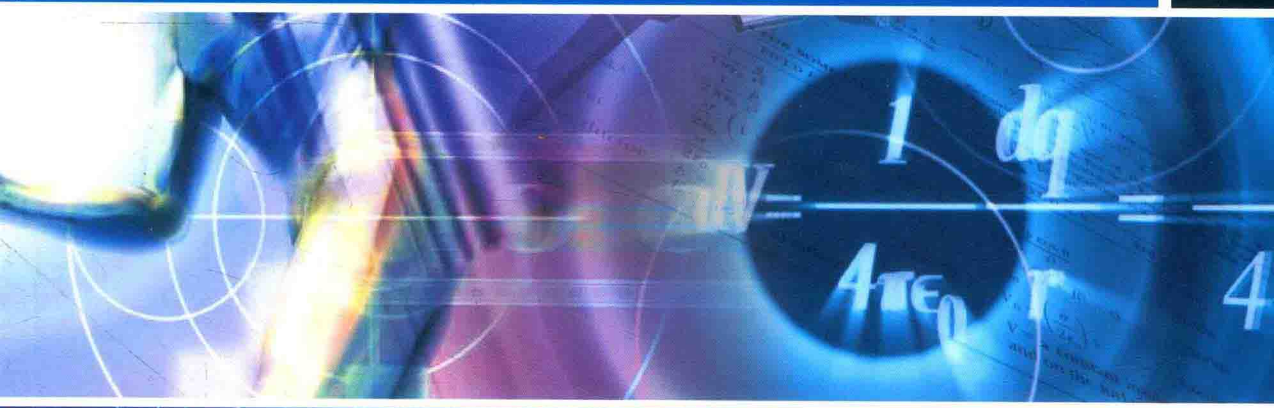
工程数学

复变函数与积分变换

程银琴◎主编



西北工业大学出版社

GONGCHENG SHUXUE: FUBIAN HANSHU YU JIFEN BIANHUAN

工程数学——复变函数与积分变换

程银琴　主编

西北工業大學出版社

【内容简介】 本书分为6章,主要包括复数与复变函数、复变函数的积分、幂级数展开、留数定理、傅里叶(Fourier)变换和拉普拉斯(Laplace)变换等内容.

本书可作为高等院校理工科相关学科,尤其是电类各专业工程数学——复变函数与积分变换课程的教材,也可供相关专业人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

工程数学:复变函数与积分变换/程银琴主编.—西安:西北工业大学出版社,2017.3
ISBN 978-7-5612-4941-3

Ⅰ.①工… Ⅱ.①程… Ⅲ.①工程数学—高等学校—教材②复变函数—高等学校—教材③积分变换—高等学校—教材 Ⅳ.①TB11②O174.5③O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第019648号

策划编辑:华一瑾
责任编辑:华一瑾

出版发行:西北工业大学出版社
通信地址:西安市友谊西路127号 邮编:710072
电 话:(029)88493844 88491757
网 址:http://www.nwpup.com
印 刷 者:陕西天意印务有限公司
开 本:787 mm×1 092 mm 1/16
印 张:14.75
字 数:357千字
版 次:2017年3月第1版 2017年3月第1次印刷
定 价:39.00元

前　言

工程数学——复变函数与积分变换是工科相关学科尤其是电类各专业的必修课，本书包括6章：第1章复数与复变函数，第2章复变函数的积分，第3章幂级数展开，第4章留数定理，第5章傅里叶(Fourier)变换，第6章拉普拉斯(Laplace)变换.

本书内容突出了以下几点.

(1)尽量避开抽象深奥的数学推导，侧重应用和培养学生解决实际问题的能力，紧密结合专业知识，致力于为专业课的学习做铺垫、打基础.

(2)针对民族院校本科生数学基础参差不齐、相对薄弱这一现状，本书对相关内容的难易深浅进行了相应调整与增减.比如对复数及其运算进行了加强巩固，多增加了例题数量.

(3)为了加深相关知识点的理解巩固，特别在每章设置了典型题解.

(4)为了便于对章节知识进行梳理、归纳、总结，特在每章末设置了本章小结.

(5)书中例题的选取与专业实际相结合.

为了适应不同专业和不同教学学时数的要求，对一些可选的内容加上标记 *.

编写本书曾参阅了相关文献资料，在此，谨对其作者深表谢忱.

由于水平所限，书中错误或不妥之处，恳望各位同行和读者批评指正.

