21世纪高等开放教育系列教材

概率论与数理统计

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI

主编　胡　晶

中国人民大学出版社

21世纪高等开放教育系列教材

概率论与数理统计

主　编　胡　晶
副主编　乔海英　赵凌华　王晓峰

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/胡晶主编. —北京：中国人民大学出版社，2017.6
21世纪高等开放教育系列教材
ISBN 978-7-300-24323-8

Ⅰ.①概… Ⅱ.①胡… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第073356号

21世纪高等开放教育系列教材
概率论与数理统计
主　编　胡　晶
副主编　乔海英　赵凌华　王晓峰
Gailülun yu Shuli Tongji

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京密兴印刷有限公司		
规　　格	185 mm×260 mm　16开本	**版　　次**	2017年6月第1版
印　　张	12	**印　　次**	2017年6月第1次印刷
字　　数	285 000	**定　　价**	29.00元

前　言

高等数学由于它的基础作用，它提供的理论与方法的巧妙以及它在应用时的简洁和有效，使得它已经成为当代科学与技术进步、经济与社会发展离不开的一门基础学科。为了满足各类人才培养的需要，适用于不同层次、不同专业所需的高等数学教材大量涌现。我们认为：一部好的高等数学教材，除了应具备科学性、系统性、严肃性之外，还必须有利于学生在教师引导下的主动学习。因此，有两点显得特别重要：一是针对性，即根据培养目标、读者的基础和学习需要，对教材有一个准确的定位。这样，教材内容的确定、素材的选取、结构和时间的安排等都能与之相适应，做到定位准确、结构合理、针对性强。二是可读性，即在语言文字上下工夫，在表现方式上有“悬念情节”，要“有味道”，破除人们对数学教材是那种“枯燥无味的符号文字游戏”的误识。

著名数学家拉普拉斯说：“生活中最重要的问题，其中绝大多数在实质上只是概率问题。”概率论是“生活真正的领路人，如果没有对概率的某种估计，我们将寸步难移，无所作为。”这些论述精辟地阐明了概率统计的作用和学习的意义。

本书是为成人高等教育开设的概率论与数理统计课程所编写的教材，其内容是高等数学的一部分，要求学生具有简单一元函数微积分的基础。本书内容分为三编，分别为概率论、数理统计基础和数学实验，适用于理工类、经济类、工商管理类等各个专业。通过本书的学习，学生可掌握研究和解决随机现象统计规律性问题的基本思想和基本方法。在本书的编写过程中，以“兴趣吸引、远程助学、应用广泛”为目标，针对理工类和经济类专业培养目标以及成人学生远程在职学习、文化水平参差不齐等特点，恰当定位，以提高学生的文化素质和培养学生量化分析问题的意识为宗旨，注意做到以下5个“易”：

1. 易读——以基本、实用、易自学、易掌握为原则，遵循知识体系的系统性与科学性，但不追求知识体系的完整性，一些定理只给出结论而不进行大篇幅的逻辑推理证明，

淡化理论性、注重实用性。

2. 易懂——注意用通俗的语言引入概念，结合实际生活中注意到或还没有注意到的实际案例，介绍用于解决问题的数学思想或方法。让学生在学习数学的过程中，一方面感到“有味道、有兴趣”，数学不再深奥，数学不再难学，数学就在我们身边；另一方面也感悟到数学思想的深刻性，还体会到数学知识的基础性和数学应用的广泛性。

3. 易学——为了减轻成人业余学生的学习负担和经济负担，做到突出重点和有效解决难点，每一编试图通过“引子”从学生学过的知识内容中引出本编的内容，介绍本编所要解决的问题，引起学生学习的兴趣；学生容易混淆或易错的地方以黑体“注意”的方式给予提示；关键之处提出一些“思考题”，引导学生深入思考；每章开始设有学习要求，最后配有知识考核点及典型试题，学习完一章内容后可以归纳总结和自我测试，争取实现无师自通和一部文字教材解决问题。

4. 易掌握——在讲清基本概念、基本思想的基础上，在基本定理、基本方法的应用上下功夫，尽量从多个方面给出一定数量的例题和习题，帮助学生对知识内容的深刻理解，解决好做题难的问题。

