船体振动学

CHUANTI ZHENDONGXUE

金咸定　赵德有　编著

上海交通大学出版社

上海交通大学“九五”重点教材

船体振动学

金咸定 赵德有 编 著

上 海 交 通 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书内容分为两大部分。前面三章介绍了弹性系统振动的基本理论和常用的分析方法，讨论了单自由度系统、多自由度系统和分布参数的弹性系统的线性微幅振动，并介绍了振动理论的若干应用——测振、隔振和消振，对振动分析的有限元法也进行了概要的阐述；后面四章介绍了船体总振动和局部振动的特点和分析方法，阐述了引起船舶振动的原因以及船舶的防振、测振和减振的途径和方法以及若干实例。

本书可作为高等院校船舶设计制造专业的教材和教学参考书，也可供从事船舶设计、建造和使用的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

船体振动学/金咸定，赵德有编著. —上海：上海交通大学出版社，2000

ISBN 7-313-02262-X

Ⅰ.船… Ⅱ.①金… ②赵… Ⅲ.船舶振动-振动理论 Ⅳ.TB661.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 02541 号

船体振动学

金咸定 赵德有 编著

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030)

电话：64071208 出版人：张天蔚

立信会计常熟市印刷联营厂印刷 全国新华书店经销

开本：787mm×1092mm 1/16 印张：13.75 字数：235 千字

2000 年 1 月第 1 版 2000 年 2 月第 1 次印刷

印数：1～500

ISBN 7－313－02262－X/TB・047 定价：18.50 元

出 版 说 明

根据国务院发(1978)23号文件批转试行的《关于高等学校教材编审出版若干问题的暂行规定》,中国船舶工业总公司负责全国高等学校船舶类专业规划教材编审、出版的组织工作。

为做好教材编审组织工作,中国船舶工业总工司相应地成立了“船舶工程”、“船舶动力”两个教材委员会和“船电自动化”、“惯性导航及仪器”、“水声电子工程”、“液压”、“水中兵器”五个教材小组,聘请了有关院校的教授、专家50余人参加工作。船舶类专业教材委员会(小组)是有关船舶类专业教材建设研究、指导、规划和评审方面的专家组织,主要任务是协助船舶总公司做好高等学校船舶类专业教材的编审工作,为教材质量审查把关。

经过前四轮教材建设,共出版教材300余种,建立了较完善的规章制度,扩大了出版渠道,在教材的编审依据、计划体制、出版体制等方面实行了有成效的改革,这些为“九五”期间船舶类专业教材建设奠定了良好基础。根据国家教委对“九五”期间高校教材建设要“抓好重点教材,全面提高质量,继续增加品种,整体优化配套,深化管理体制和运行机制的改革,加强组织领导”的要求,船舶总公司于1996年又制定了“全国高等学校船舶类专业教材(九五)选题规划”。列入规划的选题共133种,其中部委级重点选题49种,一般选题84种。

“九五”教材规划是在我国发展社会主义市场经济条件下第一个教材规划,为适应社会主义市场经济外部环境,“九五”船舶类专业教材建设实行指导性计划体制,即在指导性教材计划指导下,教材编审出版由主编学校负责组织实施,教材委员会(小组)进行质量审查,教材编审室组织协调。

“九五”期间要突出抓好重点教材,全面提高教材质量,为此教材建设引入竞争机制,通过教材委员会(小组)评审,择优确定主编,实行主编负责制。教材质量审查实行主审、复审制,聘请主编学校以外的专家审稿,最后教材委员会(小组)复审,复审合格后由有关教材委员会(小组)发出版推荐证书,出版社方可出版。全国高校船舶类专业规划教材,就是通过严密的编审程序和高标准、严要求的审稿工作来保证教材质量的。

为完成“九五”教材规划,主编学校应充分发挥主导作用。规划教材的立项是由学校申报,立项后由主编学校组织实施,教材出版后由学校组织选用,学校是教材编写与教材选用的行为主体,教材计划的执行主要取决于主编学校工作情况。希望有关高校切实负起责任,各有关方面积极配合,为完成“九五”船舶类专业教材规划、为编写出版更多的精品教材而努力。

