计算机系列教材

离散数学知识解析与习题解答

李秀芳 张小峰 杨洪勇 赵永升 编著

清华大学出版社

计算机系列教材

李秀芳 张小峰 杨洪勇 赵永升 编著

离散数学
知识解析与习题解答

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是与教材《离散数学》(书号为 9787302421672，由张小峰等编著)相配套的知识解析与习题指导书。本书根据离散数学课程教学的基本要求，对知识点进行解析，为帮助计算机及相关专业的本、专科生更好地掌握离散数学知识点、完成课后习题而编写。全书分为两个部分：第一部分是与教材相对应的 12 章知识点解析与课后习题解答，帮助学生掌握离散数学的知识点以及学习技巧。第二部分是模拟题部分，共包含 6 套模拟试题与参考答案。每套模拟题难易程度适中，涵盖了离散数学的重要知识点，帮助学生了解对知识的掌握程度。

本书可以作为高等学校数学专业、计算机专业学生学习离散数学课程的指导用书，也可以供对离散数学感兴趣的读者参考使用。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签，无标签者不得销售。
版权所有，侵权必究。侵权举报电话：010-62782989　13701121933

图书在版编目(CIP)数据

离散数学知识解析与习题解答/李秀芳，张小峰，杨洪勇，赵永升编著．—北京：清华大学出版社，2017
(计算机系列教材)
ISBN 978-7-302-46876-9

Ⅰ．①离…　Ⅱ．①李…　②张…　③杨…　④赵…　Ⅲ．①离散数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ．①Q158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 064155 号

责任编辑：白立军
封面设计：常雪影
责任校对：梁　毅
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课件下载：http://www.tup.com.cn，010-62795954
印 装 者：北京泽宇印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：9.25　　**字　　数**：215 千字
版　　次：2017 年 6 月第 1 版　　**印　　次**：2017 年 6 月第 1 次印刷
印　　数：1～2000
定　　价：29.00 元

产品编号：073555-01

前言

本书是根据教育部高等学校教学指导委员会编制的“离散数学课程教学的基本要求”，为帮助计算机及相关专业的本、专科生更好地掌握离散数学知识点、完成课后习题而编写，是与教材《离散数学》(书号为9787302421672，由张小峰等编著)相配套的知识解析与习题指导教材。

本书根据离散数学课程教学的基本要求，对知识点进行解析，全书分为两个部分：第一部分是与教材相对应的12章知识点解析与课后习题解答，每章都分别从学习要求、重要知识点、总结和习题解答4个方面进行描述，帮助学生掌握离散数学的知识点以及学习技巧。第二部分是模拟题部分，共包含6套模拟题与参考答案。每套模拟题难易程度适中，涵盖了离散数学的重要知识点，帮助学生了解对知识的掌握程度。

本书具有以下特点。

(1) 以基本知识为主线，对知识点进行对比、分析和归纳，帮助学生理解和掌握。

(2) 注重学生逻辑思维能力和解题方法的培养。

(3) 模拟题经过了实际考试的检验，知识点较为全面，难易程度适中，可以有效检验学生的掌握程度。

本书具体编写分工如下：第1章、第2章、第5章和第6章由张小峰编写，第8章由杨洪勇编写，第12章由赵永升编写，其余章节和内容由李秀芳编写，全书的策划和定稿工作由李秀芳负责。