编　者

2016年8月

目　　录

第 1 章　复数与复变函数

复变函数是自变量为复数的函数，它是本课程的研究对象. 由于在中学阶段已经学过复数的概念和基本运算，本章将在原有的基础上作简要的复习和补充；然后介绍复平面上的区域、复变函数和常用的初等函数，以及复变函数的导数和求导法则；并对解析函数的概念、判别方法及性质与解析函数在研究平面场问题中的应用等作了详细阐述.

解析函数是复变函数研究的主要对象，它在理论和实际问题中有着广泛的应用.

1.1　复数与复数运算

1.1.1　复数的基本概念

在学习初等代数时，我们已经知道在实数范围内，方程

$$x^2=-1$$

是无解的，因为没有一个实数的平方等于-1. 由于解方程的需要，人们引进一个新数 i，称为**虚数单位**，并规定

$$\mathrm{i}^2=-1$$

从而 i 是方程 $x^2=-1$ 的一个根.

一个复数 z 可以表为某个实数 x 与某个纯虚数 $\mathrm{i}y$ 的和，即

$$z=x+\mathrm{i}y \tag{1.1.1}$$

这称为复数的**代数式**，x 和 y 分别为该复数的**实部**和**虚部**，并分别记作 $\mathrm{Re}(z)$ 和 $\mathrm{Im}(z)$.

两个复数**相等**，必须且只需它们的实部和虚部分别相等. 与实数不同，一般说来，任意两个复数不能比较大小.

如果将 x 和 y 当作平面上点的坐标（见图 1-1），复数 z 就跟平面上的点一一对应起来. 这个平面称为**复数平面**，两个坐标轴分别称为**实轴**和**虚轴**.

如果将 x 和 y 当作矢量的直角坐标分量（见图 1-1），复数 z 还可以用复数平面上的矢量来表示.

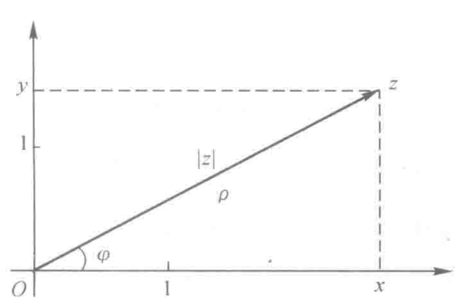


图　1-1

改用极坐标 ρ 和 φ(见图 1-1) 代替直角坐标系 x 和 y,有

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2}\\ \varphi=\arctan(y/x)\end{cases}\qquad \begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\end{cases} \tag{1.1.2}$$

则复数 z 可表示为**三角式**,即

$$z=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi) \tag{1.1.3}$$

由欧拉(Euler) 公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$ 可得复数 z 的**指数式**为

$$z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \tag{1.1.4}$$

ρ 称为该复数的**模**,记作 $|z|$. φ 称为该复数的**辐角**,记作 $\mathrm{Arg}z$.

一个复数的辐角值不能唯一地确定,可以取无穷多个值,并且彼此相差 2π 的整数倍. 通常约定,以 $\arg z$ 表示其中满足条件:

$$-\pi<\mathrm{Arg}z\leqslant\pi$$

的一个特征值,并称 $\arg z$ 为 $\mathrm{Arg}z$ 的**主值**,或 z 的**主辐角**. 于是有

$$\varphi=\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

辐角的主值 $\arg z(z\neq0)$ 可以由反正切 $\mathrm{Arctan}\,\dfrac{y}{x}$ 的主值 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 按下列关系来确定:

$$\underset{(z\neq0)}{\arg z}=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0,y\gtrless0\\ \pm\dfrac{\pi}{2}, & x=0,y\gtrless0\\ \arctan\dfrac{y}{x}\pm\pi, & x<0,y\gtrless0\\ \pi, & x<0,y=0\end{cases} \tag{1.1.5}$$

其中 $-\dfrac{\pi}{2}<\arctan\dfrac{y}{x}<\dfrac{\pi}{2}$.

复数"**零**"(即实部 x 及虚部 y 都等于零的复数) 的辐角没有明确意义.

实部相同,虚部互为相反数的两个复数称为**共轭复数**,复数 z 的共轭复数 z^* 或 $\bar{z}$ 指的是对应的点对实轴的反映,即

$$\bar{z}=z^*=x-\mathrm{i}y=\rho(\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi)=\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \tag{1.1.6}$$

共轭复数有以下性质:

i) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$, $\quad\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$, $\quad\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;

ii) $\bar{\bar{z}}=z$;

iii) $z\bar{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$;

iv) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)$, $\quad z-\bar{z}=2i\mathrm{Im}(z)$. 这些性质作为练习,由读者自己去证明.