由于水平和经验局限,教材的编审出版工作和教材本身还会有很多缺点和不足,希望各有关高校、同行专家和广大读者提出宝贵意见,以便改进提高。

中国船舶工业总公司教材编审室

1997年4月

前　言

本书是在1987年上海交通大学出版社出版的《船体振动学》(金咸定主编)一书的基础上根据上海交通大学“九五”重点教材选编计划以及中国船舶工业总公司“九五”教材选编计划的要求,经过评审立项而改编的。

正如1987年版前言所述:“近若干年来,船舶(包括各种军用舰船)振动问题已日益引起造船部门的关注和国内外众多学者和专家的兴趣,因而在理论和实验的研究方面有了迅速的发展。鉴于船舶振动的复杂性,对它的研究正更多地向多学科的交叉、多因素的综合和纵深发展,并更多地向预防和控制的要求发展,这就要求造船科技人员掌握更全面、更现代化的知识和手段。在当今信息时代,如何在有限的学时和篇幅里恰当地阐述基本理论和方法,而又能对日新月异的新技术和新思想予以必要的和适度的反映是编者企图尝试解决的问题。”

从上一版到本版的出版,十多年已经过去,但上述的思考与目标仍然是本版的追求。在过去的十多年里,科学技术迅猛发展,振动的理论和实验方法也有很大的发展,尤其是电子计算机的突飞猛进以及结构系统振动分析软件的相应发展和前后处理系统的飞跃,时至今日,可以说,任何一类复杂的工程结构物都无一例外(包括船舶)地可以通过电子计算机以及大型有限元结构分析软件来预报其振动响应和特性,过去难以进行的整船船体结构振动的有限元分析,今天已经可以在许多个人电脑上实现。

本书的目的之一,是向跨入21世纪的船舰工程和科学技术人员介绍和阐明必需的基本的弹性系统振动的理论和方法,将这种基本知识与电脑运用和有限元软件应用技能相结合,以便适应近代船舰振动问题的发展需要。

任何一种学科总具有自身的鲜明特点与个性要求。《船体振动学》是一门处理和解决船体结构振动特性、船体激励源以及船体振动响应的科学技术。除了船体结构本身的特殊性外,还必须考虑到船上设备、货物的作用与影响;船体内部液体与外部水域的影响;船上主机、轴系和螺旋桨等推进装置与船体的作用以及对船体的激励力;此外,还有波浪对船体的周期的和瞬时的作用力,等等。毋庸置疑,上述各方面是本教程必须涉及的领域。要包罗无遗地详细介绍以上各方面的内容,显然已超出了本教材的范围。但是,本教程必须使读者对船体振动的主要特点,它所涉及的一些主要方面以及解决船体振动问题的主要途径和方法有所了解,这是本书的另一个主要目的。

和“船体振动”相关的另一个重要方面——“船舶噪声及其控制”,也已经在国内外舰船科学和工程方面日益受到重视。一些先进的船舶生产大国,将振动、噪声及其他因素作为一个综合指数来衡量商船的舒适度。由于该问题的迅速发展和相对独立性,本书中亦不再涉及。

全书内容分为两大部分。前面三章介绍了弹性系统振动的基本理论和常用的分析方法;后面四章是船体振动部分。授课时数可以控制在30～40学时左右,并可酌情予以取舍。

本书编写分工如下:第五、六章由赵德有教授编写(大连理工大学),其余各章由金咸定教授(上海交通大学)修改和编写。全书修订改编工作由金咸定教授主持。余音副教授为本书作了部分校订工作。全书由武汉交通科技大学翁长俭教授主审。翁长俭教授对本书的修订和审

校以及所提出的宝贵的意见和建议,使本书的改编、修订与出版得益匪浅,在此谨表谢意。

限于编者的水平和经验,本书难免有不妥之处,恳请读者不吝指正。

编　者　于上海交通大学

1999 年 5 月

目　　录

第一章　单自由度系统的振动

1.1　单自由度振动系统

如果一个系统在空间的位置于任何瞬时均可由一个参数单值地予以确定，则此系统称为一个自由度的系统或单自由度系统。该参数则称为广义坐标，或简称坐标。

在各种振动问题中，单自由度振动系统的振动是最简单的振动。最简单的单自由度振动系统就是由一个弹簧和一个质量所构成的系统，如图 1.1 所示。若该弹簧的质量很小，可不予考虑，而质量仅限于在平面内发生垂向位移，则该系统的状态可以用一个坐标，即质量的垂向位移来唯一地确定，该质量-弹簧系统是单自由度振动系统的一种简化模型。