在本书的规划和写作过程中，山东大学张彩明教授、西安电子科技大学李兴华教授、鲁东大学邹海林教授等对书稿进行了审阅，提出了许多建设性的建议，在此深表感谢。

在本书的编写过程中，作者参考了多种版本的离散数学、习题解答相关的教材和辅导书以及网站资料，从中受益匪浅，在此一并向有关作者致谢。

由于作者水平有限，本书在内容的取舍、题目选取以及模拟题设计等方面难免存在不足之处，敬请专家、同行和读者批评指正。

作者联系方式：ytlxf@126.com。

作　者

2017年1月于鲁东大学

第一篇　知识解析与习题解答

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第二篇 模拟试题与参考答案

第一篇

知识解析与习题解答

第1章　矩阵知识初步

1.1　学习要求

本章内容主要包括矩阵、矩阵运算以及布尔矩阵。通过本章的学习，了解矩阵的基本概念，掌握矩阵的运算和布尔矩阵。具体要求如下。

(1) 理解矩阵、行向量、列向量、零矩阵、单位矩阵、上三角矩阵和下三角矩阵等概念。

(2) 掌握矩阵相等的判断以及求解。

(3) 掌握矩阵的加、减、数乘、乘法以及转置运算。

(4) 理解布尔矩阵的定义。

(5) 掌握布尔矩阵的交集、并集以及布尔积的运算。

1.2　重要知识点

1. 矩阵的基本概念

将 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，按照一定的顺序排列成的一个 m 行 n 列的矩形：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为一个 $m\times n$ 矩阵(matrix)，通常用大写字母 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 等表示，可以记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$a_{ij}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中第 i 行第 j 列的元素(element)。

当 $m=n$ 时，称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵(square matrix)。

两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 相等，当且仅当所有的对应元素分别相等。

给定矩阵 $\boldsymbol{M}=(m_{ij})_{m\times n}$：

(1) 如果 $m=1$，称矩阵 $\boldsymbol{M}$ 为行矩阵(row matrix)或行向量(row vector)。

(2) 如果 $n=1$，称矩阵 $\boldsymbol{M}$ 为列矩阵(column matrix)或列向量(column vector)。

(3) 如果对任意的 i、j，有 $m_{ij}=0$，称矩阵 $\boldsymbol{M}$ 为零矩阵(zero matrix)，记为 $\boldsymbol{0}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{0}$。

(4) 如果 $m=n$，且对任意的 i，有 $m_{ii}=1$，其他所有的元素均为 0，称矩阵 $\boldsymbol{M}$ 为单位矩阵(identity matrix)，记为 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{I}$。

(5) 如果 $m=n$，且主对角线以上或以下的元素为 0，称为三角矩阵(triangular matrix)。其中：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

称为上三角矩阵(upper triangular matrix)。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

称为下三角矩阵(lower triangular matrix)。

2. 矩阵的运算

1) 矩阵加法和减法

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$,则两个矩阵的和(sum)与差(difference)定义为

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$$

注意:两个矩阵只有具有相同的行数和列数时,才能进行相加减。

矩阵的加法满足下列运算定律。

① $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

② $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$。

2) 矩阵数乘

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$k\in\mathbf{R}$ 是常数,则矩阵$(ka_{ij})_{m\times n}$称为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的数乘,记为 $k\boldsymbol{A}$,即 $k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}$。

不难验证,矩阵的数乘满足如下性质。

① $(k_1k_2)\boldsymbol{A}=k_1(k_2\boldsymbol{A})$。

② $(k_1+k_2)\boldsymbol{A}=k_1\boldsymbol{A}+k_2\boldsymbol{A}$;$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$。

③ $k\boldsymbol{A}=0\Leftrightarrow k=0$ 或 $\boldsymbol{A}=0$。

3) 矩阵乘法

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times p}$,矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{p\times n}$,则两个矩阵的乘积定义为 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$,其中:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$$

记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$。

注意:两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 如果可以相乘,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数必须与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数相同,否则两者无法相乘。

矩阵的乘法运算不满足交换律,但满足如下性质。

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

① $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$，$k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$。

② $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$。

4）转置

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{A}'$，定义为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(a'_{ij})_{n\times m},\quad \text{其中 } a'_{ij}=a_{ji}$$