1.1.2 无限远点

上述我们将模为有限的复数跟复数平面上的有限远点一一对应起来,在复变函数论中,通常还将模为无限大的复数也跟复数平面上的一点相对应,并且称这一点为无限远点. 关于无限远点,可以如下理解. 把一个球放在复数平面上,球以南极 S 跟复数平面相切于原点,如图 1-2

所示. 在复数平面上任取一点 A，它与球的北极 N 的连线跟球面相交于 A'. 这样，复数平面上的有限远点跟球面上 N 以外的点一一对应了起来. 这种对应关系称为**测地投影**，这个球称为**复数球**，设想 A 点沿着一根通过原点的直线向无限远移动，对应的点 A' 就沿着一根子午线(经线)向北极 N 逼近. 如果 A 沿着另一根过原点的直线向无限远移动，则 A' 沿着另一根子午线向北极 N 逼近. 事实上，不管 A 沿着什么样的曲线向无限远移动，A' 总是相应地沿着某曲线逼近于 N. 因此，可以将平面上的无限远看作一点，通过测地投影而跟复数球上北极 N 相对应. 我们将无限远点记作 ∞，它的模为无限大，它的辐角没有明确意义.

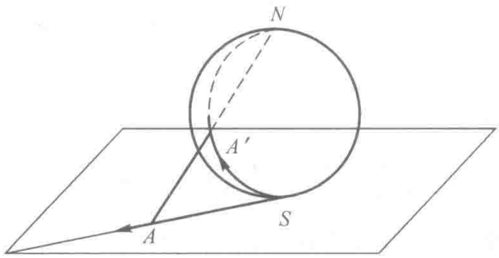


图　1-2

1.1.3　复数的运算

复数的基本运算规则:

加法:复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 与 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 的和 $z_1 + z_2$ 的定义为

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2) \tag{1.1.7}$$

由此可见加法的交换律和结合律成立. 从对应的矢量来看，两个复数的和对应于两个矢量的矢量和，如图 1-3(a) 所示. 从而可以知道

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \tag{1.1.8}$$

减法:复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 与 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 的差 $z_1 - z_2$ 被定义为 z_1 与 $-z_2 = -x_2 - \mathrm{i}y_2$ 的和，即

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + \mathrm{i}(y_1 - y_2) \tag{1.1.9}$$

从而可以知道(见图 1-3(b))

$$|z_1 - z_2| \geqslant |z_1| - |z_2| \tag{1.1.10}$$

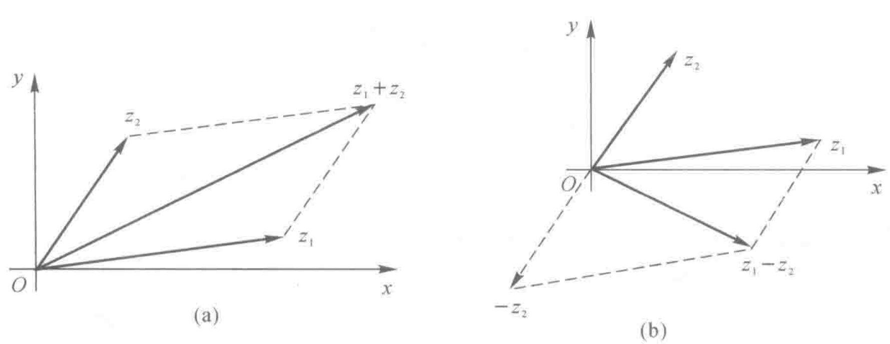


图　1-3

乘法:复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 与 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 的积 $z_1 z_2$ 的定义为

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{1.1.11}$$

从这个定义出发,很容易验证,乘法的**交换律**、**结合律**与**分配律**都成立. 这样,定义(1.1.11) 可以理解为

$$z_1 z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = x_1 x_2 + \mathrm{i}y_1 x_2 + \mathrm{i}x_1 y_2 + \mathrm{i}^2 y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

除法:复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 与 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 的商 z_1/z_2 的定义为

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \tag{1.1.12}$$

从这个定义出发,很容易验证,除法确是乘法的逆运算.

