牛顿科学馆

Newton Science Museum

解析几何方法漫谈

王敬赓　岳昌庆◎主编

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

Newton Science Museum

牛顿科学馆

解析几何方法漫谈

王敬赓　岳昌庆◎主编
王敬赓◎编著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

解析几何方法漫谈/王敬赓,岳昌庆主编. —北京:北京师范大学出版社,2017.6
(牛顿科学馆)
ISBN 978-7-303-21943-8

Ⅰ. ①解… Ⅱ. ①王… ②岳 Ⅲ. ①解析几何—普及读物
Ⅳ. ①O182-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 015856 号

营销中心电话 010-58805072 58807651
北师大出版社学术著作与大众读物分社网 http://xueda.bnup.com

出版发行:北京师范大学出版社 www.bnup.com
北京市海淀区新街口外大街 19 号
邮政编码:100875
印 刷:三河市兴达印务有限公司
经 销:全国新华书店
开 本:890 mm×1240 mm 1/32
印 张:7.75
字 数:175 千字
版 次:2017 年 6 月第 1 版
印 次:2017 年 6 月第 1 次印刷
定 价:30.00 元

策划编辑:岳昌庆 责任编辑:岳昌庆
美术编辑:王齐云 装帧设计:王齐云
责任校对:陈 民 责任印制:马 洁

序 言

按照近代数学的观点，有一类变换就有一种几何学。初等几何变换既是初等几何研究的对象，又是初等几何研究的方法。《几何变换漫谈》较为详细地介绍了平移、旋转、轴反射及位似等初等几何变换的性质，并配有应用这些变换解题的丰富的例题和习题。书中还通过平行投影和中心投影，简要地介绍了仿射变换和射影变换。最后还直观形象地介绍了拓扑变换。

哲学家笛卡儿通过建立坐标系，用代数方法来研究几何，具体说就是用方程来研究曲线，这就是解析几何方法的实质。解析几何最初就叫坐标几何。《解析几何方法漫谈》通过解析几何创立的历史，解析几何方法与传统的欧几里得几何方法的比较，对解析几何方法进行了深入的分析，并介绍了解析几何解题方法的若干技巧，如轮换与分比、斜角坐标系的应用、旋转与复数及解析几何方法的反用，等等。

为了扩大青少年朋友们关于近代几何学的视野，向他们尽可能通俗直观地介绍一点关于拓扑学——外号叫橡皮几何学——的知识，《橡皮几何学漫谈》选择了若干古老而有趣的、但属于拓扑学范畴的问题，包括哥尼斯堡七桥问题、关于凸多面体的欧拉公式以及地图着色的四色问题，等等。当然也通俗直观地介绍关于拓扑学的一些基本概念和方法，还谈到了纽结和链环等。

北京师范大学出版社将上述 3 本“漫谈”，收录入该社编辑的

科普丛书——“牛顿科学馆”同时出版。

努力和尽力为广大青少年数学爱好者做一点数学普及工作，是我心中的一个挥之不去的愿望，谨以上述3本“漫谈”贡献给广大读者。

我把这3本小书都取名为“漫谈”，以区别于正统的数学教科书，希望这几本小书能体现科学性、趣味性和思想性的结合，努力实现“内容是科学的，题材是有趣的，叙述是通俗直观的，阐述的思想是深刻的”这一写作目标。

著名数学教育家波利亚曾指出，数学教育的目的是“教年轻人学会思考”。因此，讲解一道题时，分析如何想到这个解法，比给出这个解法更重要。遵循波利亚这一教导，在各本“漫谈”的叙述方式上，都力求尽可能说清楚“如何想到的”。始终不忘“训练思维”这一核心宗旨，这也可以说是上述3本“漫谈”的一个显著特点。总结起来就是从引起兴趣入手，通过训练思维，从而达到提高能力的目的。

王敬赓

2016年6月于北京师范大学

前言

被数学界誉为“迄今为止最好的一本数学史”——[美]M. 克莱因著《古今数学思想》把解析几何称为“坐标几何”，即用坐标的方法研究几何问题，这就指出了解析几何方法的实质，也说明了解析几何的重要性在于它的方法。

我把这本为中学生朋友撰写的课外读物取名为《解析几何方法漫谈》，是因为它的内容是关于解析几何方法的，而叙述的方式是漫谈式的。我为本书定的写作目标是力求做到“选题是有趣的，叙述是生动的，思想是深刻的”。