5. 易应用——安排了 EXCEL 应用软件和 MATLAB 应用软件的数学实验，学生通过学习应用软件，掌握该软件解决概率统计问题的基本操作技能和方法，对所学内容进行数学验证、推理或计算，这将有助于提高学生运用所学知识分析、解决实际问题的能力，并为今后的进一步学习和从事实际工作奠定一定的基础。

本书由胡晶教授担任主编，乔海英、赵凌华、王晓峰担任副主编。各部分编写人员情况是：第 1 章由胡晶、王晓峰编写；第 2 章由胡晶编写；第 3 章由赵凌华编写；第 4 章由胡晶编写；第 5 章、第 6 章由乔海英编写。王晓峰、郝风武、赵怡然为本书的编写提供了许多案例资料。徐兰栓、赵凌华、王晓峰对全部习题及答案进行了审核和校正。全书由胡晶教授统稿。张存桂教授仔细审阅了全部书稿，提出了许多宝贵意见，在此一并表示感谢！

由于编者水平有限，书中疏漏之处在所难免，诚望各位读者给予批评指正。

编者

目 录

第一编 概率论

第二编 数理统计基础

第一编 概率论

引 子

在我们人类赖以生存的这个世界上，自然现象和社会现象是各式各样、五花八门．这些自然现象或社会现象大体可以分为两类．

一类现象是事先可预言的自然现象或社会现象，在一定条件下它必然发生(或必然不发生)．比如，物理实验现象、化学反应现象等．在标准大气压下，水加热到100℃必然沸腾；同性电荷相斥，异性电荷相吸；三条直线满足一定条件必可以围成一个三角形，并且这个三角形有确定的面积可以求出；一个计算机网络上有信息，这类现象称为**必然现象**或**确定性现象**．我们曾经学习过的一元函数微积分和线性代数等都是研究必然现象的数学工具．

另一类现象是事先不能预言的自然现象或社会现象．在一定条件下，它可能发生这样的结果，也可能发生那样的结果，其结果呈现出偶然性．这类现象在日常生活中非常多见．例如，掷一枚均匀的硬币，掷前我们并不能断定它一定出现数字一面（以后称为正面)，还是出现国徽一面(以后称为反面)；每当我们走出学校大门到达第一个十字路口时，遇到的可能是红灯，也可能是绿灯，事先我们也不能确定；同一门大炮向同一目标发射炮弹，尽管经过瞄准，弹着点仍是在目标附近的各个位置上；计算机网络上某网站被访问的次数，某类产品的社会供求数量，某地区环境污染对该地区流行病的影响程度，购买彩票是否中奖，天气预报等，这类现象称为**随机现象**或**偶然现象**．从表面上看，随机现象在个别试验或观察中似乎是不可捉摸的，呈现出不确定性．但人们通过长期的观察和实践发现，随机现象在大量的试验中或重复观察下却呈现出一种特定的规律．例如，多次重复掷一枚均匀的硬币就会发现“正面”出现的频率“接近”$\frac{1}{2}$，而且随着试验次数的增加，这种“接近”的精度会更高．通常称这种规律为**随机现象的统计规律性**．

现如今“机遇”“决策”这些与随机现象有关联的词汇已成为人们的常用的词汇．人们迫切感到了解随机现象规律的重要性．比如，买什么样的彩票中奖的可能性大呢？采用什么样的资源配置可以获得较大的收益和最小的投入？目前贷款投资某个项目能够赚钱吗？买了医疗保险有利吗？等等．要想明白这些问题，需要对概率论的知识有所了解．

概率论产生于17世纪，本来是由保险事业的发展而产生的，但是来自赌博者的请求，却是数学家们思考概率论一些特殊问题的源泉．早在1654年，有一个赌徒梅累向当时的数学家帕斯卡提出一个使他苦恼了很久的问题：“两个赌徒相约赌若干局，谁先赢 m 局就算获胜，全部赌本就归胜者．但是，当其中一个人赢了 $a(a<m)$ 局，另一个人赢了 b

$(b<m)$局的时候，赌博被迫中止．问赌本应当如何分法才合理?”三年后，也就是1657年，荷兰著名的天文学家、物理学家兼数学家惠更斯企图自己解决这一问题，结果写成了《论机会游戏的计算》一书，这就是最早的概率论著作．