定义(1.1.12) 可以理解为

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{(x_2 + \mathrm{i}y_2)(x_2 - \mathrm{i}y_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

复数的乘、除、乘方和开方等运算,采用三角式或指数式往往比代数式方便. 例如,乘积的定义(1.1.11) 就化为

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \tag{1.1.13}$$

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1 + \varphi_2)} \tag{1.1.14}$$

两个复数乘积的模等于它们的模的乘积;两个复数乘积的辐角等于它们的辐角的和.

因此,当利用向量来表示复数时,可以说表示乘积 $z_1 z_2$ 的向量是从表示 z_1 的向量旋转一个角度 $\mathrm{Arg}z_2$,并伸长(缩短到) $|z_2|$ 倍得到的,如图 1-4 所示. 特别,当 $|z_2| = 1$ 时,乘法变成了只是旋转. 例如 $\mathrm{i}z$ 相当于将 z 逆时针旋转 $90°$,$-z$ 相当于将 z 逆时针旋转 $180°$. 又当 $\arg z_2 = 0$ 时,乘法就变成了仅仅是伸长(缩短).

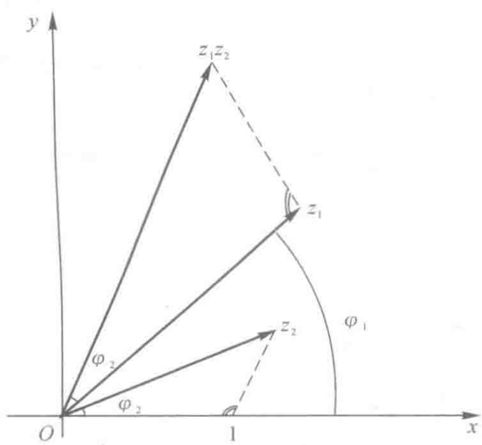


图 1-4

商的定义(1.1.12) 就化为

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] = \frac{\rho_1}{\rho_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1 - \varphi_2)} \tag{1.1.15}$$

两个复数的商的模等于它们的模的商;两个复数的商的辐角等于被除数与除数的辐角之差.

这样，z 的整数 n 次幂 z^n 应为

$$z^n=\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)=\rho^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} \tag{1.1.16}$$

而 z 的整数 n 次根式 $\sqrt[n]{z}$ 则应为

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{n}\right)=\sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{n}} \tag{1.1.17}$$

我们知道，复数 z 的辐角 φ 不能唯一地确定，它可以加减 2π 的整倍数. 这样，根式 $\sqrt[n]{z}$ 的辐角 φ/n 也就可以加减 $2\pi/n$ 的整倍数，从而对于给定的 z，$\sqrt[n]{z}$ 可以取 n 个不同的值.

注意区分 $|z|^2$ 与 z^2. $|z|^2$ 是复数 z 的模 ρ 的平方，由式(1.1.13)和式(1.1.14)可知 $zz^*=|z|^2$；z^2 则是复数 z 的自乘，即 $zz=z^2$.

例 1　将下列复数化为三角表示式与指数表示式.

(1) $z=-\sqrt{12}-2\mathrm{i}$；　　(2) $z=\sin\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{5}$.

解　(1) 显然，$\rho=|z|=\sqrt{12+4}=4$. 由于 z 在第三象限，由式(1.1.5)知

$$\theta=\arctan\left(\frac{-2}{-\sqrt{12}}\right)-\pi=\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}-\pi=-\frac{5}{6}\pi$$

因此，z 的三角表示式为

$$z=4\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right]$$

z 的指数表示式为

$$z=4\mathrm{e}^{-\frac{5}{6}\pi\mathrm{i}}$$

(2) 显然，$\rho=|z|=1$，又

$$\sin\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{3}{10}\pi$$

$$\cos\frac{\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{3}{10}\pi$$

故 z 的三角表示式为

$$z=\cos\frac{3}{10}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{3}{10}\pi$$

z 的指数表示式为

$$z=\mathrm{e}^{\frac{3}{10}\pi\mathrm{i}}$$

例 2　设 z_1,z_2 为两个任意复数，证明：

(1) $|z_1\overline{z_2}|=|z_1||z_2|$；　　(2) $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$

证　(1) $|z_1\overline{z_2}|=\sqrt{(z_1\overline{z_2})(\overline{z_1\overline{z_2}})}=\sqrt{(z_1\overline{z_2})(\overline{z_1}z_2)}=\sqrt{(z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2})}=|z_1||z_2|$

(2) 上面我们已经用几何的方法得到了三角不等式(1.1.8)，现在用复数的运算来证明它. 因为

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}=$$
$$|z_1|^2+|z_2|^2+z_2\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}$$

又因为

$$z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}=2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$$

所以

$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})\leqslant|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1\overline{z_2}|=$$
$$|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_1|=(|z_1|+|z_2|)^2$$

两边开方,就得到所要证明的三角不等式.

