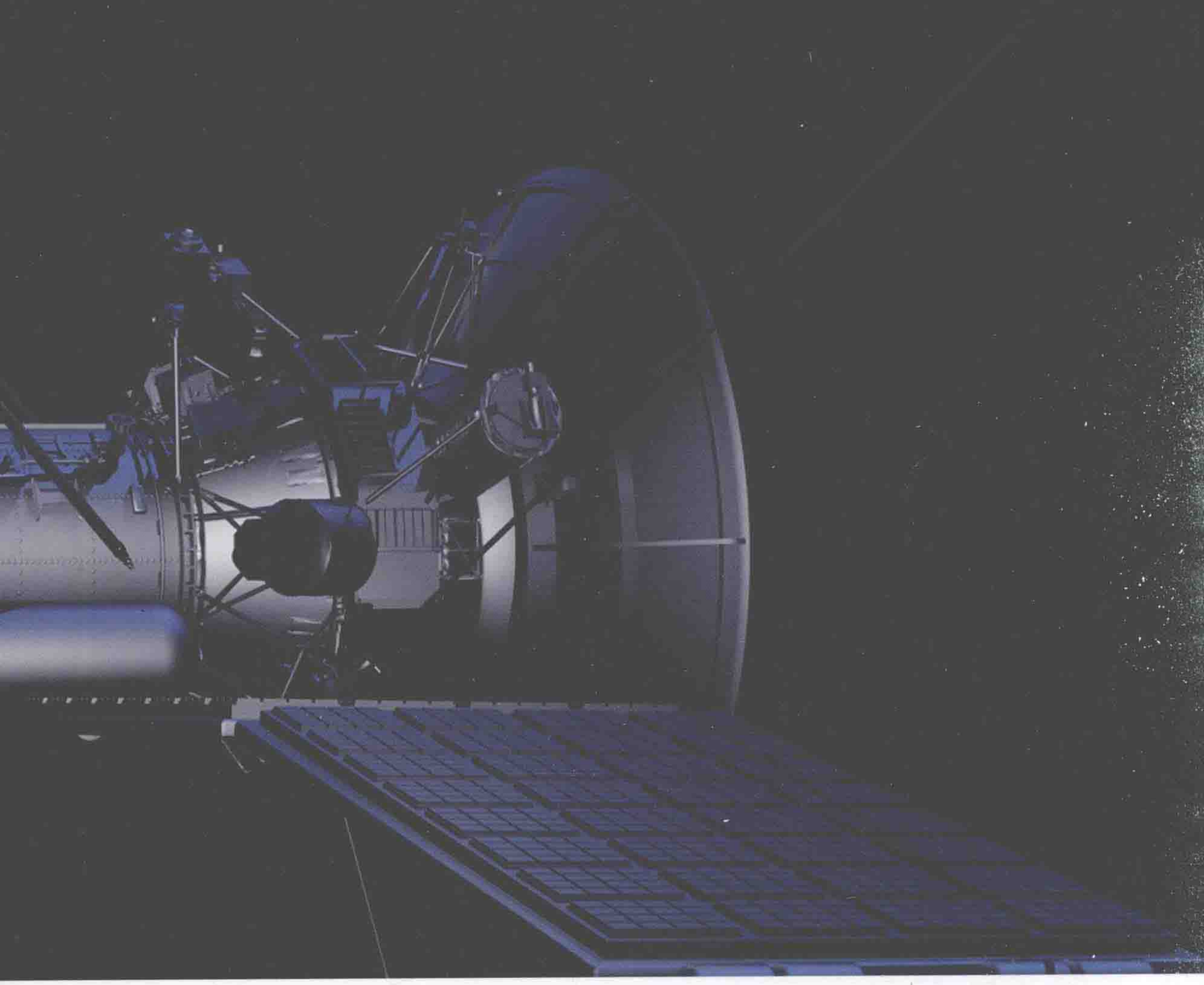

iCourse·教材

大学物理

（第二卷）波动与光学

主编　郑少波　李英兰

高等教育出版社

第 1 章　振　　动

振动是自然界和科学技术中极为常见的现象,广泛存在于机械运动、电磁运动、热运动、原子运动等运动形式之中．从狭义上说,通常把具有时间周期性的物体运动称为振动,如心脏的跳动、汽缸活塞的运动、行车时的颠簸、发声物体的运动等．广义地说,任何一个物理量在某一数值附近做周期性的变化,都称为振动．变化的物理量称为振动量,它可以是力学量、电学量或其他物理量,例如电量、电压、电流、电场强度、磁感应强度等．尽管各种振动现象的机制可能各不相同,但是它们都遵循相同的基本规律,从而使得不同本质的振动具有统一的描述方法.

物体在某一位置所做的来回往复的运动叫机械振动．本章主要通过对机械振动的讨论来揭示各类振动的共同性质和规律.

视频:桥的振动

1.1　简谐振动的基本特征及其描述

在各种振动现象中,最简单而又最基本的振动是简谐振动,实验和理论证明:一切复杂的振动都可以由许多简谐振动合成的.

1.1.1　简谐振动

授课录像:振动

简谐振动

1. 简谐振动的表达式(运动学方程)

当物体运动时,如果离开平衡位置的位移(或角位移)按余弦函数(或正弦函数)的规律随时间变化,即

$$x = A\cos(\omega t+\varphi) \tag{1-1}$$

这种运动就称为简谐振动．式(1-1)即为简谐振动的表达式(运动学方程)．其中 A 为振幅,ω 为角频率,$\omega t+\varphi$ 为相位,φ 为初相.

