfrac{X}{Y}=\dfrac{\lim X}{\lim Y}$.

推论 1　若$\lim X$存在，C为一常数，则$\lim(CX)$存在，且$\lim(C\cdot X)=C\cdot\lim X$.

推论 2　若$\lim X$存在，k为一正整数，则$\lim X^k$存在，且$\lim(X^k)=(\lim X)^k$.

2．复合函数的极限运算法则

设函数$y=f[g(x)]$是由函数$u=g(x)$与函数$y=f(u)$复合而成的，$y=f[g(x)]$在点x_0的某个去心邻域内有定义，若$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，且$g(x)$在$x_0$的某个去心邻域满足$g(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

1.1.9　极限存在准则与两个重要极限

1．夹逼定理

如果变量X,Y,Z满足$X\leqslant Y\leqslant Z$，且$\lim X=\lim Z=A$（A为某常数），那么$\lim Y$也存在且$\lim Y=A$.

2．单调有界准则

（1）若数列u_n单调且有界，则极限$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$一定存在.

（2）设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个左邻域内单调且有界，则左极限 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 一定存在.

注　对于自变量不同的变化过程（$x \to x_0^+$，$x \to +\infty$，$x \to -\infty$），都有相应的单调有界准则.

（3）（柯西（Cauchy）收敛准则）数列 $\{u_n\}$ 收敛的充分必要条件是：对于 $\forall \varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得当 $m > N$，$n > N$ 时，有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

3．数列与子数列的关系

从数列 $\{u_n\}$ 中抽取无穷多项，在不改变原有次序的情况下构成的新数列称为数列 $\{u_n\}$ 的**子数列**，简称**子列**．记作 $\{u_{n_k}\}$：$u_{n_1}, u_{n_2}, \cdots, u_{n_k}, \cdots$．其中 n_k 表示 u_{n_k} 在原数列 $\{u_n\}$ 中的位置，k 表示 u_{n_k} 在子列中的位置.

数列 $\{u_n\}$ 与子数列 $\{u_{n_k}\}$ 之间的关系如下.

（1）$\lim\limits_{n \to \infty} u_n = A \Leftrightarrow$ 对 $\{u_n\}$ 的任何子数列 $\{u_{n_k}\}$ 有 $\lim\limits_{k \to \infty} u_{n_k} = A$.

（2）$\lim\limits_{n \to \infty} u_n = A \Leftrightarrow$ 偶数子列 $\{u_{2k}\}$ 和奇数子列 $\{u_{2k+1}\}$ 满足 $\lim\limits_{k \to \infty} u_{2k} = \lim\limits_{k \to \infty} u_{2k+1} = A$.

（3）当 $\{u_n\}$ 是单调数列时，$\lim\limits_{n \to \infty} u_n = A \Leftrightarrow$ 存在某个子数列 $\{u_{n_k}\}$ 满足 $\lim\limits_{k \to \infty} u_{n_k} = A$.

4．海涅（Heine）定理

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \quad \Leftrightarrow$ 对任何数列 $\{x_n\}$，$x_n \to x_0\ (n \to \infty)$，且 $x_n \neq x_0$，有 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

注　海涅定理给出了数列极限与函数极限之间的关系.

5．两个重要公式

（1）$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$．该极限属于 $\dfrac{0}{0}$ 类型的未定式．它可以推广到 $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$.

（2）$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$ 或者 $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$．该极限属于 1^∞ 类型的未定式．它可以推广到 $\lim\limits_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \mathrm{e}$.

1.1.10　函数的连续性

函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续的三个等价定义为：

（1）$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$；

（2）$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$，其中 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$；

（3）$\forall \varepsilon > 0$，$\exists\ \delta > 0$，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 成立.

$y = f(x)$ 在某个区间内连续的定义：

如果函数 $y = f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点处都连续，则称 $y = f(x)$ 在 (a,b) 内连续；如果 $y = f(x)$ 在 (a,b) 内连续且在 a 处右连续，则称 $y = f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续．类似也可以定义 $y = f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 和 $[a,b]$ 上的连续性.

1.1.11　函数的间断点

1．间断点的定义

若 $y = f(x)$ 在点 x_0 处出现如下三种情况之一，则称 x_0 为 $y = f(x)$ 的间断点：

（1）$y=f(x)$ 在点 x_0 处无定义；

（2）$y=f(x)$ 在点 x_0 处有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在；

（3）$y=f(x)$ 在点 x_0 处有定义，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

2．间断点的类型

设 x_0 是 $f(x)$ 的间断点，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在，则称 x_0 为 $f(x)$ 的**第一类间断点**，其中：

（1）**可去间断点** $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$；

（2）**跳跃间断点** $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

设 x_0 是 $f(x)$ 的间断点，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 中至少有一个不存在，则称 x_0 为 $f(x)$ 的**第二类间断点**.

特殊地，若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 中至少有一个为 ∞，则称 x_0 为**无穷间断点**. 如 $x=0$ 是 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的第二类间断点中的无穷间断点.

1.1.12　连续函数的性质

1．连续函数的四则运算

若函数 $f(x)$，$g(x)$ 都在点 x_0 处连续，则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0)\neq 0)$ 在点 x_0 处也连续.

2．复合函数的连续性

若 $y=f(u)$ 在点 u_0 处连续，$u=g(x)$ 在点 x_0 处连续且 $u_0=g(x_0)$，则 $y=f[g(x)]$ 在点 x_0 处连续.

3．反函数的连续性

若 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调、连续，则其反函数在相应的定义区间上单调、连续.

4．初等函数的连续性

初等函数在其定义区间内都是连续的，所谓的定义区间指的是包含在定义域内的区间.

1.1.13　闭区间上的连续函数的性质

1．有界性定理

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 一定在 $[a,b]$ 上有界，即 $\exists\ M>0$，对于 $\forall x\in[a,b]$，都有 $|f(x)|\leqslant M$.

2．最值定理

如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定存在最大值和最小值.