我多年从事解析几何教学和研究，对如何培养和提高学生的数学能力极为关注。数学是教人聪明的学问。按照美国著名数学教育家波利亚的说法，中学数学教育的目标是“教会年轻人思考”。基于这一认识，在这本小册子中，我的目的不在于介绍很多解析几何的知识，而是在于引导读者学习和思考解决数学问题的方法，因此始终把重点放在回答“这个解法是如何想到的？”这一问题上。几乎对每一个数学问题，我都不厌其烦地尽可能详尽地加以分析。

本书由互相独立的 4 个部分组成，每一部分叫作一章。每一章又包括几个问题，每个问题叫作一节，各节也是互相独立的。因此本书的每一章、每一节都可以单独阅读。

第 1 章给出 3 个能用解析几何方法解决的颇有趣味的问题：魔术师的地毯，藏宝地在哪里？用纸折椭圆、双曲线和抛物线。

第2章简要叙述哲学家笛卡儿是如何创立解析几何的；把解析几何方法与平面几何方法进行比较，以加深读者对解析几何方法的认识。本章最后介绍在历史上使很多人为之绞尽脑汁的古希腊三大作图问题(三等分任意角、二倍立方和化圆为方)，并用解析几何方法证明，只用直尺和圆规是不可能做出它们的。

第3章介绍解析几何的若干解题技巧，包括轮换、巧用定比分点、斜角坐标系的应用和复数方法等。本章最后一节介绍用解析几何方法解某些代数问题，它是传统意义上的解析几何方法(借助于坐标系，把几何问题变成代数问题来解)的反用，即借助于坐标系，把代数问题变成几何问题来解。可见解析几何是一个双刃工具，既可以解几何问题，也可以解某些代数问题。通过这个问题的讲解，可以开阔我们的解题思路。培养和提高解题能力是数学教学的中心任务，启发学生自己发现解法是解题教学中最困难也是最有趣的部分，我把它视为解题教学的最高境界，也是我写作本章乃至全书所追求的目标。

最后一章是通过类比和联想，对几个解析几何问题进行引申的例子，是讲如何从原有问题构造出新的问题的。这方面的内容一般书上很少讲，至于让同学们自己构造新题的机会就更少了。构造新题要发挥创造性，先猜后证，这种训练对数学能力的培养是大有好处的，也是充满乐趣的。

除了叙述历史的§2.1以外，其他每一节后都列有多少不等的习题，供读者练习之用。虽然书末附有参考解答，但建议读者不要轻易去看，只要把书中的内容弄清楚了，完成习题一般不会有很大困难。如果习题不会做，说明你对书上内容还没有真正弄清楚。这时最好的办法是先把书上的内容弄清楚。真正弄清楚的标志不是你能看懂书上的每一步推导，而是你合上书自己能把例题

解出来。能做到这一步，做习题就容易得多了。当你做完题后再去看书末提供的参考解答，也许你的解法比书上的解法还要好，也许不如书上的解法好，通过比较就会有收获。如果实在做不出，也可以看解答，不过看完以后，仍要合上书，自己独立去解，一次不行，可重复多次，直至自己能独立解出为止。如能再总结一下：解这道题的关键何在？自己为什么没能想出它，怎样才能想出它？我想这样做了一定能真正学到一点东西，这样的学习将更为有益也更有趣。

作为附录，我回顾了自己对解析几何的认识过程，总结一下写出来以期和读者朋友们交流。

本书可供中学生和广大数学爱好者阅读，也可供中学数学教师教学参考。

本书和作者的另两本《漫谈》(《橡皮几何学漫谈》和《几何变换漫谈》)，一起纳入北京师范大学出版社的《牛顿科学馆》科普丛书出版，作者对北京师范大学出版社表示衷心的感谢。

由于作者水平所限，书中的缺点、错误和不足之处，一定不少，诚恳地欢迎读者朋友们批评指正。

王敬赓

2016 年 4 月于北京师范大学

目 录

§ 1. 三则趣味题

§ 1.1 魔术师的地毯

一天，著名魔术大师秋先生拿了一块长和宽都是 1.3 m 的地毯去找地毯匠敬师傅，要求把这块正方形地毯改成宽 0.8 m、长 2.1 m 的矩形。敬师傅对秋先生说："你这位大名鼎鼎的魔术师，难道连小学算术都没有学过吗？边长 1.3 m 的正方形面积为 1.69 m^2，而宽 0.8 m、长 2.1 m 的矩形面积只有 1.68 m^2，两者并不相等啊！除非裁去 0.01 m^2，不然没法做。"秋先生拿出他事先画好的两张设计图，对敬师傅说："你先照这张图(如图 1.2)的尺寸把地毯裁成四块，然后照另一张图(如图 1.3)的样子把这四块拼在一起缝好就行了。魔术大师是从来不会错的，你放心做吧!"敬师傅照着做了，缝好一量，果真是宽 0.8 m、长 2.1 m。魔术师拿着改好的地毯满意地走了，而敬师傅还在纳闷儿：这是怎么回事呢？那 0.01 m^2 的地毯到什么地方去了？你能帮敬师傅解开这个谜吗？