矩阵的转置满足如下性质。

① $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$。

② $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$。

③ $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$。

3. 布尔矩阵

如果一个 $m\times n$ 矩阵中的所有元素都是 0 或 1，称该矩阵是布尔矩阵（Boolean matrix）。

需要说明的是，布尔矩阵中的 0 或 1 并不代表数值中的 0 或 1，而是代表布尔常量 0 或 1，分别表示逻辑假（false）和逻辑真（true）。

设有布尔矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，则：

(1) 两个布尔矩阵的交集（intersection），记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}=(c_{ij})_{m\times n}$，定义为

$$c_{ij}=\begin{cases}0 & \text{如果 } a_{ij}=0 \text{ 或 } b_{ij}=0\\ 1 & \text{如果 } a_{ij}=1 \text{ 且 } b_{ij}=1\end{cases}\quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

(2) 两个布尔矩阵的并集（union），记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}=(c_{ij})_{m\times n}$，定义为

$$c_{ij}=\begin{cases}0 & \text{如果 } a_{ij}=0 \text{ 且 } b_{ij}=0\\ 1 & \text{如果 } a_{ij}=1 \text{ 或 } b_{ij}=1\end{cases}\quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

(3) 如果布尔矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times p}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{p\times n}$，则两个布尔矩阵的布尔积（Boolean product），记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B}=(c_{ij})_{m\times n}$，定义为

$$c_{ij}=\begin{cases}1 & \text{如果存在 } k=1,2,\cdots,p,\text{使 } a_{ik}=1 \text{ 且 } b_{kj}=0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

布尔矩阵的运算满足如下性质。

① $\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\vee\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{A}$。

② $(\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B})\vee\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\vee(\boldsymbol{B}\vee\boldsymbol{C})$，$(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\wedge\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\wedge(\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{C})$。

③ $\boldsymbol{A}\vee(\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B})\wedge(\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{C})$，$\boldsymbol{A}\wedge(\boldsymbol{B}\vee\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\vee(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{C})$。

④ $(\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B})\odot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\odot(\boldsymbol{B}\odot\boldsymbol{C})$。

1.3 总结

本章内容主要包括矩阵、矩阵运算以及布尔矩阵等内容，其中，矩阵的运算以及布尔矩阵的运算是学习的重点和难点。

围绕上述知识点，相关习题主要有以下几种类型。

(1) 基本概念题：主要考查矩阵、行向量、列向量、零矩阵、单位矩阵、上三角矩阵和

下三角矩阵的概念等。

（2）判断题：主要考查判断给定矩阵属于哪种类型或矩阵相等。

（3）计算题：主要考查给定确定的矩阵，进行加、减、数乘、乘法以及转置运算；给定布尔矩阵，进行布尔矩阵的交集、并集以及布尔积的运算。

（4）证明题：主要涉及证明矩阵相等。

针对以上知识点和习题类型，在求解过程中需要注意以下几点。

（1）本章仅对矩阵的基本概念、矩阵的基本运算以及布尔矩阵的内容进行讲述，重点要求在理解矩阵基本概念的基础上掌握矩阵和布尔矩阵的基本运算，如加、减和乘法等。而对于矩阵的变换、复杂计算以及应用在线性代数课程中进行学习，本课程不做要求。

（2）矩阵运算中乘法运算较为重要，在后续的关系部分和图论部分应用较多，应该重点掌握乘法的运算特点和运算性质。布尔矩阵也将在后续的学习中得以应用，也需要掌握其运算特点。

1.4 习题解答

1. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 定义如下：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&3&2\\-1&4&2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&1&3&1\\2&2&4&2\\3&3&2&3\end{bmatrix}$$

计算：

（1）$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$。　（2）$2\boldsymbol{A},3\boldsymbol{B}$。　（3）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{B}$。　（4）$\boldsymbol{AB}$。

解：

（1）$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&2&1&-1\\2&3&3&4\\3&4&2&2\end{bmatrix},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2&2&3\\1&2&3\\3&4&2\\1&2&3\end{bmatrix}$

（2）$2\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&4&6\\4&6&8\\2&6&4\\-2&8&4\end{bmatrix},3\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}6&3&9&3\\6&6&12&6\\9&9&6&9\end{bmatrix}$

（3）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}3&4&6\\3&5&7\\4&7&4\\0&6&5\end{bmatrix},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1&1&-2&-2\\0&1&-1&2\\0&1&0&1\end{bmatrix}$

