直觉模糊偏好决策理论与方法

廖虎昌／著

科学出版社

直觉模糊偏好决策理论与方法

廖虎昌　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

偏好关系（也称为判断矩阵）是现实决策问题中决策者（或专家）在表达对一组目标（方案、属性或准则）的评估或偏好信息时经常用到的描述工具。直觉模糊偏好关系、直觉积性偏好关系以及它们的区间形式较模糊偏好关系、积性偏好关系和语言偏好关系而言，能够更加细致合理地描述客观世界的模糊本质。基于直觉模糊偏好关系、区间直觉模糊偏好关系和直觉积性偏好关系的决策理论与方法受到了国内外学者的广泛关注，并已成功应用于决策分析、工程管理、供应链管理、服务管理、医疗管理等诸多领域。本书主要介绍近年来国内外学者特别是作者本人在以直觉模糊偏好关系、区间直觉模糊偏好关系和直觉积性偏好关系为表达形式的个体及群体决策理论与方法方面的最新研究成果。

本书可作为高等院校运筹学、管理科学、信息科学、模糊数学、系统工程、工业工程等专业的高年级本科生和研究生教材，也可作为工程技术人员、管理干部、教师以及相关学者的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

直觉模糊偏好决策理论与方法/廖虎昌著. —北京：科学出版社，2017.3

ISBN 978-7-03-051867-5

Ⅰ. ①直… Ⅱ. ①廖… Ⅲ. ①模糊集理论–研究 Ⅳ. ①O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 034051 号

责任编辑：马 跃 / 责任校对：王 瑞
责任印制：张 伟 / 封面设计：无极书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http：//www.sciencep.com
北京京华虎彩印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 3 月第 一 版 开本：B5（720 × 1000）
2017 年 3 月第一次印刷 印张：15 3/8
字数：308 000

定价：96.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

偏好关系（也称为判断矩阵）是现实决策问题中决策者（或专家）在表达对一组目标（方案、属性或准则）的评估或偏好信息时经常用到的描述工具。它通过比较每两个目标的关系而求得各个目标的排序。偏好关系决策理论已经在经济、管理、军事、医疗等领域得到广泛应用，并在实际应用中形成了许多行之有效的理论和方法。到目前为止，研究得比较成熟的偏好关系主要有三种：模糊偏好关系（或称为互补偏好关系）、积性偏好关系（或称为互反偏好关系）和语言偏好关系。模糊偏好关系的核心思想是用可在单位闭区间[0，1]中任意取值的隶属函数的值来表征决策者对两个不同目标的偏好关系；积性偏好关系的基本原理是，在比较两个目标时，决策者用 1/9-9 标度中的某个值来刻画其对两目标的偏好；语言偏好关系是用语言评估标度去描述决策者的偏好信息。以上三种偏好关系元素的取值都仅是单一的值，在实际应用中，它们不能同时表示支持、反对和犹豫的信息。为此，Atanassov 对模糊集进行了拓展，于 1983 年和 1989 年先后提出了直觉模糊集及区间直觉模糊集的概念，把仅考虑隶属度的传统模糊集推广到同时考虑隶属度、非隶属度与犹豫度三个方面信息的直觉模糊集和区间直觉模糊集。基于此，Xu 在 2007 年先后提出了直觉模糊偏好关系和区间直觉模糊偏好关系的概念。通过综合积性偏好关系和直觉偏好关系在表达决策者偏好信息方面的优点，Xia 等于 2013 年提出了直觉积性偏好关系的概念。

直觉模糊偏好关系、直觉积性偏好关系以及它们的区间形式较模糊偏好关系、积性偏好关系和语言偏好关系而言，能够更加细致合理地描述客观世界的模糊本质，从而使直觉模糊偏好关系、直觉积性偏好关系以及它们的区间形式在实际决策中得到广泛应用。基于直觉模糊偏好关系、区间直觉模糊偏好关系和直觉积性偏好关系的决策理论与方法受到了国内外学者的广泛关注，并已成功应用于决策分析、工程管理、供应链管理、服务管理、医疗管理等诸多领域。基于直觉模糊偏好关系、区间直觉模糊偏好关系和直觉积性偏好关系的群体决策理论与方法构成了直觉模糊偏好决策理论的重要内容。