2. 简谐振动的速度和加速度

将式(1-1)对时间求一阶导数,可得物体简谐振动的速度为

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\omega A\sin(\omega t+\varphi) \tag{1-2}$$

再对时间求导即得物体简谐振动的加速度

$$a=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2A\cos(\omega t+\varphi) \tag{1-3}$$

可见,物体做简谐振动时,其速度、加速度都以同样的角频率随时间做周期性变化.

3. 描述简谐振动的特征量

在简谐振动的表达式(1-1)中,有以下一些反映其特征的物理量.

(1) 振幅 A

振幅

振动物体离开平衡位置的最大距离称为振幅. 振幅反映振动的强弱,同时也给出振动物体的运动范围. 振幅可由初始条件(即在 $t=0$ 时振动物体的位移 x_0 和速度 v_0)决定. 把 $t=0$ 代入式(1-1)和式(1-2),可得

$$x_0=A\cos\varphi \tag{1-4}$$

$$v_0=-A\omega\sin\varphi \tag{1-5}$$

将上两式平方后相加,得

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}} \tag{1-6}$$

(2) 周期 T、频率 ν 与角频率 ω

周期

振动物体做一次完全振动需要的时间称为振动的周期,以 T 表示. 经历一个周期,物体又将完全回到原来的状态. 对于简谐振动,有

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)=A\cos[\omega(t+T)+\varphi]$$

因为余弦函数的周期是 2π,即有 $A\cos(\omega t+\varphi)=A\cos(\omega t+2\pi+\varphi)$. 两式比较得振动的周期

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \tag{1-7}$$

振动频率

单位时间内物体完成全振动的次数称为振动频率,以 ν 表示. 显然,频率与周期互为倒数,即

$$\nu=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi} \tag{1-8}$$

或

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu \tag{1-9}$$

可见,角频率 ω 表示 2π s 内物体完成全振动的次数,也称为圆频率.

T、ν 或 ω 说明简谐振动的时间周期性特征. 在 SI 中,T 的单位为 s,ν 的单位为 Hz,ω 的单位为 rad · s^{-1}.

(3) 相位 $\omega t+\varphi$ 和初相 φ

相位

对于做简谐振动的物体来说,当振幅 A 和角频率 ω 给定时,它在任意时刻 t 的运动状态取决于物理量 $\omega t+\varphi$. $\omega t+\varphi$ 称为相位,它反映简谐振动的状态即“相貌”. 物体的振动在一周期内有不同的运动状态,分别与 0~2π 内的一个相位值对应,如表 1-1 所示.

授课录像:相位

表 1-1 物体的振动在一周期内有不同的运动状态

$\omega t+\varphi$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$x(t)$	A	0	$-A$	0	A
$\nu(t)$	0	$-\omega A$	0	ωA	0
$a(t)$	$-\omega^2 A$	0	$\omega^2 A$	0	$-\omega^2 A$

在 $t=0$ 时的相位 φ 称为初相位,简称初相. 初相是反映初始时刻(即计时的起点)振动物体运动状态的物理量,它由初始条件决定. 将式(1-5)和式(1-4)相除,得

$$\varphi=\arctan\left(\frac{-v_0}{\omega x_0}\right) \tag{1-10}$$

应注意,φ 的取值与初始时刻的位置和速度同时有关.

1.1.2 简谐振动的描述方法

1. 振动曲线

振动物体的位置坐标 x 和时间 t 的关系曲线,亦即 $x-t$ 曲线称为振动曲线. 振动曲线采用的是用几何语言描述振动的方法,以几何图线形象而直观地反映出振动规律. 简谐振动的振动曲线类似于余弦曲线,表征简谐振动特征的三个物理量 A、T、φ 以及 $x(t)$ 和 $v(t)$(曲线切线的斜率)都可以由其振动曲线得出,如图 1-1 所示.

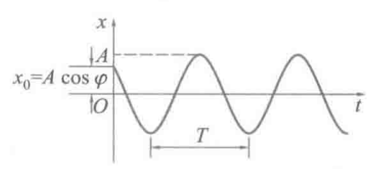

图 1-1 简谐振动的振动曲线

式(1-1)、式(1-2)和式(1-3)的函数关系可用图 1-2 所示的 $x(t)$、$v(t)$ 和 $a(t)$ 曲线表示. 可以方便地对物体的位移、速度和加速度作出比较.

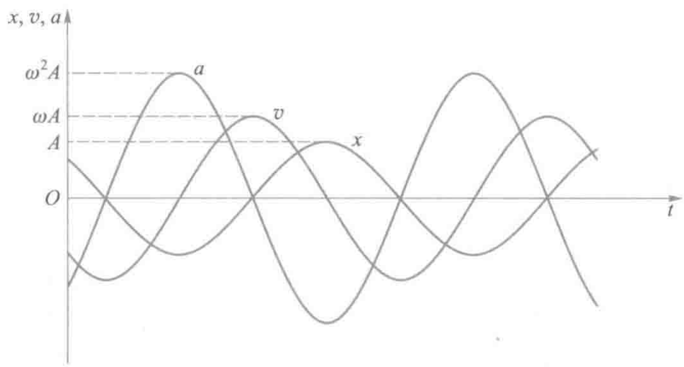

图 1-2 $x-t$、$v-t$ 和 $a-t$ 曲线的比较

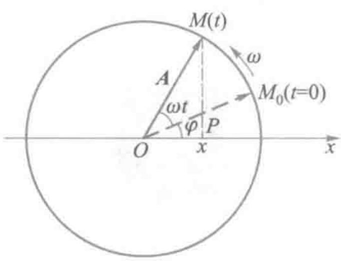

图 1-3 旋转矢量图

授课录像:旋转矢量

2. 旋转矢量图

对于一个给定的简谐振动 $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$,也可用如图 1-3 所示的旋转矢量图表示.