近几十年来，概率论已经成为从数量方面研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科．数学工作者已经证明：客观世界中的许多随机现象都具有各自的概率模型，各自服从着不同的概率分布，反映其特征的只是一些重要参数不同而已．随着科技的蓬勃发展，概率论的理论和方法应用几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产、国民经济的各个部门，也与我们的日常生活息息相关．例如，各种彩票的发售，商场、超市的抽奖促销活动，天气预报，可靠性工程，自动控制，等等．许多兴起的应用数学，如信息论、对策论、排队论、控制论等，都是以概率论作为基础的．

概率论与数理统计的内容不仅是重要的数学分支，而且与我们的日常生活和现实工作密切相关．通过本书的学习，让我们揭示随机现象的内在统计规律性．由于我们研究的对象已由必然现象转变为随机现象，其思维方式和解决问题的方法也随之发生了一定的变化．因此，我们在学习上也应当尽快适应这种变化．

第1章

随机事件与概率

本章主要介绍随机事件及其概率，概率的性质及运算法则，古典概型，贝努里试验与二项概型等内容．

学习要求

1. 了解随机事件、频率、概率等概念，掌握随机事件间的关系与运算．
2. 了解概率的统计定义，掌握概率的基本性质．
3. 了解古典概型的条件，会求解较简单的古典概型问题．
4. 熟练掌握概率的加法公式和乘法公式，掌握条件概率和全概公式．
5. 理解事件独立性的概念，了解贝努里试验，掌握二项概型．

§1.1 随机事件

1.1.1 随机试验与随机事件

1. 随机试验

我们要研究随机现象，就需要对“随机现象”进行观测，这种观测过程称为**随机试验**，简称**试验**．

例如，掷一枚均匀的硬币，观察其出现正面、反面的情况；一名射击手进行射击，直到击中目标为止，观察其射击情况，它可能需要射击1次，2次，…；记录某地一昼夜的最高温度(℃)和最低温度(℃)；等等，都是随机试验．

随机试验有以下特点：

(1) 试验可以在相同条件下重复进行.

(2) 每次试验的结果不止一个，而且可以实现能明确的所有可能结果；这些结果可以是有限个，或可数无穷多个①，或任意无穷多个.

(3) 每次试验的结果都是事先不能确定的.

我们通过随机试验来观察随机现象，所关心的是在随机试验中某些试验结果是否出现和出现的可能性的大小. 这将在下面分别予以讨论.

2. 随机事件

在一定条件下，随机试验可能发生也可能不发生的每一个随机试验的结果称为**随机事件**，简称**事件**. 事件通常用大写英文字母 A，B，C，…来表示，所描述的含义通常用大括号表出.

在一个随机试验中，它的每一个可能出现的"单一(即不可再细分)"结果都是一个随机事件，它们是这个随机试验的最简单的随机事件，称为**基本事件**. 由一些"单一"结果组成的随机事件称为**复合事件**. 在一次试验中，如果出现的"单一"结果在某事件 A 中，则称**事件 A 在该次试验中发生了**，简称 **A 发生**；如果"单一"结果不在 A 中，称 **A 没有发生**.

例 1 掷一颗骰子，出现 1 点记为 A_1，出现 2 点记为 A_2，出现 i 点记为 A_i，即

$$A_i=\{出现\ i\ 点\}，i=1，2，3，4，5，6$$

$$A=\{出现偶数点\}，B=\{出现奇数点\}，C=\{出现的点数小于4\}$$

都是在一次试验中可能发生也可能不发生的试验结果，因此，都是随机事件，且 $A_i(i=1,2,3,4,5,6)$ 都是基本事件，A，B，C 都不是基本事件，而是复合事件.

例 2 抛掷两枚硬币. 如果一枚硬币{出现正面朝上}记为 H，{出现反面朝上}记为 T. 那么，做一次试验可能出现下列事件之一：

$$A=\{H\,H\}，B=\{H\,T\}，C=\{T\,T\}，$$

由于没有考虑出现正(反)面的次序，$B=\{H\,T\}=\{T\,H\}$，所以 A，B，C 都是随机事件，且都是基本事件.