本书主要对近年来国内外学者特别是作者本人在以直觉模糊偏好关系、区间直觉模糊偏好关系和直觉积性偏好关系为表达形式的个体及群体决策理论与方法方面的最新研究成果进行系统深入的介绍。本书共分为 5 章。

第 1 章主要从文献计量学的角度概述模糊决策和直觉模糊决策的研究现状。

首先，对模糊决策的相关理论发展进行概括介绍，并简要介绍直觉模糊集的概念和相关运算法则。然后，分析自然科学引文索引拓展版（Science Citation Index Expanded，SCIE）和社会科学引文索引（Social Sciences Citation Index，SSCI）数据库中的 13901 篇模糊决策相关的论文，从文献计量学的角度介绍模糊决策理论的年度趋势、领先国家和机构、高影响力期刊、高被引论文和学科分布。最后，对 SCIE 和 SSCI 数据库中直觉模糊理论方面的 1318 篇文献进行分析，揭示直觉模糊理论方面的高被引论文、高影响力作者和高影响力期刊。

第 2 章主要探讨直觉模糊偏好关系的一致性与决策方法。首先，介绍直觉模糊偏好关系的定义和起源。然后，从传递性出发，分别介绍直觉模糊偏好关系的各种不同形式的加性一致性定义和积性一致性定义。在给出直觉模糊偏好关系的一致性测度方法之后，提出非一致性直觉模糊偏好关系的分式修正算法和几何加权修正算法。基于直觉模糊偏好关系的决策问题的核心是从直觉模糊偏好关系中导出目标的权重向量，因此，本章从精确优先权、区间值优先权和直觉模糊优先权三个角度重点介绍直觉模糊偏好关系的优先权导出方法，包括线性规划法、典型的分式规划法、最小方差优化和目标规划法、目标规划法、误差分析法、规范化的顺序求和法、线性目标规划法以及分式规划法等。最后，给出直觉模糊层次分析法的算法步骤，并将其应用于全球供应商管理这一实际的决策问题中。本章是直觉模糊偏好决策理论中最基础的部分。

第 3 章主要介绍直觉模糊偏好关系的群体决策理论与方法。首先，提出求解基于直觉模糊偏好关系的群体决策问题的基本框架，将直觉模糊偏好关系的群体决策过程分解为单个直觉模糊偏好关系一致性检验和非一致性修正过程、群体共识达成过程和方案选择过程。在给出各种不同形式的直觉模糊信息集成算子之后，从个体优先权和整体优先权两个角度介绍直觉模糊偏好关系的群体决策方法，并探讨不同集成算子对直觉模糊偏好关系的一致性的影响，给出群体直觉模糊层次分析法的算法过程。本章着重介绍直觉模糊偏好关系的六种群体共识测度，并对它们进行比较分析。在介绍简单的群体共识达成方法之后，从专家层和方案层两个角度详细介绍基于直觉模糊偏好关系的群体共识达成算法。本章是全书的核心章节。

第 4 章主要介绍区间直觉模糊偏好关系的一致性及基于区间直觉模糊偏好关系的群体决策方法。首先，给出近似的积性一致性区间直觉模糊偏好关系、完美的积性一致性区间直觉模糊偏好关系和可接受的积性一致性区间直觉模糊偏好关系的定义。然后，介绍积性一致性区间直觉模糊偏好关系的理想性质，给出两种构造近似或完美积性一致性区间直觉模糊偏好关系的算法。接着，介绍一种修正非一致性区间直觉模糊偏好关系的一致性程度的收敛的迭代算法。最后，给出求解基于区间直觉模糊偏好关系的群体决策问题的算法过程，并用算例演示该算法