例 3 设 $z_1=5-5\mathrm{i}, z_2=-3+4\mathrm{i}$,求$\dfrac{z_1}{z_2}$与$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解 $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{5-5\mathrm{i}}{-3+4\mathrm{i}}=\dfrac{(5-5\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})}{(-3+4\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})}=\dfrac{(-15-20)+(15-20)\mathrm{i}}{25}=-\dfrac{7}{5}-\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$

故得
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=-\frac{7}{5}+\frac{1}{5}\mathrm{i}$$

例 4 设 $z=-\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$,求 $\mathrm{Re}(z)$,$\mathrm{Im}(z)$ 与 $z\bar{z}$.

解 $z=-\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}(-\mathrm{i})}-\dfrac{3\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\mathrm{i}-\left(-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i$

故得
$$\mathrm{Re}(z)=\frac{3}{2},\quad \mathrm{Im}(z)=-\frac{1}{2}$$
$$z\bar{z}=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$$

例 5 设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1, z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 为两个任意复数,证明 $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$.

证 $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)+(x_1-\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=$
$(x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1-x_1y_2)+(x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2-x_2y_1)=$
$2(x_1x_2+y_1y_2)=2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$

或
$$z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}=2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$$

例 6 已知正三角形的两个顶点为 $z_1=1$ 与 $z_2=2+\mathrm{i}$,求它的另一个顶点.

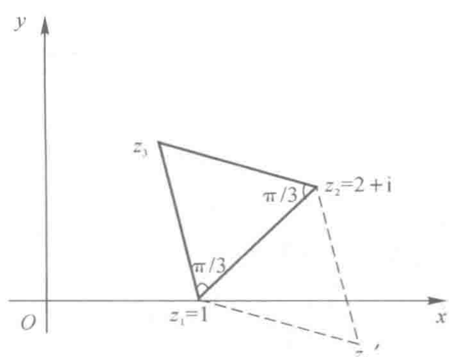


图 1-5

解 如图 1-5 所示,将表示 z_2-z_1 的矢量绕 z_1 旋转$\dfrac{\pi}{3}$(或$-\dfrac{\pi}{3}$)就得到另一个矢量,它的终点即为所求的顶点 z_3(或 z'_3). 由于复数 $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$ 的模为 1,转角为$\dfrac{\pi}{3}$,根据复数的乘法,有

$$z_3 - z_1 = e^{\frac{\pi}{3}i}(z_2 - z_1) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+i) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$$

可得

$$z_3 = \frac{3-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$

类似可得

$$z'_3 = \frac{3+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$$

例 7　求$\sqrt[4]{1+i}$.

解　因为

$$1+i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right]$$

所以

$$\sqrt[4]{1+i} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right),\quad (k = 0,1,2,3)$$

即

$$w_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right)$$

$$w_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9}{16}\pi + i\sin\frac{9}{16}\pi\right)$$

$$w_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17}{16}\pi + i\sin\frac{17}{16}\pi\right)$$

$$w_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25}{16}\pi + i\sin\frac{25}{16}\pi\right)$$

这 4 个根是内接于中心在原点半径为$\sqrt[8]{2}$ 的圆的正方形的 4 个顶点(见图 1－6),并且

$$w_1 = iw_0,\quad w_2 = -w_0,\quad w_3 = -iw_0$$

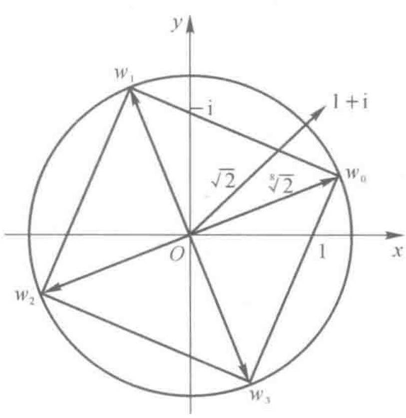


图　1－6

下面的例子表明,很多平面图形能用复数形式的方程(或不等式)来表示;也可以由给定的复数形式的方程(或不等式)来确定它所表示的平面图形.

例 8　将通过两点 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$ 的直线用复数形式的方程来表示.