图 1.1

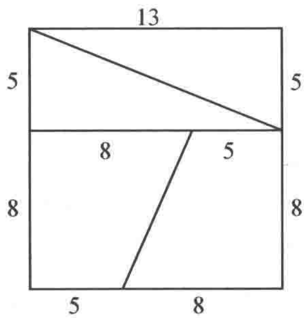

图 1.2

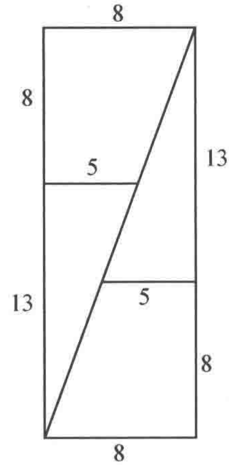

图 1.3

过了几个月，魔术师秋先生又拿来一块地毯，长和宽都是 1.2 m，只是上面烧了一个烧饼大小(约 0.01 m^2)的窟窿。秋先生要求敬师傅将地毯剪剪拼拼把窟窿去掉，但长和宽仍旧是 1.2 m。敬师傅很为难，觉得这位魔术大师的要求不合理，根本无法做到。秋先生又拿出了自己的设计图纸，要敬师傅按图 1.4 的尺寸将地毯剪开，再按图 1.5 的样子拼在一起缝好。敬师傅照着做了，结果真的得到了一块长和宽仍是 1.2 m 的地毯，而原来的窟窿却消失了。魔术师拿着补好的地毯得意扬扬地走了，而敬师傅还在想，补那窟窿的 0.01 m^2 的地毯是从哪里来的呢？你能帮敬师傅解开这个谜吗？

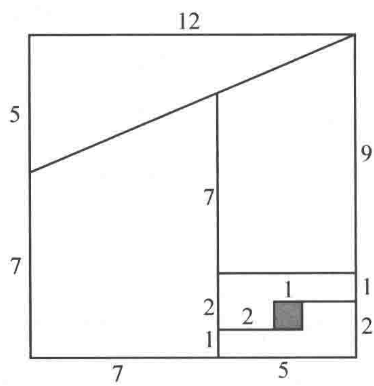

图 1.4

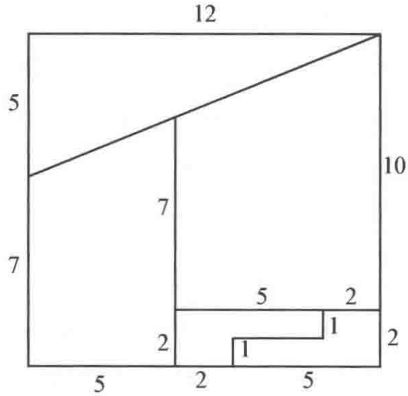

图 1.5

你准备如何着手去揭开魔术大师的秘密呢？通常的办法是根据他给的尺寸按某个比例（例如 10∶1）缩小，自己动手剪一剪、拼一拼，也就是做一个小模型，实际量一量，看看秘密藏在什么地方。这种做模型（或做实验）的方法，是科技工作者和工程技术人员通常采用的。这种方法要求操作和测量都非常精确，否则你就发现不了秘密。例如，按缩小后的尺寸，剪拼前后面积差应为 1 cm^2，如果在你操作和测量过程中所产生的误差就已经大于 1 cm^2 了，那么你怎能发现那 1 cm^2 的面积差出在什么地方呢？

数学工作者在研究和解决问题时，通常采用另一种方法——数学计算，即通过精细的数学计算来发现剪拼前后的面积差出在何处。

现在我们先来分析第一个魔术。

比较图 1.2 和图 1.3，将图 1.2 中的四块图形分别记为Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ（如图 1.6），而将图 1.3 中相应的四块分别记为Ⅰ′，Ⅱ′，Ⅲ′，Ⅳ′（如图 1.7）。现在的问题是，图 1.6 中的四块能否拼得像图 1.7 那样“严丝合缝”“不重不漏”？也就是说，图 1.7 中所标的各个尺寸是否全都准确无误？例如图 1.7 中的Ⅰ′为 Rt△EDB，如果 $DE=5$ 时，点 E