在处理区间直觉模糊偏好关系的群决策问题上的有效性。

第 5 章主要介绍直觉积性偏好关系的一致性与决策方法。首先，介绍直觉积性集的定义和运算法则，并在此基础上给出直觉积性偏好信息的集成算子，提出基于直觉积性偏好关系信息集成的决策方法，并将其应用于中国气象行业的评估和分析中。然后，证明简单的直觉积性加权几何集成算子在保持直觉积性偏好关系一致性方面的优良性质，给出求解含有直觉积性偏好关系的群体决策问题的完整的层次分析过程，并通过水电站绩效评估的实例验证直觉积性层次分析法的有效性和可行性。最后，介绍直觉积性环境下的最小最大法，并通过肺气肿疾病严重程度评估的案例演示算法的计算过程。

本书可作为高等院校运筹学、管理科学、信息科学、模糊数学、系统工程、工业工程等专业的高年级本科生和研究生教材，也可作为工程技术人员、管理干部、教师及相关学者的参考书。

借本书出版之际，衷心感谢四川大学商学院长江学者特聘教授徐泽水、英国曼彻斯特大学 Xiao-Jun Zeng、西班牙格拉纳达大学 Francisco Herrera 等给予的热情支持和帮助。本书的有关研究得到国家自然科学基金项目（71501135）、中国博士后基金特别资助项目（2016T90863）、中国博士后基金面上项目（2016M602698）、四川大学优秀青年人才基金项目（2016SCU04A23）和四川大学引进人才科研启动基金项目（1082204112042）等的资助。在此特向国家自然科学基金委员会、中国博士后基金委员会和四川大学表示感谢！

廖虎昌

2017 年 2 月于西班牙格拉纳达

部分符号说明

$A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$	方案集
$C=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$	属性集
$E=\{E_1,E_2,\cdots,E_s\}$	专家集
$i,t,k=1,2,\cdots,m$	方案的数目
$j,q=1,2,\cdots,n$	属性的数目
$\omega_i\,(i=1,2,\cdots,m)$	方案的精确权重
$\tilde{\omega}_i=(\omega_i^{\mu},\omega_i^{\nu})\,(i=1,2,\cdots,m)$	方案的直觉模糊权重
$\hat{\omega}_i=[\omega_i^{l},\omega_i^{u}]\,(i=1,2,\cdots,m)$	方案的区间值权重
$\lambda_l\,(l=1,2,\cdots,s)$	专家的权重
$\Omega=(a_{ik})_{m\times m}$	积性偏好关系
$B=(b_{ik})_{m\times m}$	模糊偏好关系
$R=(r_{ik})_{m\times m}$	直觉模糊偏好关系
$\overline{R}=(\overline{r}_{ik})_{m\times m}$	完美的积性一致性直觉模糊偏好关系
$\tilde{R}=(\tilde{r}_{ik})_{m\times m}$	区间直觉模糊偏好关系
$\overline{\tilde{R}}=(\overline{\tilde{r}}_{ik})_{m\times m}$	完美的积性一致性区间直觉模糊偏好关系
$\hat{R}=(\hat{r}_{ik})_{m\times m}$	区间模糊偏好关系
$P=(p_{ij})_{m\times n}$	直觉模糊评估矩阵
$G=(\alpha_{ik})_{m\times m}$	直觉积性偏好关系
$X=(\chi_{ij})_{m\times n}$	直觉积性评估矩阵
$r_{ik}=(\mu_{ik},v_{ik})$	直觉模糊数
$\alpha_{ik}=(\rho_{ik},\sigma_{ik})$	直觉积性数
$\hat{r}_{ik}=(\hat{r}_{ik}^{-},\hat{r}_{ik}^{+})$	区间数
τ	一致性阈值
γ	群体共识阈值
C_R	直觉模糊偏好关系的一致性测度
σ	控制参数
p	迭代次数