解　我们知道,通过点(x_1, y_1)与(x_2, y_2)的直线可以用参数方程表示为

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

因此，该直线的复数形式的参数方程为

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad (-\infty < t < +\infty)$$

由此得知 z_1 到 z_2 的直线段的参数方程可以写成

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

取 $t = \dfrac{1}{2}$，得线段 $\overline{z_1 z_2}$ 的中点为

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

例 9 求下列方程所表示的曲线.

(1) $|z + \mathrm{i}| = 2$；

(2) $|z - 2\mathrm{i}| = |z + 2|$；

(3) $\mathrm{Im}(\mathrm{i} + \bar{z}) = 4$.

解 (1) 在几何上不难看出，方程 $|z + \mathrm{i}| = 2$ 表示所有与点 $-\mathrm{i}$ 距离为 2 的点的轨迹，即中心为 $-\mathrm{i}$、半径为 2 的圆(见图 1-7(a)). 现在用代数方法求出该圆的直角坐标方程.

设 $z = x + \mathrm{i}y$，则方程变为

$$|x + (y+1)\mathrm{i}| = 2$$

也就是

$$\sqrt{x^2 + (y+1)^2} = 2$$

或

$$x^2 + (y+1)^2 = 4$$

(2) 几何上，该方程表示到点 $2i$ 和 -2 距离相等的点的轨迹，所以方程表示的曲线就是连接点 $2i$ 和 -2 的线段的垂直平分线(见图 1-7(b))，它的方程为 $y = -x$. 这方程可以用代数的方法求得. 由读者自己完成.

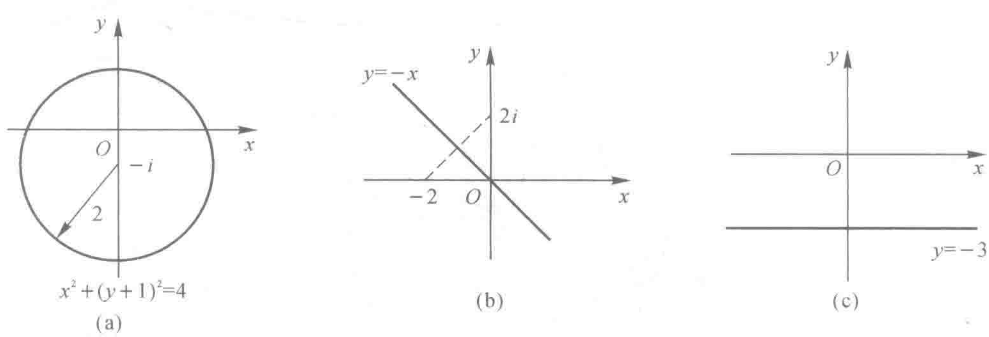


图 1-7

(3) 设 $z = x + \mathrm{i}y$，则

$$\mathrm{i} + \bar{z} = x + (1 - y)\mathrm{i}$$

可得

$$\mathrm{Im}(\mathrm{i} + \bar{z}) = 1 - y$$

从而所求曲线的方程为 $y = -3$，这是一条平行于 x 轴的直线，如图 1-7(c) 所示.

既然复数可以用实部和虚部表示，复数的研究往往就归结为一对实数(即该复数的实部和虚部)的研究.

例如,复变数 $z=x+\mathrm{i}y$ 逼近复常数 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$,即 $z\to z_0$ 的问题,完全可以归结为一对实变数 x 和 y 分别逼近实常数 x_0 和 y_0,即

$$x\to x_0,\quad y\to y_0$$

的问题.这样,关于实变数的和、差、积、商的极限的定理,关于实变数的极限是否存在的判据,显然全都适用于复变数.

1.2　复变函数

1.2.1　复变函数的定义

若在复数平面(或球面)上存在一个点集 G(复数的集合),对于 G 的每一个点(每一个 z 值),按照一定的规律,有一个或多个复数值 w 与之相对应,则称 w 为 z 的函数——**复变函数**. z 称为 w 的**宗量**(自变量),定义域为 G,记作

$$w=f(z),\quad z\in \mathbf{G}$$

由于给定了一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 就相当于给定了两个实数 x 和 y,而复数 $w=u+\mathrm{i}v$ 亦同样地对应着一对实数 u 和 v,所以复变函数 w 和自变量 z 之间的关系 $w=f(z)$ 相当于两个关系式:

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y)$$

它们确定了自变量为 x 和 y 的两个二元实变函数.