(4) $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 2\\ -1 & 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 4 & 2\\ 3 & 3 & 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & 14 & 17 & 14\\ 22 & 20 & 26 & 20\\ 14 & 13 & 19 & 23\\ 0 & 13 & 17 & 13\end{bmatrix}$

2. 已知两布尔矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 定义如下：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

计算：

(1) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\vee\boldsymbol{B}$。 (2) $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$。 (3) $\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B}$。

解：

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\vee\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

(2) $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

(3) $\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

第 2 章　组合数学与数论初步

2.1　学习要求

本章内容主要包括乘法原理和加法原理、排列、组合、鸽笼原理、素数、最大公约数、最小公倍数、数制。通过本章的学习，了解组合数学和数论中的基本概念，掌握乘法和加法原理、排列组合和容斥原理等。具体要求如下。

(1) 熟练运用乘法原理和加法原理。

(2) 能够应用乘法原理和加法原理计算排列组合问题。

(3) 理解鸽笼原理的基本概念，能够应用鸽笼原理解决简单的计数问题。

(4) 了解素数、最小公倍数、最大公约数、数制等基本概念。

2.2　重要知识点

1. 基本计数原则

1) 加法原则。

定义：实现一个任务，有 n 种不同的方式可以选择，每种方式都可以独立完成任务，在第 k 种方式中，有 a_k 种具体的实现方式。则实现这个任务的方式有

$$N = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

(2) 乘法原则。

定义：完成某个任务需要 n 个步骤，在第 k 步有 a_k 种实现方式，则完成该任务的完成方式总数为

$$N = \prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$$

2. 排列组合

(1) 排列。

从$\{1,2,\cdots,n\}$选取 r 个数，根据乘法原则，可选择的方案数为

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} = P(n,r)$$

进一步，如果 $r=n$，该问题相当于将 n 个数进行全排列的次数，共有

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = \frac{n!}{(n-n)!} = P_n^n = n!$$

(2) 组合。

从$\{1,2,\cdots,n\}$选取r个数组成一个集合，可选择的方案数为

$$\frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=C(n,r)$$

关于组合数$C(n,r)$，有下面的定理。

定理 2-1 设n、r为正整数，则：

① $C(n,r)=\frac{n}{r}C(n-1,r-1)$。

② $C(n,r)=C(n,n-r)$。

③ $C(n,r)=C(n-1,r-1)+C(n-1,r)$。

3. 鸽笼原理

定理 2-2(鸽笼原理) 将$n+1$只鸽子放进n个笼子，至少有一个笼子里至少放着2只鸽子。

推论：若有n只鸽子住进m个笼子，则至少有一个笼子至少住进$\left\lfloor\frac{n-1}{m}\right\rfloor+1$只鸽子。其中$\lfloor x\rfloor$表示小于等于$x$的最大整数。

4. 素数

设a、b是两个整数，$b\neq0$，如果存在整数c使$a=bc$，则称a被b整除，或称b整除a，记为$b|a$。又称a是b的倍数，b是a的因子。显然，任何数都有两个正因子：1和它自身，称为它的平凡因子，除平凡因子外，其他因子称为真因子。