N	最大迭代次数
η	迭代步长
$\rho_{ik}, \delta_{ik}, \varepsilon_{ik}, \gamma_{ik}, \xi_{ik}, \zeta_{ik}, \phi_{ik}, \varphi_{ik}$	松弛变量
f	目标函数值；专家代号
t	群体中被剔除掉的专家个数
Θ	所有直觉模糊数的集合
M	所有直觉积性数的集合

目　　录

第 1 章 绪　论

决策对于个体和组织来说都是一项非常重要的活动。作为一个交叉学科的研究领域，它吸引了心理学、经济学、计算机科学、数学等几乎所有学科的研究学者的兴趣。在许多决策环境中，如在知识系统里面，专家往往根据他们在本领域的常识来评判一列备选决策，而在绝大多数情况下，他们的这种知识或认知无法量化，而只能用抽象的语言术语来表达。例如，在评估一项政府的重大工程项目时，专家可能会说“这个项目在理论上基本上是好的，但是可行性有一点儿弱”。在这个例子中，专家不可能用精确的数值来描述“基本上”“一点儿”这些词汇的精准含义，但是，所有的听众都能够理解它们所表达的意思。为了更加细致地刻画这些不确定信息，以隶属度为特征的模糊集理论被提了出来。然而，模糊集理论只能表征正面信息，不能表征反面和不确定信息。为此，Atanassov 提出了以隶属度、非隶属度和犹豫度为特征的直觉模糊集的概念。直觉模糊集能够更加全面地表征专家和决策者的模糊与不确定信息，因而更加灵活方便，在决策科学领域得到了良好应用，并广泛应用于机器学习、模式识别、管理工程、医疗诊断等领域。

2015 年是模糊集理论诞生 50 周年，各大国际学术协会和组织举行了不同形式的活动及会议来庆祝这一划时代的科学发现。由于模糊决策相关的研究已经持续半个多世纪，并且还在持续地吸引人们的研究兴趣，所以有必要对该研究领域进行全面的回顾，进而找出其潜在的模式和科学发展路径。本章首先对模糊决策的相关理论发展进行概括介绍，并简要介绍直觉模糊集的概念和相关运算法则。然后从文献计量学的角度介绍模糊决策理论的年度趋势、领先国家和机构、高影响力期刊、高被引论文和学科分布。最后分析了直觉模糊理论方面的高被引论文、高影响力作者和高影响力期刊。

1.1 模糊决策与直觉模糊集

1.1.1 模糊决策概述

决策是个体和组织最重要的日常活动。作为决策理论的重要分支，多准则决策（multiple criteria decision making）取得了巨大的成功。一般而言，针对连续和离散的多准则决策问题，分别有两种不同的求解方法——多目标决策（multiple objective decision making）和多属性决策（multiple attribute decision making）。在多目标决策中，方案的数量是无限的，而且不同准则之间的权衡往往能用连续函数进行描述。多属性决策有别于多目标决策之处在于，它需要通过一系列交互式设计的约束之间的权衡来找出最佳方案，也就是说，它需要在一列有限的方案集中，根据多个可能相互冲突的属性之间的权衡来找出最优方案。尽管哲学家喜欢区分准则、性质和属性的概念，但是在模糊决策的相关研究中，许多学者往往将多准则决策与多属性决策不加区分，也就是说，他们所提到的多准则决策往往指的是离散的多准则决策问题[1]。