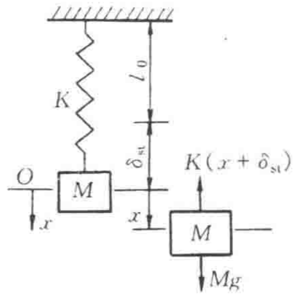

图 1.1　质量-弹簧系统

在工程中有不少单自由度系统的振动问题，许多相当复杂的系统也往往可简化为等效的单自由度系统，即弹簧-质量系统，故研究单自由度系统的振动具有实际意义。另一方面，单自由度振动系统的振动，揭示了振动现象的若干重要性质，是研究更复杂的多自由度系统振动、弹性体振动以及船舶振动的基础，因此，掌握单自由度系统的振动理论和方法十分重要。

1.2　无阻尼自由振动

1.2.1　定义

观察图 1.1 所示的质量-弹簧系统，设其受某种扰动，例如使质量 M 偏离其原来的静力平衡位置而有一初始位移或初始速度，当此扰动消失后，质量将在其平衡位置附近往复运动。此时，系统除受常值重力作用外，只受到弹簧恢复力作用，系统不再受其他外力作用，这类运动称为无阻尼自由振动。

1.2.2　运动方程式

考虑图 1.1 所示的无阻尼单自由度系统，质量 M 悬挂于弹簧下端，弹簧上端固定。设弹簧刚度为 K，不计弹簧本身质量。当 M 处于静止时的位置称为静平衡位置，此时弹簧的伸长变形为 δ_{st}，则有

$$Mg = K\delta_{st} \tag{1.1}$$

取静平衡位置为坐标原点，设坐标向下为正，速度 $\dot{x}$ 和加速度 $\ddot{x}$ 亦向下为正。质量 M 的运动

用广义坐标 x 描述。对于任意一位置 x，由图 1.1 右边的分离体图，根据牛顿第二定律得

$$M\ddot{x} = -K(x + \delta_{st}) + Mg \tag{1.2}$$

计及式(1.1)，则

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \tag{1.3}$$

令

$$\omega_n^2 = \frac{K}{M} \tag{1.4}$$

式(1.3)改写为

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{1.5}$$

式(1.3)或式(1.5)为单自由度系统无阻尼自由振动的运动方程式。

由以上运动方程式的推导可附带指出下列结论：重力等常值力的作用只影响系统的静力平衡位置，而对其围绕静平衡位置的振动没有任何关系。故对线性系统，若将坐标原点取在系统的静平衡位置，在建立振动微分方程式时，可不考虑常值重力的作用，同时，也不考虑由重力作用而产生的静伸长变形及相应的弹簧力。这一结论，可以适用于以后各章。

1.2.3 运动微分方程式的解

设式(1.5)的解为

$$x(t) = c\mathrm{e}^{st} \tag{1.6}$$

式中：c、s——待定常数。将式(1.6)代入式(1.5)，得

$$c(s^2 + \omega_n^2) = 0$$

为寻求 $x(t)$ 的非零解，$c \neq 0$，故必须有

$$s^2 + \omega_n^2 = 0 \tag{1.7}$$

即

$$s = \pm\sqrt{-\omega_n^2} = \pm \mathrm{i}\omega_n \tag{1.8}$$

式(1.7)为运动方程式(1.5)的特征方程式，而式(1.8)给出了特征方程式的根，于是，式(1.5)的通解为

$$x(t) = c_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n t} + c_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_n t} \tag{1.9}$$

考虑到

$$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\omega_n t} = \cos\omega_n t \pm \mathrm{i}\sin\omega_n t$$