设此简谐振动的平衡位置为 O,由该点出发作一矢量 $\boldsymbol{A}$,其长度 OM 等于振动的振幅 A. 在 $t=0$ 时,使矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 x 轴正方向的夹角等于振动的初相 φ,并让矢量 $\boldsymbol{A}$ 在同一平面内绕 O 点以匀角速度逆时针旋转,角速度的大小与简谐振动的角频率 ω 相等,则在任一时刻 t,矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 x 轴上的投影 $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$ 就代表给定的简谐振动,或者说,矢量 $\boldsymbol{A}$ 的矢端 M 在 x 轴上的投影点 P 沿 x 轴做简谐振动. 矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 x 轴的夹角 $\omega t+\varphi$ 就是简谐振动的相位. 矢量 $\boldsymbol{A}$ 称为旋转矢量或振幅矢量. 由简谐振动的旋转矢量图看出,$\boldsymbol{A}$ 转动一周所用的时间,相当于简谐振动的一个周期. $\boldsymbol{A}$ 的矢端 M 所作的圆,称为参考圆. 投影点做简谐振动的振幅、角频率、初相与旋转矢量 $\boldsymbol{A}$ 的大小、旋转角速度的大小、初始 $\boldsymbol{A}$ 与 x 轴夹角一一对应. 因此,任何一个简谐振动,都可和一个旋转矢量相联系. 旋转矢量图非常直观地表示出简谐振动的三个特征量和其他一些物理量来.

1.1.3 相位差

相位差

授课录像:相差

相位差是指两个振动在同一时刻的相位之差或同一振动在不同时刻的相位之差,以 $\Delta\varphi$ 表示. 当比较两个以上的简谐振动的"步调"时,相位差的概念很重要.

设有两个简谐振动

$$x_1=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$$
$$x_2=A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$$

在 t 时刻,两者相位差为

$$\Delta\varphi=(\omega_2 t+\varphi_2)-(\omega_1 t+\varphi_1)=(\omega_2-\omega_1)t-(\varphi_2-\varphi_1)$$

显然它在 $\omega_2\neq\omega_1$ 时是随 t 而变化的.

若对于两个频率相同的简谐振动,相位差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$ 是不随 t 变化的恒量,且 $\Delta\varphi$ 就是两个简谐振动的初相差．相位差的存在可以使得两个简谐振动的步调不一致,即它们不能同时到达平衡位置而且同向运动,也不能同时到达各自同方向的位移的最大值,而总是一个比另一个落后(或超前)一些．下面讨论几种情况:

1. 同相

当 $\Delta\varphi=2k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时,称两个简谐振动为同相,表示它们同来同往,即同时经过平衡位置而且同向运动,并且同时到达各自同方向的位移的最大值,在此情况下,它们振动步调完全一致,如图 1-4 所示.

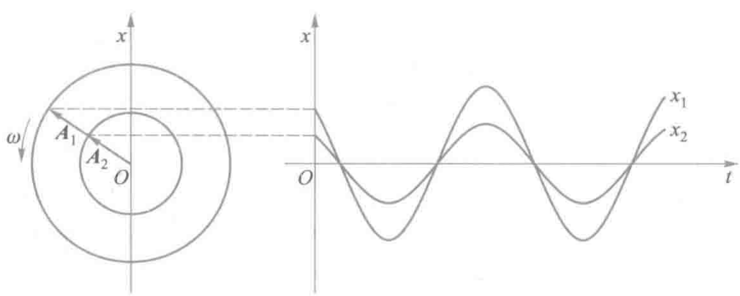

图 1-4 同相

2. 反相

当 $\Delta\varphi=(2k+1)\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 时,称两个简谐振动为反相,表示它们同时经过平衡位置但向相反方向运动,并且同时到达各自相反方向的位移的最大值,在此情况下,它们振动步调完全相反,如图 1-5 所示.

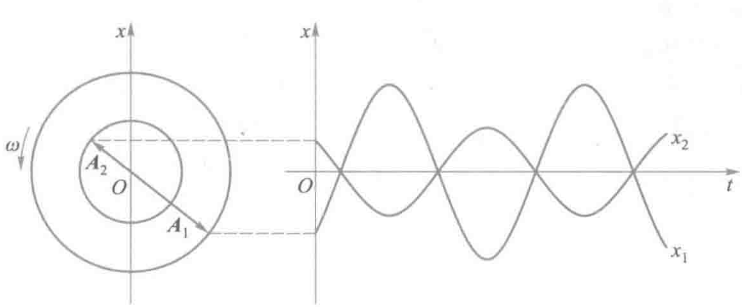

图 1-5 反相

3. 超前与落后

当 $\Delta\varphi$ 取其他值时,两个简谐振动既不同相,也不反相．如果 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1>0$,则表示第二个简谐振动比第一个简谐振动在相

位上超前 $\Delta\varphi$;或者说第一个简谐振动比第二个简谐振动在相位上落后 $\Delta\varphi$. 如果 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1<0$,则表示第一个简谐振动比第二个简谐振动在相位上超前 $|\Delta\varphi|$. 超前或落后的时间为

$$\Delta t=(\varphi_2-\varphi_1)/\omega \tag{1-11}$$

注意在这种说法中,由于相差的周期为 2π,所以我们把 $|\Delta\varphi|$ 的值限在 π 以内.