整除具有如下性质。

(1) 如果$a|b$且$a|c$，则对任意的整数x、y，有$a|(xb+yc)$。

(2) 如果$a|b$且$b|c$，则$a|c$。

(3) 设$m\neq0$，则$a|b$当且仅当$ma|mb$。

(4) 如果$a|b$且$b|a$，则$a=\pm b$。

(5) 如果$a|b$且$b\neq0$，则$|a|\leqslant|b|$。

定义：如果正整数a大于1且只能被1和它自身整除，则称数a是**素数或质数**；如果a大于1且a不是素数，则称a是**合数**。

定理 2-3(算术基本定理) 设$a>1$，则

$$a=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_k^{r_k}$$

其中，$p_1,p_2,\cdots,p_k$是互不相同的素数，$r_1,r_2,\cdots,r_k$是正整数。

判断一个数是否是素数，有如下3个定理。

定理 2-4 如果正整数a是一个合数，则a必有一个小于等于$a-1$的真因子。

定理 2-5 如果正整数a是一个合数，则a必有一个小于等于$\frac{a}{2}$的真因子。

定理 2-6 如果正整数a是一个合数，则a必有一个小于等于$\sqrt{a}$的真因子。

5. 最大公约数与最小公倍数

最大公约数：设 a 和 b 是两个整数，如果 $d|a$ 且 $d|b$，则称 d 是 a 和 b 的公因子或公约数。两个数的公因子中，最大的称为 a 和 b 的最大公因子或最大公约数，记为 $\mathrm{GCD}(a,b)$。

关于 a 和 b 以及它们的最大公约数 $\mathrm{GCD}(a,b)$，有下面的定理。

定理 2-7 如果 $\mathrm{GCD}(a,b)=c$，则 $c=as+bt$。

最小公倍数：设 a 和 b 是两个正整数，如果 $a|d$ 且 $b|d$，称 d 是 a 和 b 的公倍数。两个数的公倍数中，最小的称为 a 和 b 的最小公倍数，记为 $\mathrm{LCM}(a,b)$。

基于整数 a 和 b 的最大公约数 $\mathrm{GCD}(a,b)$，可以根据如下的方式计算两者的最小公倍数：

$$\mathrm{GCD}(a,b) \times \mathrm{LCM}(a,b) = a \times b$$

6. 数制

(1) 进位计数制。

多位数码中每一位的构成方法以及从低位到高位的进位规则称为**数制**。

在十进制中，任何数都是用 10 个数字符号(0、1、2、3、4、5、6、7、8、9)按“逢十进一”的规则组成的；而在二进制中，任何数都是用两个数字符号(0、1)按“逢二进一”的规则组成的。表 2.1 列出了十进制、二进制及 R 进制的特点。

表 2.1 进位制数

	十进制	二进制	R 进制
特点	① 具有 10 个数字符号 0、1、2、…、9 ② 由低向高位是逢十进一	① 具有两个数字符号 0、1 ② 由低向高位是逢二进一	① 具有 R 个数字符号 0、1、2、…、$R-1$ ② 由低向高位是逢 R 进一
举例	$198.3=1\times10^2+9\times10^1+8\times10^0+3\times10^{-1}$	$10.01=1\times2^1+0\times2^0+0\times2^{-1}+1\times2^{-2}$	$a_2a_1a_0\cdot a_{-1}=a_2\times R^2+a_1\times R^1+a_0\times R^0+a_{-1}\times R^{-1}$
一般形式	$S=(K_{n-1}\cdots K_0\cdot K_{-1}K_{-m})_{10}=\sum_{i=n-1}^{-m}K_i(10)_{10}^i$ 式中，m、n 为正整数 $K_i=0,1,2,\cdots,9$	$S=(K_{n-1}\cdots K_0\cdot K_{-1}K_{-m})_2=\sum_{i=n-1}^{-m}K_i(10)_2^i$ 式中，m、n 为正整数 $K_i=0,1$	$S=(K_{n-1}\cdots K_0\cdot K_{-1}K_{-m})_R=\sum_{i=n-1}^{-m}K_i(10)_R^i$ 式中，m、n 为正整数 $K_i=0,1,\cdots,R-1$
基数	$(10)_{10}$	$(10)_2=(2)_{10}$	$(10)_R=(R)_{10}$
权	$(10^i)_{10}$	$(10)_2^i=(2^i)_{10}$	$(10)_R^i=(R^i)_{10}$

每种进位制都有一个基本特征数，称为进位制的“基数”，基数表示了进位制所具有的数字符号的个数及进位的规则。显然，十进制的基数为 10，二进制的基数为 2，R 进制的基数为 R。定义某一进位制中各位 1 所表示的值为该位的“权”，或称“**位权**”。基数和权是进位制的两个要素。

同一进位制中，不同位置上的同一个数字符号所代表的值不同。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com