将式(1.9)改写为

$$x(t) = A_1\cos\omega_n t + A_2\sin\omega_n t \tag{1.10}$$

式中：A_1、A_2——常数，由系统的初始条件确定。设初始条件为 $t=0$ 时，质量 M 的初始位移和初始速度分别为

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \tag{1.11}$$

则由式(1.10)可得 $A_1 = x_0$，$A_2 = \dfrac{\dot{x}_0}{\omega_n}$，于是，得到满足初始条件的解为

$$x(t) = x_0\cos\omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t \tag{1.12}$$

上式等价为下列形式的简谐函数：

$$x(t) = A\sin(\omega_n t + \alpha) \tag{1.13}$$

式中

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2} \tag{1.14}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{x_0\omega_n}{\dot{x}_0} \tag{1.15}$$

式(1.12)或式(1.13)即为单自由度系统无阻尼自由振动微分方程式的解。

1.2.4 无阻尼自由振动特性

式(1.12)或式(1.13)的解表明,单自由度无阻尼自由振动是一种简谐运动。质量 M 关于平衡位置的运动是对称的,通过平衡位置时,速度最大,而加速度等于零;相反,当质量因振动而达到最大振动位移时,速度为零,而加速度最大。无阻尼系统的自由振动是简谐振动,称 ω_n 为系统的固有频率,A 为振幅,α 为初相角。

简谐振动的性质可以用旋转矢量在铅垂轴上的投影来表示,如图 1.2 所示。令 $\boldsymbol{A}$ 为振幅 A 对应的矢量,矢量以等角速度 ω_n 绕 O 点逆时针方向转动,矢量初始位置时与水平轴的夹角为 α,它与水平轴的夹角为 $\omega_n t+\alpha$,是时间 t 的线性函数,每当矢量 $\boldsymbol{A}$ 旋转 2π 角后,其位置就重复一次。所以,矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 x 轴上的投影就是式(1.13)所示的简谐运动,如图 1.2 的右图所示。其中,水平轴为 $\omega_n t$,则初相位由原点与水平轴负轴上的零点之间的距离来表示。

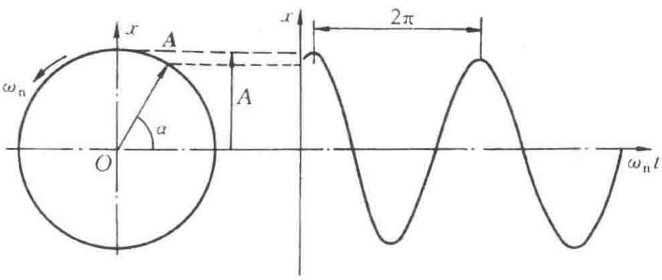

图 1.2 简谐运动的投影图

由图可见,振幅矢量 $\boldsymbol{A}$ 以等角速度 ω_n 逆时针旋转一周时,质量 M 往复振动一次,因此,固有频率 ω_n 又称圆频率,单位为 rad/s。在工程中又常用每秒振动的次数表示固有频率,即令

$$f = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}} \tag{1.16}$$

f 的单位为赫兹(Hz)。每振动一次的时间称为固有周期,即

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}} \tag{1.17}$$

应当强调指出,固有频率是单自由度无阻尼系统自由振动的极其重要的参数。固有频率仅取决于系统的固有性质,即取决于弹簧的刚度和质量本身,而与初始条件无关。确定固有频率往往是解决工程振动的首要问题。

还应当指出,无阻尼自由振动的振幅,仅取决于系统的初始条件(初始位移和初始速度);对于无阻尼系统,其自由振动的振幅 A 不随时间改变,始终保持为定值。

1.3 固有频率的计算方法

1.3.1 静伸长法

考虑到式(1.1),可将弹簧刚度 K 表示为

$$K=\frac{Mg}{\delta_{\mathrm{st}}} \tag{1.18}$$

代入式(1.16),可得

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{\mathrm{st}}}} \tag{1.19}$$

由上式可见,只要知道质量在重力作用下的静位移 δ_{st},就可以直接计算系统的固有频率。在有些实际问题中,若无法直接给出系统的刚度 K 时,利用该种方法计算固有频率是很方便的。该方法称为静伸长法。

例 1.1 设有一两端简支的等直梁(见图 1.3),在跨中有一集中质量 M,若梁的自身质量与 M 相比可略去不计,试求此系统的垂向振动的固有频率。若在集中质量下装一个刚度为 K 的减振弹簧(弹簧自身质量亦可略去),则系统的固有频率有何变化(梁长为 l,弯曲刚度为 EI)?