在许多决策问题（特别是多属性决策问题）中，专家往往根据他们在本专业的常识来评估一列备选方案，而且在多数情况下，他们的知识和认知无法精确定量表达，而只能用模糊的语言术语表示，如“低的”价格、“高的”质量、“好的”绩效等。正如传奇的英国哲学家和诺贝尔奖获得者 Russell[2]指出的那样，“所有的传统逻辑都习惯性地采用精确符号，这在我们这个星球上是不适用的，而只有可能存在于假想的天空中”。精确与不确定之间的关系已经困扰了学者和哲学家几世纪之久。1930 年，波兰逻辑学家和哲学家 Lukasiewicz[3]提出了模糊（或多值）逻辑，将“真”的取值范围拓展到[0,1]，并由此诞生了一门非精确推理技术——可能性理论（possibility theory）。1937 年，另一位哲学家 Black[4]首次给出了模糊集的简单形式，并列出了模糊运算的基本想法。而在近 30 年之后，Zadeh[5]重新发现了模糊集概念，并将可能性理论推广到数学逻辑的一般系统中。由于 Zadeh 给出了模糊集的系统化范式和运算规则，所以他被称为“模糊逻辑之父”。模糊逻辑并不是指逻辑本身是模糊的，而是指描述模糊性的数学逻辑[6]，它包括基于隶属度（而非经典二元逻辑中的精确数）的知识表达的数学原理。Zadeh 引入的模糊集利用隶属度来表征给定目标在一个模糊界定的类上的相似性程度，它被当作一种重要的问题描述和求解工具。与概率论解释统计不确定性不同，模糊集理论主要用来解释人们主观感知与表达的模糊不确定性[7]。

由于 Bellman 和 Zadeh[8]的开创性工作，模糊集理论被引入决策分析领域，为传统的决策分析框架衍生出一个全新的研究分支。之后，为了更好地数理化描述决策过程中的语言术语，Zadeh[9]进一步提出了模糊语言方法，采用取值为自然人工语言中的词或句子的语言变量来表征人们的定性评估结果。虽然语言变量没有数值那么精确，但是它增强了决策模型的可行性、灵活性和可行度。语言变量的引入进一步拓宽了模糊集理论在决策分析中的应用范围，并由此开创了一个全新且活跃的研究领域——词计算（computing with words，CWW），它是一门用自然语言进行推理、计算和决策的方法论[10]。由于模糊集和精确值相比，与人们的主观认知与表达更加贴近，所以它在不同的决策分析领域中，如工程、商业、医疗、

环境科学和自然科学等获得了许多成功的应用。许多不同类型的、用来处理不同决策问题的模糊决策方法都被提了出来，如模糊偏好关系[11, 12]、模糊神经网络[13]、模糊迹理论[14]、模糊层次分析法[15-18]、模糊逼近理想解排序（technique for order of preference by similarity to ideal solution，TOPSIS）法[19]、模糊多属性优化与妥协解求解（visekriterijumka optimizacija i kompromisno resenje①，VIKOR）法[20, 21]、模糊语言决策模型[22]、模糊规划法[23]等。

此外，为了更好地描述复杂不确定性认知，模糊集理论在不同的研究方向得到了进一步拓展，其中最引人注目的方向就是探讨如何表征模糊集的隶属度[24]。为了全面地表达和刻画不确定性，许多不同的模糊集拓展形式被提了出来，如直觉模糊集[25, 26]、区间直觉模糊集[27]、直觉积性集[28]、犹豫模糊集[29]、犹豫模糊语言集[30, 31]等。直觉模糊集和直觉积性集均采用两个维度（隶属度和非隶属度）来表征不确定性与模糊性，只是这两种集合的取值分别用 0.1-0.9 标度和 1/9-9 标度表示。区间直觉模糊集是直觉模糊集的区间形式，它的隶属度和非隶属度分别用区间表示。犹豫模糊集采用一列可能的取值来表示某目标隶属于给定集合的程度，而犹豫模糊语言集利用连续的语言术语项所构成的有序子集来表达某目标隶属于给定集合的程度。这些不同的模糊集拓展形式产生了不同的模糊决策相关研究成果，包括模糊信息集成理论[32-36]、模糊测度理论[37-44]、模糊偏好关系理论[45-52]等。