例如,在图 1-6 中,$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=3\pi/2$,我们通常不说 x_2 的相位比 x_1 的相位超前 $3\pi/2$,而改写成 $\Delta\varphi=3\pi/2-2\pi=-\pi/2$,即说 x_2 的相位比 x_1 的相位落后 $\pi/2$ 或说 x_1 的相位比 x_2 的相位超前 $\pi/2$.

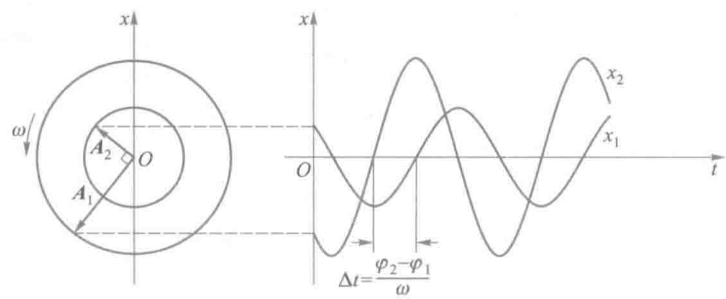

图 1-6　$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=3\pi/2$

相位不但用来表示两个相同的做简谐振动的物理量的步调,而且可以用来表示不同物理量变化的步调. 例如,从图 1-2 可以看出,对于做简谐振动的物体,其速度的相位比位移的相位超前 $\pi/2$,比加速度的相位落后 $\pi/2$,加速度和位移是反相的.

例 1-1

两个振子做等幅、同频率简谐振动. 第一个振子的振动表达式为 $x_1=A\cos(\omega t+\varphi)$,当第一个振子从振动的正方向回到平衡位置时,第二个振子恰好在正方向最大位移处.

(1) 求第二个振子的振动表达式和二者的相位差;

(2) 若在 $t=0$ 时,$x_1=-A/2$,并向 x 轴负方向运动,画出二者的 $x-t$ 曲线及旋转矢量图.

授课录像:简谐振动例题

解:(1) 由已知条件画出旋转矢量图(图 1-7),可见,第二个振子比第一个振子相位落后 $\pi/2$,故有相位差

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=-\pi/2$$

第二个振子的振动表达式为

$$x_2=A\cos(\omega t+\varphi+\Delta\varphi)=A\cos(\omega t+\varphi-\pi/2)$$

(2) 由在 $t=0$ 时,$x_1=-A/2$,且 $v_0<0$,可知 $\varphi=2\pi/3$,所以

$$x_1=A\cos(\omega t+2\pi/3)$$

$$x_2=A\cos(\omega t+\pi/6)$$

二者的 x-t 曲线及旋转矢量图如图 1-8 所示.

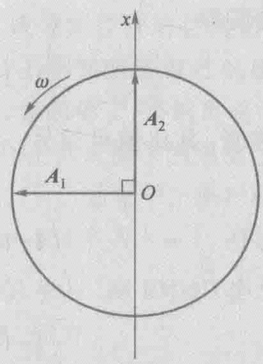

图 1-7 例 1-1(1)图

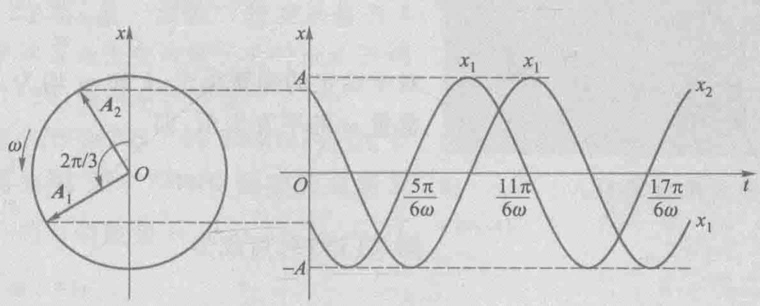

图 1-8 例 1-1(2)图

1.1.4 简谐振动的研究

下面通过弹簧振子、单摆与复摆的例子来研究简谐振动.

1. 弹簧振子

如图 1-9 所示,将一质量可忽略不计的轻质弹簧一端固定,另一端系一质量为 m 的物体(可视为质点),置于光滑的水平面上. 设物体在 O 点时弹簧处于自然长度,则物体所受的合力为零,O 点就是平衡位置. 若把物体拉至 P 点,然后任其运动,它将在弹性力 $\boldsymbol{F}$ 作用下,在 PP'之间绕平衡位置做来回往复的周期性运动. 这个由物体和轻弹簧构成的振动系统,称为弹簧振子,它是一个理想化的模型. 实际中,为了减振,通常列车车厢是通过弹簧与车轮固接,于是列车的车厢便可看成一个弹簧振子.

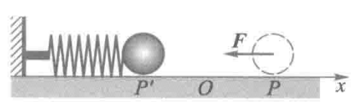

图 1-9 弹簧振子

弹簧振子

(1) 简谐振动的动力学特征

取平衡位置 O 点为坐标原点,沿着弹簧长度方向建立如图 1-9 所示的坐标系. 由胡克定律可知,物体 m 在坐标(即相对于 O 点的位移)为 x 的位置时所受弹簧的弹性力为

$$F=-kx \tag{1-12}$$

式中的比例系数 k 为弹簧的劲度系数,负号表示力的方向与位移的方向相反,并始终指向平衡位置. 即在离平衡位置越远时,力越大;在平衡位置力为零处,物体由于惯性会继续运动. 这种始终指向平衡位置的力称为回复力.