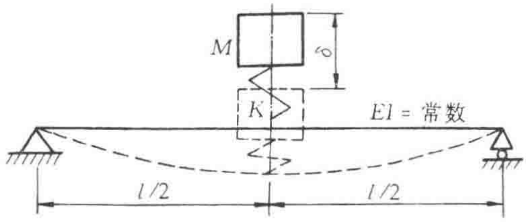

图 1.3 例 1.1 的系统

解 用"静伸长法"求解。当梁中点处作用该质量时,由其重力引起的梁中点的静挠度值为

$$x_{\mathrm{st}}=\frac{Mgl^3}{48EI}$$

由此,按静伸长法,该系统的固有频率为

$$\omega_{\mathrm{n}}=\sqrt{\frac{g}{x_{\mathrm{st}}}}=\sqrt{\frac{48EI}{Ml^3}}$$

若在集中质量 M 与梁中点间连以弹簧,则用"静伸长法"时,需要求出弹性系统在质量 M 的重力作用下,质量所发生的静位移,它由两部分组成:

$$\delta_{\mathrm{st}}=\delta_1+\delta_2$$

式中

$$\delta_1=\frac{Mg}{K},\quad \delta_2=\frac{Mgl^3}{48EI}$$

于是,装有减振弹簧 K 后,系统的固有频率为

$$\omega_{\mathrm{n}}=\sqrt{\frac{48EI}{Ml^3}}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{48EI}{Kl^3}}}$$

不难看出,由于安装了减振弹簧 K 后,系统的固有频率将比直接安装在简支梁上有所降低。

从这个例题可看出,当静伸长比较容易算出或可用实验方法测得时,用该方法计算单自由度系统的固有频率是相当方便的。

1.3.2 解析法

采用牛顿第二定律或其他动力学方法,可直接得到系统的振动微分方程式,从而导出如式(1.5)形式的表达式,直接得到系统的固有频率。

例 1.2 图 1.4 所示系统为倒置摆。质量 m 固结于不计质量的刚性杆 OA 的顶端。弹簧刚度为 k 的两个弹簧对称地连接于 OA 杆的 B 点,使杆保持铅垂的平衡位置。试求摆的微幅振动的固有频率,并分析其运动特点。

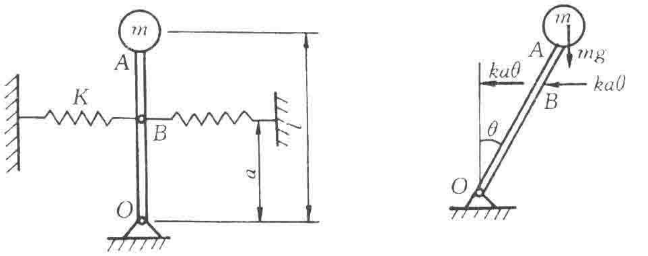

图 1.4 倒置摆

解 以杆相对于静平衡铅垂位置的角坐标 θ 描述质量 m 的运动,于是由于杆子绕 O 点作定轴转动,其运动方程式为

$$ml^2\ddot{\theta} = mgl\sin\theta - (2ka\sin\theta)a\cos\theta$$

考虑微幅振动,即当 θ 很小时,上式可简化为

$$ml^2\ddot{\theta} + 2ka^2\theta - mgl\theta = 0$$

或

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2ka^2 - mgl}{ml^2}\right)\theta = 0$$

由上式不难看出,运动方程式的解 $\theta(t)$的性质与 θ 项的系数的符号有关。

(a) 当$(2ka^2 - mgl)/ml^2 > 0$ 时,

$$\theta(t) = A\cos(\omega_n t - \varphi)$$

固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2ka^2 - mgl}{ml^2}}$$

此时,系统为简谐振动,A 和 φ 不难由初始条件确定。

(b) 当$(2ka^2 - mgl)/ml^2 \leqslant 0$ 时,系统不稳定,不发生振动。这是因为弹性恢复力矩小于重力矩,故质量 m 不能在平衡位置附近往复运动。