1.1.2 直觉模糊集及其运算法则

1965 年，Zadeh[5]首次给出了模糊集的完整数学定义，开创了模糊数学这一崭新的学科领域。

定义 1.1[5] 设 X 是一个非空集合，集合 X 上的模糊集 F 由取值为 $[0,1]$ 区间的隶属度函数 μ_F 表征，其中，$\mu_F: X \rightarrow [0,1]$。$x$ 的隶属度取值 $\mu_F(x)$ 称为模糊数，表示元素 x 在集合 F 中的隶属度程度。

1986 年，Atanassov[25]对模糊集进行了推广，用隶属度、非隶属度和犹豫度三个指标来表征一个元素与特定集合的关系，提出了直觉模糊集的概念。

定义 1.2[25] 设 X 是一个非空集合，则称

$$A = \{< x, \mu_A(x), \nu_A(x) > | x \in X\} \tag{1.1}$$

为直觉模糊集，其中，$\mu_A(x)$ 和 $\nu_A(x)$ 分别表示 X 中元素 x 属于 X 的子集 A 的隶属度和非隶属度，且满足

$$0 \leqslant \mu_A(x) \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \nu_A(x) \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \mu_A(x) + \nu_A(x) \leqslant 1 \tag{1.2}$$

① 塞尔维亚语。

其中，

$$\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-\nu_A(x) \tag{1.3}$$

式中，$\pi_A(x)$ 表示 X 中元素 x 属于 A 的犹豫度或不确定度。

为方便起见，Xu[36]称 $\alpha=(\mu_\alpha,\nu_\alpha)$ 为直觉模糊数，且满足条件 $0\leqslant\mu_\alpha\leqslant1$，$0\leqslant\nu_\alpha\leqslant1$，$0\leqslant\mu_\alpha+\nu_\alpha\leqslant1$。Szmidt 和 Kacprzyk[40]证明了在计算直觉模糊数的距离测度时，第三个指标——犹豫度不可以省略。对任意两个直觉模糊数 $\alpha=(\mu_\alpha,\nu_\alpha,\pi_\alpha)$ 和 $\beta=(\mu_\beta,\nu_\beta,\pi_\beta)$，其规范化的汉明距离可通过式（1.4）计算：

$$d(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}(|\mu_\alpha-\mu_\beta|+|\nu_\alpha-\nu_\beta|+|\pi_\alpha-\pi_\beta|) \tag{1.4}$$

其中，$0\leqslant d(\alpha,\beta)\leqslant1$。

在模糊集里面，元素 x 的非隶属度定义为 1 减去其隶属度，因此在隶属度给定的前提下，它是一个确定的值。而在直觉模糊集里，非隶属度和隶属度是两个完全独立的指标，它们之间的唯一联系是非隶属度应该小于或等于 1 减去其对应的隶属度。隶属度和非隶属度均可看作 X 上的模糊集，因此，直觉模糊集比模糊集能够更加全面地表示不确定信息。此外，模糊集没有给隶属度及其反面信息之间的不确定信息预留任何空间，但是，在人们认知的实践中，这种不确定性和模棱两可是很常见的，例如，当专家在对方案进行评估时，“不同意”和“不知道”表示的显然是两种截然不同的信息。引入不确定指标是直觉模糊集最重要的特征。在实际的决策问题中，由于信息的不充分、不可量化、不可获得等因素，决策者可能无法准确地表达偏好信息，此时，用直觉模糊数来表示这种不确定信息就非常合适。

设 $\alpha,\alpha_1,\alpha_2\in\Theta$ 为三个直觉模糊数，其中，$\mu_\alpha\in[0,1]$，$\nu_\alpha\in[0,1]$，$\mu_\alpha+\nu_\alpha\leqslant1$，$\Theta$ 为所有直觉模糊数的集合，则有如下几点。

（1）$\lambda\alpha=(1-(1-\mu_\alpha)^\lambda,\nu_\alpha{}^\lambda)$，$\lambda>0$。

（2）$\alpha^\lambda=(\mu_\alpha{}^\lambda,1-(1-\nu_\alpha)^\lambda)$，$\lambda>0$。

（3）$\overset{n}{\underset{j=1}{\oplus}}\alpha_j=\left(1-\prod_{j=1}^{n}(1-\mu_{\alpha_j}),\ \prod_{j=1}^{n}\nu_{\alpha_j}\right)$。