事实上,式(1-12)说明简谐振动的动力学特征,可以作为简谐振动的动力学定义. 即简谐振动是质量为 m 的质点在与质点相对平衡位置的位移成正比而方向相反的力作用下的运动.

(2) 简谐振动的运动学特征

根据牛顿第二定律,可得物体的加速度为

$$a=\frac{F}{m}=-\frac{k}{m}x \tag{1-13}$$

对于给定的弹簧振子,k 和 m 均为正值常量,其比值可用另一个常量 ω 的平方表示,即

$$\omega^2=\frac{k}{m} \tag{1-14}$$

则式(1-13)可成为

$$a=-\omega^2 x \tag{1-15}$$

式(1-15)说明了简谐振动的运动学特征,即做简谐振动的物体的加速度与位移成正比而方向相反. 只要具有这种特征的振动就称为简谐振动.

(3) 简谐振动的微分方程

由于加速度 $a=\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$,式(1-15)可写成

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0 \tag{1-16}$$

简谐振动的微分方程

式(1-16)称为简谐振动的微分方程,也是简谐振动的一个特征式.

简谐振动的微分方程的解具有余弦、正弦函数或指数形式. 这里采用式(1-1),即

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

这就是简谐振动的运动学方程(表达式).

根据三角函数与复数的关系 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$,则简谐振动的指数形式为

$$x=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)} \tag{1-17}$$

用复数表示简谐振动,运算上有时比较简便.

(4) 弹簧振子的固有角频率

由式(1-14),得到弹簧振子做简谐振动的角频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1-18}$$

固有角频率

它只和振动系统自身固有的物理性质有关,称为振动的固有角频率. 相对应分别有固有频率和固有周期

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1-19}$$

$$T=\frac{1}{\nu}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{1-20}$$

(5) 应用实例

图 1-10 显示一位宇航员坐在人体质量测量装置(BMMD)上. 该装置设计的目的是用于空间轨道飞行器,使宇航员在失重条件下能够测量自己的质量. BMMD 是一把装有劲度系数为 k 的弹簧的椅子,宇航员通过测量他或她坐在该椅子上时振动的周期 T,由弹簧振子的周期公式(1-20)便可求出质量.

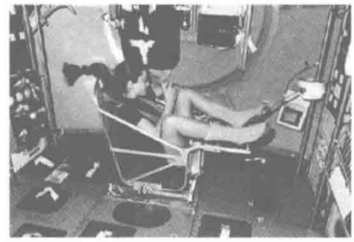

图 1-10 人体质量测量装置(BMMD)

1) 已知置于正执行任务的空间飞行器上的 BMMD 的劲度系数 $k=605.6\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$,通过测得空椅子时 BMMD 振动的周期是 0.901 49 s. 则 BMMD 参与部件的有效质量 m 可由 $T=2\pi\sqrt{m/k}$ 计算,即为

$$m=\left(\frac{k}{4\pi^2}\right)T^2=\left(\frac{605.6}{4\pi^2}\right)\times 0.901\ 49^2\ \mathrm{kg}=12.5\ \mathrm{kg}$$

2) 设 m' 是宇航员的质量,则由式(1-20)知宇航员坐在 BMMD 上,系统的固有周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m'+m}{k}}$$

则得其质量计算公式

$$m'=\left(\frac{k}{4\pi^2}\right)T^2-m$$

当宇航员坐在椅子上时,若测出系统振动的周期变为 2.088 32 s,可由上式求出

$$m'=\left[\left(\frac{605.6}{4\pi^2}\right)\times 2.088\ 32^2-12.5\right]\ \mathrm{kg}=54.4\ \mathrm{kg}$$

2. 单摆与复摆

如图 1-11 所示,将一条质量不计、长为 l 且不可伸长的细绳上端 O' 固定,下端悬挂一质量为 m 的小物体(即摆锤,并可视为质点). 当悬线静止在竖直方向时,摆锤处于平衡位置 O 点. 若将摆锤从平衡位置移开而偏离竖直方向某一角度释放时,且不计空气阻力,它就在重力的作用下,在过平衡位置 O 点的竖直平面内以悬点 O' 为圆心、长度 l 为半径的圆周上来回摆动. 这样的振动系统称为单摆,它是一个理想化的振动系统.

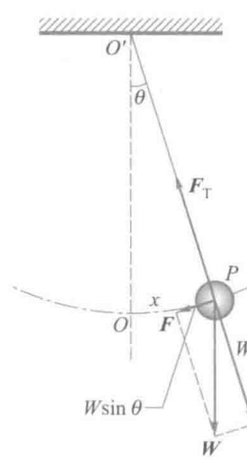

图 1-11 单摆

下面先说明单摆的小角度摆动是简谐振动.

(1) 角谐振动的动力学特征

规定悬线绕 O' 点逆时针的转向为正方向,则当摆锤在某一时刻位于图示的 P 点位置时,相对于竖直直线 $O'O$,相应的角位

移(也即角坐标)θ 为正值．摆锤受重力 $\boldsymbol{W}$ 和悬线的拉力 $\boldsymbol{F}_T$ 作用．这时合外力 $\boldsymbol{F}$ 沿摆锤运动路径的切向，大小为重力在这一切向的分量

$$F=-mg\sin\theta \tag{1-21}$$

式中负号表示力 $\boldsymbol{F}$ 的指向与规定的正方向相反，朝向平衡位置；当 $\theta<0$ 时，则力 $\boldsymbol{F}$ 为正，其指向与规定正方向相同，也朝向平衡位置．因此，在摆锤摆动过程中始终受到使它趋向平衡位置 O 的回复力 $\boldsymbol{F}$ 作用．