1.3.3 能量法

当单自由度系统作无阻尼自由振动时,系统的机械能守恒。因此,可以应用机械能守恒定律,即

$$T + V = T_0 + V_0 \tag{1.20}$$

式中:$T_0 + V_0$——初始时系统的动能与势能之和,这是一个常数。由此,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T + V) = 0 \tag{1.21}$$

由式(1.21)可以导出无阻尼系统的固有频率。

能量守恒可用于系统在任意两瞬间的位置。若取质量 M 经过平衡位置时作为第一个瞬时位置，由于质量作简谐振动，故此时速度最大，$T_1 = T_{\max}$，该位置的势能为零点，$V_1 = 0$；再取质量 M 偏离平衡位置最远的位置为第二个瞬时位置，此时速度为零，$T_2 = 0$，而势能最大，$V_2 = V_{\max}$，故能量守恒定律对于自由振动问题的表达形式为

$$V_{\max} = T_{\max} \tag{1.22}$$

通常将应用式(1.22)确定系统固有频率的方法称为能量法。

例 1.3 如图 1.5 所示的系统，细杆 OA 为刚性杆，可绕支点 O 转动，杆 OA 位于水平时为静平衡位置。杆端集中质量为 m，杆与弹簧(刚度为 k)的质量忽略不计，试用能量法建立系统的运动方程式。

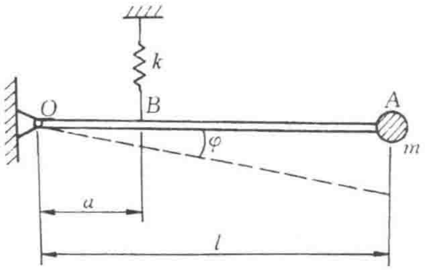

图 1.5　例 1.3 的简图

解 取杆偏离平衡位置的角 φ 为广义坐标。取静平衡位置为重力势能零点，弹簧的自由长度为弹性势能的零点，再令 δ_{st}为静变形，则系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}ml^2\varphi^2$$

系统的势能为

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}k(a\varphi + \delta_{st})^2 - mgl\varphi \\ &= \frac{1}{2}ka^2\varphi^2 + k\delta_{st}a\varphi - mgl\varphi + \frac{1}{2}k\delta_{st}^2 \end{aligned}$$

由于平衡位置有

$$k\delta_{st} \cdot a = mgl$$

则

$$V = \frac{1}{2}ka^2\varphi^2 + \frac{1}{2}k\delta_{st}^2$$

将 T 与 V 表达式代入式(1.21)，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T + V) = ml^2\varphi\varphi + ka^2\varphi\varphi = 0$$

则运动微分方程式为

$$ml^2\varphi + ka^2\varphi = 0$$

其固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{ka^2}{ml^2}}$$

例 1.4 图 1.6 所示某刚性杆，可绕 O 点转动，在其上分别有两个质量 M_1 和 M_2，并由两个刚度系数为 K_1 和 K_2 的弹簧进行悬挂，不计刚杆的质量，试求该系统的微幅振动之固有频率。

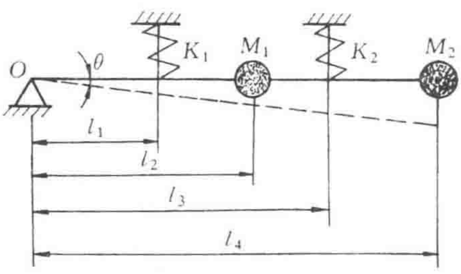

图 1.6　例 1.4 的系统

解 这是一个单自由度系统，取转角 θ 为广义坐标，并设其最大幅值为 $\theta_{\max}$。用能量法，其最大动能和最大势能分别为

$$T_{\max} = \frac{M_1 l_2^2 \omega_n^2 \theta_{\max}^2}{2} + \frac{M_2 l_4^2 \omega_n^2 \theta_{\max}^2}{2}$$