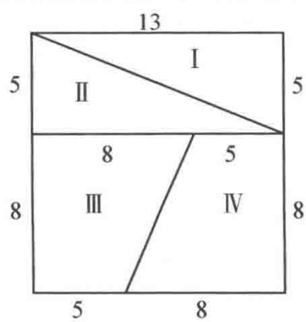

图 1.6

是否恰好落在矩形 $ABCO$ 的对角线 OB 上？同样，如果 $FG=5$ 时，点 G 是否恰好落在 OB 上？让我们通过计算来回答这个问题。

如图 1.8 建立平面直角坐标系，以 OC 所在直线为 x 轴，OA 所在直线为 y 轴，单位长度表示 0.1 m，于是有 $O(0,0)$，$A(0,21)$，$B(8,21)$，$C(8,0)$，$F(0,13)$，$G(5,13)$，$E(3,8)$，$D(8,8)$。如何判断 E 和 G 是否恰好落在直线 OB 上呢？一种办法是将 E，G 的坐标代入直线 OB 的方程，看是否满足方程；另一种办法是分别计算 OE，OB，OG 的斜率，比较它们是否相等。下面用后一种方法进行讨论。

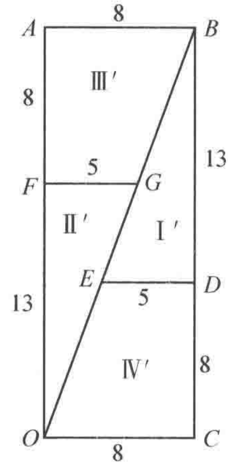

图 1.7

设线段 OE 的斜率为 k_{OE}，则有 $k_{OE}=\frac{8}{3}$，$k_{OB}=\frac{21}{8}$，$k_{OG}=\frac{13}{5}$。比较之，由 $\frac{8}{3}>\frac{21}{8}>\frac{13}{5}$ 得 $k_{OE}>k_{OB}>k_{OG}$，即 OE 的斜角大于 OB 的斜角，OB 的斜角又大于 OG 的斜角，可见 E 和 G 都不在对角线 OB 上，它们分别落在 OB 的两侧(如图 1.8)。又由

$$k_{EB}=\frac{21-8}{8-3}=\frac{13}{5},\ k_{GB}=\frac{21-13}{8-5}=\frac{8}{3}$$

得 $k_{EB}=k_{OG}$，$k_{GB}=k_{OE}$，即 $EB\parallel OG$，$GB\parallel OE$。可知将图 1.6 中的四块图形按照图 1.7 拼接时，在矩形对角线附近重叠了一个小▱$OGBE$(如图 1.8)。正是这一微小的重叠导致面积减少，减少的正是这

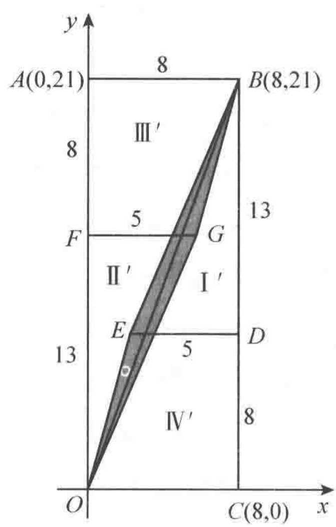

图 1.8

个重叠的▱$OGBE$的面积。记 $E(3,8)$到对角线 $OB\left(y=\frac{21}{8}x\right)$的距离为 d，

$$d=\frac{|21\times0.3+(-8)\times0.8|}{\sqrt{21^2+(-8)^2}}=\frac{0.1}{\sqrt{505}}\ (\mathrm{m}),$$

$$|OB|=\sqrt{(0.8)^2+(2.1)^2}=\sqrt{5.05}\ (\mathrm{m}),$$

$$S_{\square OGBE}=2S_{\triangle EOB}=2\times\frac{1}{2}\times|OB|\times d=0.01\ (\mathrm{m}^2)。$$

把面积仅为 $0.01\ \mathrm{m}^2$ 的地毯拉成对角线长为 $\sqrt{5.05}\ \mathrm{m}$(约 2.247 m)的极细长的平行四边形，在一个大矩形的对角线附近重叠了这么一点点，当然很难觉察出来。魔术大师正是利用了这一点蒙混过去，然而这一障眼法却怎么也逃不过精细的数学计算这一“火眼金睛”。