单摆在小角度($\theta<5°$)摆动的情况下，$\sin\theta\approx\theta$，且摆锤近似在水平方向上运动，相对平衡位置的线位移 $x\approx l\theta$，则有

$$F=-mg\theta=-\frac{mg}{l}x=-kx \tag{1-22}$$

式(1-22)表明，虽然力 $\boldsymbol{F}$ 本质上不是弹性力，但它与位移的关系及其作用却与弹性力相同，称为准弹性力．式(1-22)中的 k 称为等效劲度系数．

摆锤还可作为一个绕悬点转动的质点处理．当摆锤偏离平衡位置时，由于有重力对悬点的力矩 $\boldsymbol{M}$，它才会不断地左右摆动．对重力矩 $\boldsymbol{M}$，有

$$M=-mgl\theta \tag{1-23}$$

负号表示该力矩与角位移 θ 的方向相反，对摆锤起了回复力矩的作用．

我们把以角量表示的简谐振动称为角谐振动．式(1-23)说明单摆角谐振动的动力学特征，即回复力矩与角位移成正比而方向相反．

(2) 角谐振动的运动学特征

单摆在力矩 $\boldsymbol{M}$ 作用下，获得的对悬点 O' 的角加速度为 $\boldsymbol{\alpha}$. 根据转动定律，有

$$\alpha=\frac{M}{J}=-\frac{mgl}{J}\theta$$

式中 J 为摆锤对悬点 O' 的转动惯量 $J=ml^2$，所以上式可写成

$$\alpha=-\frac{g}{l}\theta \tag{1-24}$$

式中 g 和 l 均为正值常量，其比值可用另一个常量 ω 的平方表示，即

$$\omega^2=\frac{g}{l} \tag{1-25}$$

则式(1-24)可成为

$$\alpha=-\omega^2\theta \tag{1-26}$$

式(1-26)说明单摆的角加速度与角位移成正比而方向相反,此即角谐振动的运动学特征.

(3) 角谐振动的微分方程

由于角加速度 $\alpha=\mathrm{d}^2\theta/\mathrm{d}t^2$,式(1-26)可写成

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\theta=0 \tag{1-27}$$

式(1-27)称为角谐振动的微分方程,它也是角谐振动的一个特征式.

角谐振动的微分方程

角谐振动的微分方程的解可以写成

$$\theta=\theta_0\cos(\omega t+\varphi) \tag{1-28}$$

式中 θ_0 代表角谐振动的角振幅,式(1-28)就是角谐振动的运动学方程(表达式).

(4) 单摆的固有角频率

由式(1-25),得到单摆做简谐振动的固有角频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}} \tag{1-29}$$

它只和摆长和重力加速度有关. 其固有频率和固有周期分别为

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \tag{1-30}$$

$$T=\frac{1}{\nu}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{1-31}$$

(5) 复摆的固有角频率

如图 1-12 所示,一个在重力作用下可绕水平固定轴 O 自由摆动的任意形状的刚体称为复摆,也称为物理摆. 当刚体的质心 C 恰好在轴 O 的正下方时,复摆处于平衡位置. 当复摆偏离平衡位置即转过角位移 θ 时,略去轴处的摩擦力和空气阻力,则复摆就会在重力矩作用下来回摆动.

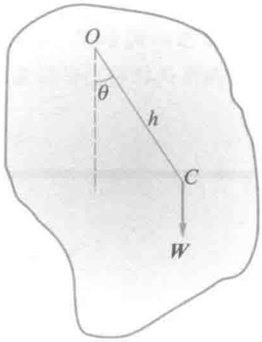

图 1-12 复摆

设刚体质心 C 到轴 O 的距离为 h,刚体对轴 O 的转动惯量为 J. 对复摆小幅度的自由摆动的分析,类似于对单摆的角谐振动的分析,可得复摆的固有角频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{mgh}{J}} \tag{1-32}$$

固有频率和固有周期分别为

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgh}{J}} \tag{1-33}$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{J}{mgh}} \tag{1-34}$$

单摆实际上是复摆的一个特例.

(6) 应用实例

授课录像：人及动物的行走速率

虽然恐龙早已灭绝，但人们根据所发现的恐龙化石和留下的足印，如图 1-13 所示，测量其腿长 L 和步距 s，便可估算出恐龙大致奔走的速度.

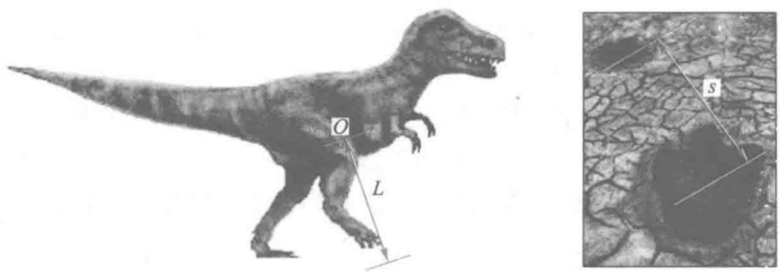

图 1-13 暴龙足印

1) 已知暴龙的腿长 L 为 3.1 m，当暴龙奔走时，近似将其腿的运动看作是一根匀质杆绕通过其一端的水平轴 O 的角谐振动. 匀质杆对轴 O 的转动惯量 $J=mL^2/3$，质心到轴 O 的距离 $h=L/2$. 由式(1-34)得暴龙腿的固有周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{J}{mgh}}=2\pi\sqrt{\frac{mL^2/3}{mgL/2}}=2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}=2\pi\sqrt{\frac{2\times 3.1}{3\times 9.8}}\ \text{s}=2.9\ \text{s}$$