$$V_{\max}=\frac{K_1l_1^2\theta_{\max}^2}{2}+\frac{K_2l_3^2\theta_{\max}^2}{2}$$

由能量守恒定律

$$V_{\max}=T_{\max}$$

故得

$$\omega_n^2=\frac{K_1l_1^2+K_2l_3^2}{M_1l_2^2+M_2l_4^2}$$

值得指出的是,对于一个自由度的系统,不管其多么复杂,总可化成为图 1.1 所类似的等效质量-弹簧系统。按真实系统的动能和位能分别与等效系统的动能与位能相等的条件,可求出等效系统的质量 M_e 和等效系统的刚度 K_e,于是

$$\omega_n^2=\frac{K_e}{M_e}$$

对于本例题,显然有

$$K_e=K_1l_1^2+K_2l_3^2,\quad M_e=M_1l_2^2+M_2l_4^2$$

这种方法有时称为等效法。应当指出,等效系统的刚度和质量 K_e 和 M_e 可因广义坐标的选取不同而变化,但系统的固有频率 ω_n 却不会因坐标的选取而变化。

1.4 粘性阻尼系统的自由振动

1.4.1 粘性阻尼

在无阻尼自由振动中,由于机械能守恒,系统保持等幅振动。实际上,在振动时系统中不可避免地存在阻尼,振幅将会随时间增长而衰减,最终趋于静止。为此,需要研究阻尼对振动的影响。

阻尼可由不同途径产生,如两物体之间的干摩擦,气体或液体的介质阻尼以及材料和结构的内部阻尼等。阻尼的机理也十分复杂,要精确地描述往往是很困难的。为了方便起见,本节中只限于考虑粘性阻尼,如物体沿润滑表面滑动或在流体中低速运动时所产生的阻尼,通常可以视为粘性阻尼。粘性阻尼在工程实践中最常见,又易于数学处理。其他形式的阻尼,可通过每个周期消耗能量相等的原理,化为等效粘性阻尼。

粘性阻尼与物体相对于介质的运动速度成线性关系,它是所有阻尼机理中最简单的模型。考虑图 1.7 所示的粘性阻尼振动系统,取质量 m 的静平衡位置为坐标原点,坐标 x 向下为正,粘性阻尼力为

$$F_d=-C\dot{x}\tag{1.23}$$

式中:C 为粘性阻尼系数,其负号表示粘性阻尼力与运动速度反向,始终阻止系统的运动,因而消耗了系统的能量。

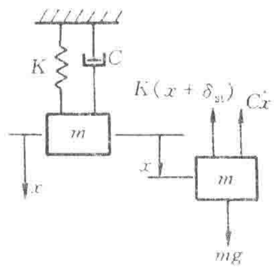

图 1.7 粘性阻尼振动系统

1.4.2 粘性阻尼系统的运动

1. 运动方程式

图 1.7 所示的粘性阻尼振动系统,质量 M 由弹簧与阻尼器所支撑。弹簧刚度系数为 K,阻尼器的粘性阻尼系数为 C。若对该系统给以一定的初始位移和/或初始速度,则系统便发生运动。位移 x 自平衡位置起向下为正。