如果我们把上述分割正方形和构成矩形所涉及的四个数，从小到大排列起来，即

5，8，13，21，

这列数有什么规律呢？相邻两数之和，正好是紧跟着的第三个数。按照这个规律，5 前面应该是(8－5＝)3，3 前面应是(5－3＝)2，2 前面应是(3－2＝)1，1 前面应是(2－1＝)1，21 后面应为(13＋21＝)34，34 后面应为(21＋34＝)55，等等，于是得到数列

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，…

这个数列的特点是，它的任意相邻三项中前两项之和即为第三项。我们称这个数列为斐波那契①数列。魔术师的上述第一个地毯魔术中的四个数 5，8，13，21 只是斐波那契数列中的一段，从该数列

---

① 斐波那契(L. Fibonacci，约 1170—约 1250)，意大利数学家．

中任意取出其他相邻的四个数，还能玩上述魔术吗？为了使计算简单一些，我们取出数字更小的一段 3，5，8，13 来试一试。把边长为 8 的正方形按图 1.9 分成四块，再拼成边长为 5 和 13 的矩形(如图 1.10)。这时图形的面积由图 1.9 的 64 变成为图 1.10 的 65，凭空增加了 1 个单位面积。通过完全类似的计算，

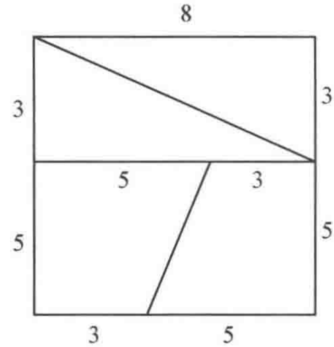

图 1.9

我们发现图 1.10 的尺寸是不合理的，实际上在矩形对角线附近，同样会出现一个小平行四边形。不过这次不是一个重叠的平行四边形，而是一个平行四边形空隙(如图 1.11)。这就是拼成的矩形比原来的正方形面积“增大”的秘密所在。

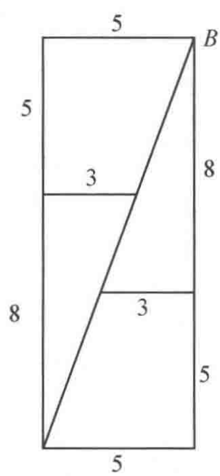

图 1.10

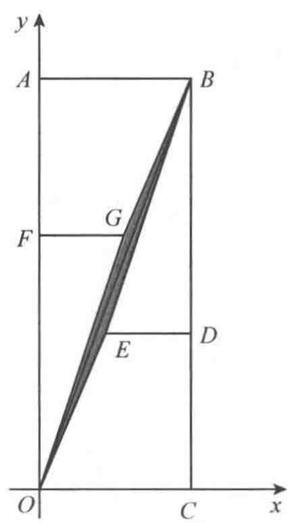

图 1.11

我们可以使用斐波那契数列的任何相邻四项，来玩上述分割重拼的魔术。我们发现，正方形比重拼成的矩形，时而少一个单

位面积，时而又多一个单位面积。这是因为重拼时，在矩形对角线附近，有时会重叠一个细长的平行四边形(因此失去一个单位面积)，有时又会出现一个细长的平行四边形空隙(因此多出一个单位面积)。面积何时变小，何时变大，有没有规律呢?

我们把斐波那契数列

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,\cdots$$

记为 $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, \cdots$

这里 $F_1=1$，$F_2=1$，$F_3=2$，$F_4=3$，$F_5=5$，…，且具有递推关系

$$F_n+F_{n+1}=F_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)。$$

考察以 F_n 为边长的正方形面积与以 F_{n-1} 及 F_{n+1} 为两边长的矩形面积之间的关系。随着 n 从小到大依次取 2，3，4，5，…，我们得到

当 $n=2$ 时有 $1^2=1\times2-1$，即 $F_2^2=F_1\cdot F_3-1$；

当 $n=3$ 时有 $2^2=1\times3+1$，即 $F_3^2=F_2\cdot F_4+1$；

当 $n=4$ 时有 $3^2=2\times5-1$，即 $F_4^2=F_3\cdot F_5-1$；

当 $n=5$ 时有 $5^2=3\times8+1$，即 $F_5^2=F_4\cdot F_6+1$；

……

从中我们发现，随着 n 的奇偶变化，在上述关系式中，加 1 和减 1 交替出现。对于数列的第 n 项 F_n，当 n 是大于 1 的奇数时有 $F_n^2=F_{n-1}\cdot F_{n+1}+1$，此时正方形的面积比矩形的大 1；当 n 是偶数时有$F_n^2=F_{n-1}\cdot F_{n+1}-1$，此时正方形的面积比矩形的小 1。写成统一的表示式就是