2) 已知暴龙的步距 s 为 4.0 m，则可估算出恐龙的大致奔走速度为

$$v=\frac{s}{T}=1.4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}=5.0\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$$

1.2 简谐振动的能量

1.2.1 简谐振动的能量特征

授课录像：简谐振动系统的能量

做简谐振动的系统的能量为动能 E_k 和势能 E_p 之和. 以弹簧振子为例，利用速度的表达式(1-2)给出系统的动能为

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi) \tag{1-35}$$

如果取平衡位置处的势能为零，则弹性势能为

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t+\varphi)\tag{1-36}$$

因而系统的总能量为

$$E=E_k+E_p=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2=\frac{1}{2}kA^2\tag{1-37}$$

简谐振动的能量特征

式(1-37)说明简谐振动的能量特征,即简谐振动的能量与振幅的平方成正比,或等于平衡位置处的动能,或等于最大位移处的势能．由于系统不受外力作用,并且内力为保守力,故在简谐振动的过程中,虽然动能和势能都随时间做周期性变化,变化频率是位移与速度变化频率的两倍,但系统的总能量恒定不变,只有系统内动能与势能间的互相转化,如图 1-14 所示．这个结论也适用于其他形式的简谐振动,具有普遍意义.

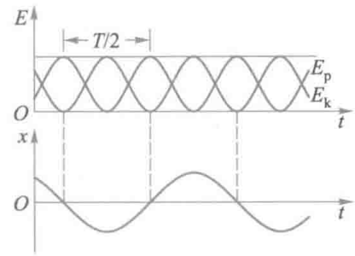

图 1-14 简谐振动的动能、势能和总能量与时间的关系曲线

弹簧振子做简谐振动时的动能、势能和总能量与位移的关系如图 1-15 所示．在一次振动过程中总能量为 E,保持不变．在位移为 x 时,势能和动能分别由图中的线段表示．当位移达到 $+A$ 和 $-A$ 时,振子的动能为零,开始返回运动．振子不可能越过势能曲线到达势能更大的区域,因为到那里振子的动能应为负值,而这是不可能的．而对于微观的振子粒子,可以越过势能曲线所形成的壁垒而进入势能更大的区域,这就是所谓的“隧道效应”.

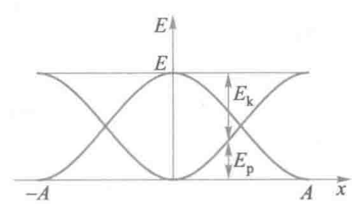

图 1-15 简谐振动的动能、势能和总能量与位移的关系曲线

由式(1-37)可知

$$A=\sqrt{\frac{2E}{k}}=\sqrt{\frac{2E_0}{k}}\tag{1-38}$$

式(1-38)说明简谐振动的特征量振幅由系统的初始能量 E_0 决定．振幅不仅表示简谐振动的运动范围,而且反映振动系统总能量的大小,或者说反映振动的强度．对弹簧振子,由初始时刻的能量关系,有

$$E_0=\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}kx_0^2=\frac{1}{2}kA^2\tag{1-39}$$

得

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

此即式(1-6).

1.2.2 能量平均值

一个随时间变化的物理量 $f(t)$，在一段时间 T 内的平均值定义为

$$\bar{f} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t \tag{1-40}$$

由式(1-35)和式(1-36)可计算在一个周期内的动能和势能的平均值分别为

$$\begin{aligned}
\overline{E_k} &= \frac{1}{T}\int_0^T E_k(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\sin^2(\omega t+\varphi)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{4}kA^2 \\
\overline{E_p} &= \int_0^T E_p(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}kA^2 \\
&= \frac{1}{4}m\omega^2 A^2
\end{aligned}$$

可见，简谐振动的动能与势能在一个周期内的平均值相等，它们都等于总能量的一半.

例 1-2

如图 1-16 所示为一光滑水平面上的弹簧振子，弹簧的劲度系数 $k=24\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$，所系物体的质量为 $m=6$ kg. 当物体静止在平衡位置时，以一水平恒力 $F=10$ N 向左作用于物体，使之由平衡位置向左运动了 $s=0.05$ m 时撤去力 F. 当重物运动到左方最远位置时开始计时，求物体的运动方程.

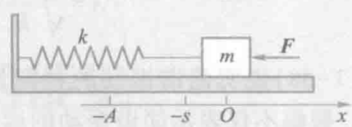

图 1-16 例 1-2 图

解：设物体的运动方程为

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

其中 $\omega=\sqrt{k/m}=\sqrt{24/6}\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}=2\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$；当物体运动到 $-A$ 位置时开始计时，初相 $\varphi=\pi$.

由于恒外力对物体所做的功等于弹簧振子所获得的机械能，所以当物体运动到最左端时，这些能量全部转化为弹簧的弹性势能.

即

$$Fs=\frac{1}{2}kA^2$$

得

$$A=\sqrt{2Fs/k}=\sqrt{2\times10\times0.05/24}\ \mathrm{m}=0.204\ \mathrm{m}$$

物体的运动方程为

$$x=0.204\cos(2t+\pi)\quad(\mathrm{SI}\ 单位)$$

例 1-3

一质量 $m=1$ kg 物体 A,放在倾角 $\theta=30°$的光滑斜面上,通过不可伸长的轻绳跨过无摩擦的定滑轮与劲度系数 $k=49\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$的轻弹簧相连,如图 1-17 所示. 将物体由弹簧尚未形变的位置静止释放并开始计时,试写出物体的振动方程.(忽略滑轮质量.)