例如,考察函数 $w=z^2$.令 $z=x+\mathrm{i}y$,$w=u+\mathrm{i}v$,则有

$$u+\mathrm{i}v=(x+\mathrm{i}y)^2=x^2-y^2+2xy\mathrm{i}$$

因而函数 $w=z^2$ 对应于两个二元实变函数为

$$u=x^2-y^2,\quad v=2xy$$

1.2.2　映射的概念

在高等数学中,我们常把实变函数用几何图形来表示,这些几何图形,可以直观地帮助我们理解和研究函数的性质.对于复变函数,由于它反映了两对变量 u,v 和 x,y 之间的对应关系,因而无法用同一个平面内的几何图形表示出来,必须把它看成两个复平面上的点集之间的对应关系.

如果用 z 平面上的点表示自变量 z 的值,而用另一个平面——w 平面——上的点表示函数 w 的值,那么函数 $w=f(z)$ 在几何上就可以看做是把 z 平面上的一个点集 G(定义集合)变到 w 平面上的一个点集 $\mathbf{G}^*$(函数值集合)的**映射**(或**变换**).这个映射通常称为**由函数 $w=f(z)$ 所构成的映射**.

例如,函数 $w=\bar{z}$ 所构成的映射,显然把 z 平面上的点 $z=x+\mathrm{i}y$ 映射成 w 平面上的点 $w=x-\mathrm{i}y$;$z_1=2+3\mathrm{i}$ 映射成 $w_1=2-3\mathrm{i}$;$z_2=1-2\mathrm{i}$ 映射成 $w_2=1+2\mathrm{i}$,$\triangle ABC$ 映成 $\triangle A'B'C'$,等等(见图 1-8(a)).

如果把 z 平面和 w 平面重叠在一起,不难看出,函数 $w=\bar{z}$ 是关于实轴的一个**对称映射**.因此,一般地,通过映射 $w=\bar{z}$,z 平面上任一图形的映射是关于实轴对称的一个全同图形(见图1-8(b)).

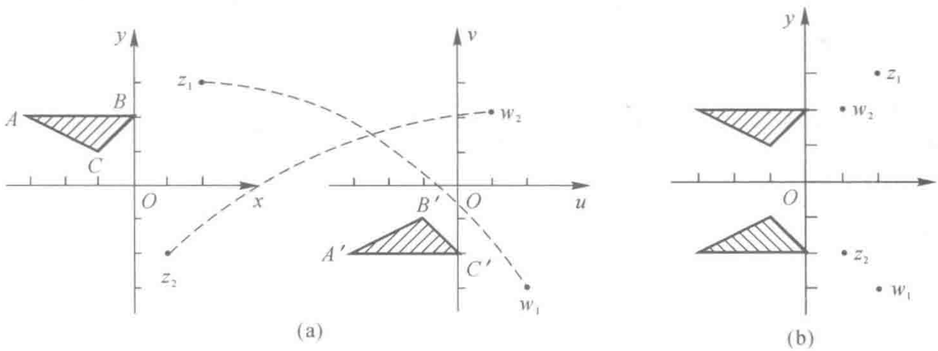


图 1-8

再来研究函数 $w=z^2$ 所构成的映射. 不难算得,通过函数 $w=z^2$,点 $z_1=i, z_2=1+2i$ 和 $z_3=-1$ 分别映射到点 $w_1=-1, w_2=-3+4i$ 和 $w_3=1$(见图 1-9).

根据复数乘方的模与辐角的原理(1.1.16)可知,通过映射 $w=z^2$,z 的辐角增大一倍. 因此,z 平面上与正实轴交角为 α 的角形域映射成 w 平面上与正实轴交角为 2α 的角形域,如图 1-9 中阴影部分所示.

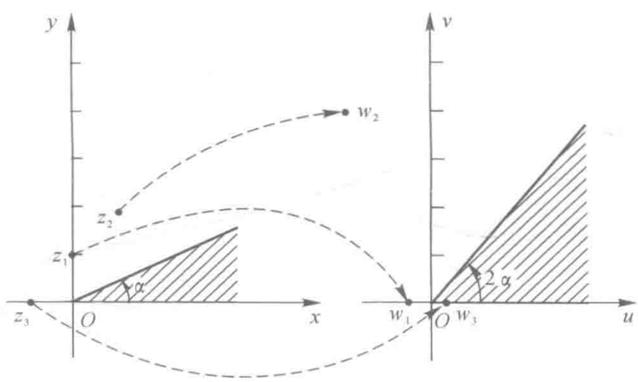


图 1-9

由于函数 $w=z^2$ 对应于两个二元实变函数:

$$u=x^2-y^2, \quad v=2xy \tag{1.2.1}$$

因此,它把 z 平面上的两族分别以直线 $y\pm x$ 和坐标轴为渐近线的等轴双曲线:

$$x^2-y^2=c_1, \quad 2xy=c_2$$

分别映射成 w 平面上的两族平行直线:

$$u=c_1, \quad v=c_2$$

如图 1-10 所示,图 1-10(a) 中两块阴影部分映射成图 1-10(b) 中的同一个长方形.

下面再根据式(1.2.1)可以确定函数 $w=z^2$ 将直线簇 $x=\lambda$(常数)映射为抛物线簇:

$$v^2=4\lambda^2(\lambda^2-\mu)$$

它的图形是以原点为焦点、向左张开的抛物线(见图 1-11 中的虚线).

同样,将直线簇 $y=\mu$(常数)映射为抛物线簇,有

$$v^2=4\mu^2(\mu^2+u)$$

它的图形是以原点为焦点、向右张开的抛物线(见图 1－11 中的实线).

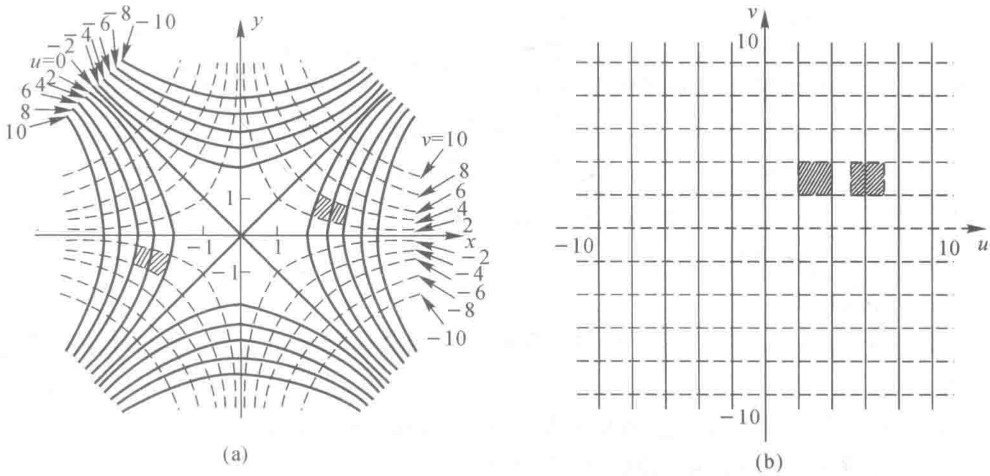


图　1－10

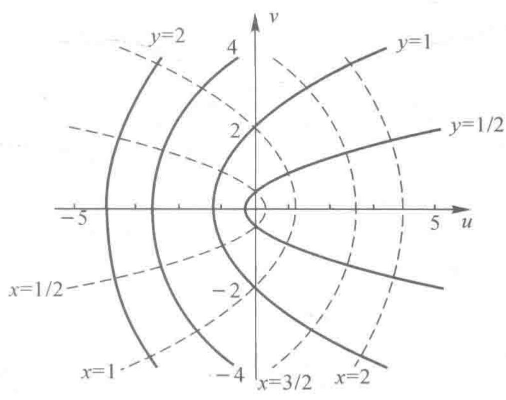


图　1－11

跟实变函数一样,复变函数也有反函数的概念. 从反函数的定义可知,对于任意的 $w \in$ $\mathbf{G}^*$,有

$$w = f[\varphi(w)]$$

当反函数为单值函数时,也有

$$z = \varphi[f(z)], \quad z \in \mathbf{G}$$

今后,我们不再区分函数与映射(变换). 如果函数(映射)$w = f(z)$ 与它的反函数(逆映射)$z = \varphi(w)$ 都是单值的,那么称函数(映射)$w = f(z)$ 是一一对应的. 此时,我们也称集合 $\mathbf{G}$ 与集合 $\mathbf{G}^*$ 是一一对应的.

1.2.3　区域的概念

在复变函数论中,函数的定义域不是一般的点集,而是满足一定条件的点集,称为**区域**,用 B 表示.

为了说明区域的概念,首先介绍**邻域**、**内点**、**外点**以及**边界点**的概念.