例 3 假设公共汽车的始发站每 5 分钟发出一辆汽车，乘客随机沿线某一汽车站乘车，用 t(分钟)表示乘客到达车站后等候汽车的时间，记

$$A=\{0\leqslant t\leqslant 2\}，B=\{0\leqslant t\leqslant 1.5\}，C=\{t=0\}.$$

因为沿线上每一汽车站每 5 分钟就有一辆汽车通过，但乘客到达车站的时间不确定，所以等候的时间在 0～5 分钟之内都有可能发生，因此 A，B，C 都是随机事件.

有两个特殊事件：在一定条件下必然发生的事件称为**必然事件**，用 U 表示；在一定条件下不可能发生的事件称为**不可能事件**，用 $\varnothing$ 表示. 例如，在例 1 中，$D=\{出现点数\leqslant 6\}$ 就是必然事件；$E=\{出现点数>6\}$ 就是不可能事件. 又如：在一个袋子中，有形状、大小相同的 5 个球，其中 3 个白球，2 个红球，从中任取 3 个，$A=\{有白球\}$ 是必然事件，$B=\{有黑球\}$ 是不可能事件. 我们把必然事件和不可能事件都作为特殊的随机事件.

---

① 这里"可数无穷多"是指可以和自然数建立一一对应关系的无穷多.

1.1.2　事件间的关系与运算

研究随机现象往往涉及多个随机事件，有比较简单的，也有比较复杂的．运用事件间的关系和运算，可以用较简单的随机事件来研究较复杂的随机事件的规律性．在中学我们学过集合，事件与集合有相同的内涵，用集合的理论和方法，特别是借助于集合的文氏图进行直观说明，为掌握事件间的关系和运算提供了很多方便．

1. 事件的包含与相等

定义 1　如果事件 A 发生必导致事件 B 发生，那么称**事件 A 包含于事件 B**，或称**事件 B 包含事件 A**，记作 $A\subset B$.

若 $A\subset B$，则事件 A 发生，必有事件 B 发生，如图 1-1-1 所示．

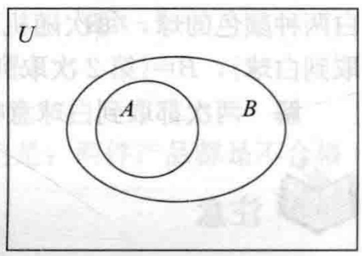

图 1-1-1

若事件 A 包含于事件 B，同时事件 B 又包含于事件 A，则称**事件 A 与 B 相等**(或称等价)，记作 $A=B$.

例 4　掷一颗骰子，记 $A=\{$出现 1 点$\}$，$B=\{$出现点数不超过 3$\}$，$C=\{$出现点数大于 6$\}$，$D=\{$出现偶数点$\}$，指出这些事件之间的关系．

解　由题设可知，若事件 A 发生，即出现 1 点，显然点数不超过 3，所以事件 B 必发生，即 $A\subset B$；由于一颗骰子只有 6 个点，且点数不大于 6，所以 $C=\varnothing$；事件 D 可以写成 $D=\{2,4,6\}$，显然 $D\not\subset A$，$A\not\subset D$.

A，B，C，D 四个事件有关系式 $C\subset A\subset B$，$C\subset D$.

思考题

某种电子元件出厂后，使用寿命为 T(年)．设 $A=\{T\leqslant 20\}$，$B=\{T\leqslant 35\}$，问 A 与 B 的关系如何?

2. 事件的和

定义 2　事件“A 或 B”称为**事件 A 与事件 B 的和**，记作 $A+B$ 或者 $A\cup B$.

若 $A+B$ 发生，即 A 或 B 发生，意味着 A，B 至少有一个发生，如图 1-1-2 阴影部分所示．

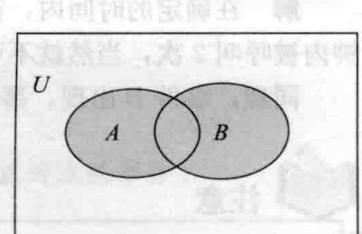

图 1-1-2

例 5　若袋中有大小、形状相同的 2 个白球，3 个红球，随机取出 2 个，设 $A=\{$有 1 个白球$\}$，$B=\{$有 2 个白球$\}$，$A+B=\{$有 1 个白球或有 2 个白球$\}$，因为只取 2 个球，且只有 2 个白球，所以 $A+B=\{$至少有 1 个白球$\}$.