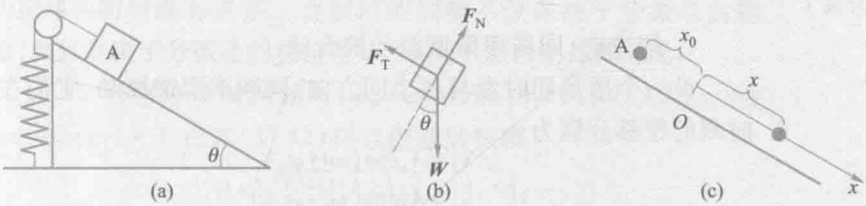

图 1-17 例 1-3 图

授课录像:例题

解:(1) 以 A 为研究对象,分析受力如图 1-17(b)所示.

平衡位置

$$mg\sin\theta=F_T=kl_0$$

$$l_0=\frac{mg\sin\theta}{k}=\frac{1\times9.8\times0.5}{49}\ \mathrm{m}=0.1\ \mathrm{m}$$

(2) 建坐标系如图 1-17(c)所示,平衡位置 O 为坐标原点.

初始位置 $x_0=-l_0$

(3) 列方程

$$mg\sin\theta-F_T=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$mg\sin\theta-k(x+l_0)=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m}x+\frac{k}{m}l_0-g\sin\theta=0$$

$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m}x=0$ 物体 A 做简谐振动

角频率 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{49}\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}=7\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$

(4) 设振动表达式:$x=A\cos(7t+\varphi_0)$ $x=A\cos(7t+\varphi_0)$(SI 单位)

(5) 由初始条件 $x_0=-l_0$,$\dot{x}_0=0$ 及已知数据,代入

得 $$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}=l_0=0.1\ \mathrm{m}$$

$$\tan\varphi_0=-\frac{v_0}{\omega x_0}=0,\quad \varphi_0=\pi$$

振动表达式 $x=0.1\cos(7t+\pi)$(SI 单位)

注意:(1) 平衡位置与初始位置的区别.

(2) 弹簧伸长与坐标值的区别.

(3) $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ 与角度 θ 无关,与弹簧振子水平或竖直放置无关.

(4) 若滑轮质量不可忽略不计,该题如何解?

1.3 简谐振动的合成

日常生活中经常见到一个系统参与两个或多个振动的情况. 例如,悬挂在颠簸船舱中的钟摆,两列声波同时传入人耳等. 而

视频:简谐振动的合成 1

视频:同一直线上 n 个简谐振动的合成

任何复杂的振动形式都可看作是若干个简谐振动的合成，所以下面只讨论简谐振动的合成问题.

1.3.1 同方向简谐振动的合成

1. 同方向、同频率简谐振动的合成

设一个质点同时参与两个同方向、同频率简谐振动，它们在 t 时刻的位移分别为

$$x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$$
$$x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

合振动的位移 x 应等于上述两个分振动位移的代数和，即

$$x=x_1+x_2=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)+A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

利用和角的三角函数公式，将上式中的余弦函数展开并整理得

$$x=(A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2)\cos\omega t-(A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2)\sin\omega t$$

令

$$A\sin\varphi=A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2 \tag{1-41a}$$
$$A\cos\varphi=A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2 \tag{1-41b}$$

则

$$x=A\cos\varphi\cos\omega t-A\sin\varphi\sin\omega t=A\cos(\omega t+\varphi)$$

因此两个同方向、同频率简谐振动的合振动还是与分振动同方向、同频率简谐振动，其振幅 A 可由式(1-41a)与式(1-41b)的平方求和得到，即

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)} \tag{1-42}$$

其初相 φ 可由式(1-41a)与式(1-41b)相除得到，即

$$\varphi=\arctan\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2} \tag{1-43}$$

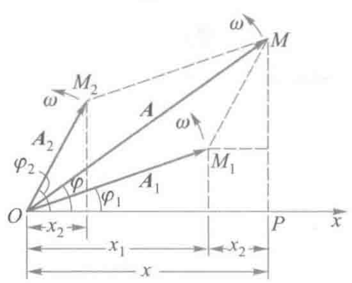

图 1-18 两个同方向、同频率简谐振动的合成

利用前面学过的旋转矢量图，我们也可得出上述结果. 如图 1-18 所示，从原点 O 相对于参考方向 x 轴分别作出两个分振动的振幅矢量 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$，在 $t=0$ 时它们与 x 轴的夹角分别为两个分振动的初相 φ_1 和 φ_2，t 时刻它们在 x 轴的投影分别表示两个分振动的位移 x_1 和 x_2. 由矢量合成的平行四边形法则，得到 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 的合矢量 $\boldsymbol{A}$. 由图 1-18 可以看出，t 时刻 $\boldsymbol{A}$ 在 x 轴的投影为 $x=x_1+x_2$，x 表示合振动的位移，因此 $\boldsymbol{A}$ 就是合振动的振幅矢量. 在 $t=0$ 时 $\boldsymbol{A}$ 与 x 轴的夹角 φ 为合振动的初相. 因为 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 以同一匀角速度 ω 绕 O 点逆时针旋转，它们之间的夹角即两个分振动的相位差 $\varphi_2-\varphi_1$ 保持不变，因而由 A_1 和 A_2 构成的平行四边形 OM_1MM_2 的形状在旋转过程中始终保持不变，说明合振动的振幅矢量 $\boldsymbol{A}$ 的长度不变，并也以角速度 ω 旋转. 所以合矢量 $\boldsymbol{A}$ 的端