由分离体图,此系统的微分方程式可写为

$$M\ddot{x} = Mg - C\dot{x} - K(x + \delta_{st}) \tag{1.24}$$

式中:δ_{st}是平衡位置时弹簧的静伸长。因为在此位置上,阻尼器对系统不产生作用力,故静平衡条件为

$$Mg = K\delta_{st}$$

因此,牛顿第二定律归结为

$$M\ddot{x} = -C\dot{x} + Kx \tag{1.25}$$

或

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0 \tag{1.26}$$

该式是粘性阻尼系统运动微分方程式的标准形式。

2. 方程式求解

设式(1.26)的解为

$$x = Ae^{st} \tag{1.27}$$

式中:e——自然对数的底;A——积分常数。将式(1.27)代入式(1.26)得特征方程式

$$Ms^2 + Cs + K = 0 \tag{1.28}$$

或

$$s^2 + 2ns + \omega_n^2 = 0 \tag{1.29}$$

式中

$$n = \frac{C}{2M}, \quad \omega_n^2 = \frac{K}{M} \tag{1.30}$$

式(1.29)为微分方程式(1.26)的特征方程式,其根为

$$S_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega_n^2} \tag{1.31}$$

于是,式(1.26)的一般解为

$$x(t) = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t} \tag{1.32}$$

式中:A_1 和 A_2——由初始条件确定的积分常数。由式(1.32)可见,方程式(1.26)的解的性质依赖于根 s_1、s_2 的性质。在 M、K 一定时,根 s_1 和 s_2 的性质又依赖于阻尼系数 C 的值。随着 C 值的不同,式(1.31)根号内的值可正、可负,也可为零,即两个根 s_1 和 s_2 可以是实根或复根,因此,解(1.32)的性质也就不同。所以式(1.31)根式为零是一个分界线。

为了分析的方便和需要,现在,再引入一个新的参数。即令式(1.31)根式下的值等于零,将此时的粘性阻尼系数称为临界阻尼系数 C_c,此时

$$C_c = 2M\sqrt{\frac{K}{M}} = 2\sqrt{KM} = 2M\omega_n \tag{1.33}$$

由上式不难看到,临界阻尼系数 C_c 仅依赖于系统本身的物理参数,而与系统所受的阻尼无关。

令

$$\zeta = \frac{C}{C_c} = \frac{C}{2\sqrt{MK}} = \frac{n}{\omega_n} \tag{1.34}$$

称 ζ 为阻尼比，或无因次阻尼系数。它是无量纲的量，决定于系统的参数 M、K 和 C。只要以上三个参数中有一个变化。都会引起阻尼比 ζ 的变化。

引用阻尼比，可将微分方程式(1.26)和特征方程式(1.29)改写为如下形式：

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{1.35}$$

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \tag{1.36}$$

特征方程式的根也可写为

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\,\omega_n \tag{1.37}$$

可见，引入阻尼比 ζ，使特征方程式的根 $s_{1,2}$依赖于 M、C、K 的性质，表示为依赖于一个参数 ζ，当 ζ 值不同时，解的性质也不同。

3. 三种运动情况

(1) 过阻尼情况($\zeta>1$，即 $C>C_c$)。

此时，特征方程式的根 s_1、s_2 为两个不等的负实根，即

$$s_1 = (-\zeta_{\omega_n} + \sqrt{\zeta^2 - 1}\,\omega_n) < 0 \tag{1.38}$$

$$s_2 = (-\zeta_{\omega_n} - \sqrt{\zeta^2 - 1}\,\omega_n) < 0 \tag{1.39}$$

则解(1.32)的 $x(t)$将随着 t 的增加而趋近于零。这表示，质量 M 不发生振动，而是作指数衰减运动。

(2) 临界阻尼情况($\zeta=1$，即 $C=C_c$)。

此时，特征方程的根为两个相等的实根：

$$s_1 = s_2 = -\zeta\omega_n = -\omega_n \tag{1.40}$$

由于出现重根，则运动方程式的解为

$$x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\zeta\omega_n t} \tag{1.41}$$

若初始条件为 $t=0, x=x_0, \dot{x}=\dot{x}_0$，则

$$x(t) = [x_0 + (\dot{x}_0 + \omega_n x_0)t]e^{-\zeta\omega_n t} \tag{1.42}$$

可以看出，当 $t\to\infty$时，$e^{-\zeta\omega_n t}\to 0$，所以运动不具有振动特点，而是指数衰减运动。

(3) 欠阻尼情况($\zeta<1$，即 $C<C_c$)。

此时，特征方程式具有两个复数根，构成一对共轭复数，

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n \tag{1.43}$$

或

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d \tag{1.44}$$

式中

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n \tag{1.45}$$

则解(1.32)的形式为

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\zeta\omega_n t}(A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t}) \\ &= e^{-\zeta\omega_n t}(A'_1\cos\omega_d t + A'_2\sin\omega_d t) \end{aligned} \tag{1.46}$$

式(1.46)中的积分常数 A'_1 和 A'_2 由初始条件决定。