（4）$\overset{n}{\underset{j=1}{\otimes}}\alpha_j=\left(\prod_{j=1}^{n}\mu_{\alpha_j},\ 1-\prod_{j=1}^{n}(1-\nu_{\alpha_j})\right)$。

直觉模糊集的减法和除法可定义如下。

定义 1.3[26]　对任意给定的直觉模糊集 A 和 B，其减法为

$$A\ominus B=\left\{\left(x,\mu_{A\ominus B}(x),\nu_{A\ominus B}(x)\right)\mid x\in X\right\} \tag{1.5}$$

其中，

$$\mu_{A\ominus B}(x)=\begin{cases}\dfrac{\mu_A(x)-\mu_B(x)}{1-\mu_B(x)}, & \text{当}\mu_A(x)\geqslant\mu_B(x)\text{且}\nu_A(x)\leqslant\nu_B(x)\text{且}\nu_B(x)>0\\ & \text{且}\nu_A(x)\pi_B(x)\leqslant\pi_A(x)\nu_B(x)\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{1.6}$$

$$\nu_{A\ominus B}(x)=\begin{cases}\dfrac{\nu_A(x)}{\nu_B(x)}, & \text{当}\mu_A(x)\geqslant\mu_B(x)\text{且}\nu_A(x)\leqslant\nu_B(x)\text{且}\nu_B(x)>0\\ & \text{且}\nu_A(x)\pi_B(x)\leqslant\pi_A(x)\nu_B(x)\\ 1, & \text{其他}\end{cases} \tag{1.7}$$

其除法为

$$A\oslash B=\left\{\left(x,\mu_{A\oslash B}(x),\nu_{A\oslash B}(x)\right)\mid x\in X\right\} \tag{1.8}$$

其中，

$$\mu_{A\oslash B}(x)=\begin{cases}\dfrac{\mu_A(x)}{\mu_B(x)}, & \text{当}\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x)\text{且}\nu_A(x)\geqslant\nu_B(x)\text{且}\mu_B(x)>0\\ & \text{且}\mu_A(x)\pi_B(x)\leqslant\pi_A(x)\mu_B(x)\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{1.9}$$

$$\nu_{A\oslash B}(x)=\begin{cases}\dfrac{\nu_A(x)-\nu_B(x)}{1-\nu_B(x)}, & \text{当}\mu_A(x)\leqslant\mu_B(x)\text{且}\nu_A(x)\geqslant\nu_B(x)\text{且}\mu_B(x)>0\\ & \text{且}\mu_A(x)\pi_B(x)\leqslant\pi_A(x)\mu_B(x)\\ 1, & \text{其他}\end{cases} \tag{1.10}$$

定义 1.4[36] 对于直觉模糊数$\alpha=(\mu_\alpha,\nu_\alpha)$，其得分函数定义为

$$S(\alpha)=\mu_\alpha-\nu_\alpha \tag{1.11}$$

其精确函数定义为

$$H(\alpha)=\mu_\alpha+\nu_\alpha \tag{1.12}$$

根据上述函数，Xu[36]提出了方案 1.1 来比较两个直觉模糊数$\alpha_i=(\mu_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i})$和$\alpha_j=(\mu_{\alpha_j},\nu_{\alpha_j})$的大小。

方案 1.1

- 若$S(\alpha_i)<S(\alpha_j)$，则$\alpha_i<\alpha_j$。
- 若$S(\alpha_i)=S(\alpha_j)$，则有如下两种情况。
  - 若$H(\alpha_i)<H(\alpha_j)$，则$\alpha_i<\alpha_j$。
  - 若$H(\alpha_i)=H(\alpha_j)$，则$\alpha_i=\alpha_j$。

Beliakov 等[53]指出了排序方案 1.1 的缺陷，即该排序方案对直觉模糊数的标量积是不封闭的。也就是说，$\alpha_i<\alpha_j$并不一定意味着$\lambda\alpha_i<\lambda\alpha_j$，其中，$\lambda$是一个标量。除了方案 1.1 的排序方法，Szmidt 和 Kacprzyk[54]也提出了用一个函数来比较两个直觉模糊数，该函数的数学形式为

$$\rho(\alpha)=0.5(1+\pi_\alpha)(1-\mu_\alpha) \tag{1.13}$$

$\rho(\alpha)$ 的值越小，则从反映的正面信息和可靠信息的角度来看，直觉模糊数 α 的值应该越大。

例 1.1　考虑三个直觉模糊数 $\alpha_1=(0.9,0)$、$\alpha_2=(0.0001,0.9)$ 和 $\alpha_3=(0,0.9)$。根据式（1.13）可得，$\rho(\alpha_1)=0.055$，$\rho(\alpha_2)=0.5499$，$\rho(\alpha_3)=0.55$，因此，$\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3$。这与人们的直观认识相符。

方案 1.1 得到的序列是全序的，也就是说，它可以用来比较任何两个直觉模糊数的大小。Szmidt 和 Kacprzyk 的排序方法非常简洁，仅包含一个对比函数。当直觉模糊数的参数值发生微小变化时，该方法也能得到与人们认知相一致的结果。然而，该函数是一个偏序函数，也就是说，仅根据该函数，有时候无法区分两个直觉模糊数。

例 1.2　设 $\alpha_1=(0.2,0)$ 和 $\alpha_2=(0.1,0.3)$ 为两个直觉模糊数，显然这两个直觉模糊数是不同的。但是，由式(1.13)可得，$\rho(\alpha_1)=0.5\times(1+0.8)\times(1-0.2)=0.72$，$\rho(\alpha_2)=0.5\times(1+0.6)\times(1-0.1)=0.72$。于是，$\rho(\alpha_1)=\rho(\alpha_2)$。因此，此时式（1.13）无法比较直觉模糊数 α_1 和 α_2 的大小。

之后，Zhang 和 Xu[55]对 Szmidt 和 Kacprzyk 的排序方法进行了改进，并给出了直觉模糊数 $\alpha=(\mu_\alpha,v_\alpha)$ 的相似性函数 $L(\alpha)$，如式（1.14）所示：

$$L(\alpha)=\frac{1-v_\alpha}{1+\pi_\alpha} \tag{1.14}$$

根据相似性函数和精确函数，Zhang 和 Xu 提出了一种比较任意两个直觉模糊数 $\alpha_i=(\mu_{\alpha_i},v_{\alpha_i})$ 和 $\alpha_j=(\mu_{\alpha_j},v_{\alpha_j})$ 的全序方案。

方案 1.2

- 若 $L(\alpha_i)<L(\alpha_j)$，则 $\alpha_i<\alpha_j$。
- 若 $L(\alpha_i)=L(\alpha_j)$，则有如下两种情况。
  - 若 $H(\alpha_i)<H(\alpha_j)$，则 $\alpha_i<\alpha_j$。
  - 若 $H(\alpha_i)=H(\alpha_j)$，则 $\alpha_i=\alpha_j$。

在做了深入的比较之后，Liao 和 Xu[56]认为方案 1.2 是比较直觉模糊数大小的最优方案，因为它不仅能够确保当直觉模糊数的参数发生微小变化时得到的结果仍然与人们的直觉一致，也能获得直觉模糊数的全序。方案 1.1 和式（1.13）都不具备这个性质。但是，由于方案 1.1 和式（1.13）简便易用，所以它们在理论推导中依然具有一定的作用。

1.2　模糊决策相关研究的文献计量分析

文献计量分析是为探索某一领域的发展脉络而广泛采用的方法[57, 58]。虽然有