思考题

以直径和长度两项指标衡量某零件是否合格，设 $A=\{$零件直径不合格$\}$，$B=\{$零件长度不合格$\}$，$E=\{$零件不合格$\}$．若规定零件的直径或长度之一不合格就是不合格零件，如何用事件 A，B 表示事件 E ?

3. 事件的积

定义 3 事件“A 且 B”称为**事件 A 与事件 B 的积**，记作 AB 或 $A\cap B$.

“A 且 B”发生意味着事件 A 和 B 都发生，如图 1－1－3 阴影部分所示.

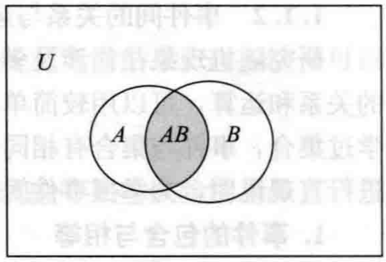

图 1－1－3

例 6 在一个盒子中，有大小、形状相同的 8 个黑、白两种颜色的球，每次随机取出一个球，设 $A=\{$第 1 次取到白球$\}$，$B=\{$第 2 次取到白球$\}$，$C=\{$两次都取到白球$\}$，试用 A，B 表示 C.

解 两次都取到白球意味着第 1 次、第 2 次取到的都是白球，所以 $C=AB$.

注意

事件的和与事件的积的概念可以推广到有限个或无穷多个事件的情形.

4. 互不相容事件

定义 4 如果事件 A 与 B 不能都发生，那么称**事件 A 与 B 互不相容**，或称**事件 A 与 B 互斥**.

事件 A 与 B 互不相容意味着：若事件 A 发生，则事件 B 不会发生；若事件 B 发生，则事件 A 不会发生，即事件 A 与 B 的积事件是不可能事件，即 $AB=\varnothing$，如图 1－1－4 所示.

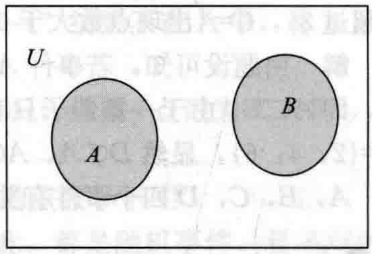

图 1－1－4

例 7 观察某寻呼台在 1 分钟内被呼叫的次数，记 $A=\{$1 分钟内被呼叫 2 次$\}$，$B=\{$1 分钟内被呼叫 5 次$\}$，试问事件 A 与 B 是否互不相容？

解 在确定的时间内，被呼叫的次数只能是唯一的一个数值. 事件 A 出现，即在 1 分钟内被呼叫 2 次，当然就不可能被呼叫 5 次，即事件 A 出现，事件 B 不出现.

同理，事件 B 出现，事件 A 不出现，故事件 A 与 B 互不相容.

注意

对于两个以上事件 A_1，A_2，…，A_n，通常我们考虑这 n 个事件间两两事件互不相容的情况，即

$$A_iA_j=\varnothing,\quad i\neq j,\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

5. 对立事件

定义 5 如果事件 A，B 满足 $AB=\varnothing$，且 $A+B=U$，那么称**事件 A，B 互为对立事件**. 通常用 $\overline{A}$ 表示 A 的对立事件，也称**非 A**.

事件 A 与 $\overline{A}$ 互为对立事件意味着事件 A 与 $\overline{A}$ 二者必有一个且只有一个发生，所以事件 A 与 $\overline{A}$ 满足：

$A\overline{A}=\varnothing$，$A+\overline{A}=U$，

显然 $\overline{\overline{A}}=A$，如图 1－1－5 所示.

例 8　从一批产品中随机抽取两件产品进行检验，记 $A=\{$两件都是合格品$\}$，$B=\{$一件合格品，一件不合格品$\}$，$C=\{$两件都是不合格品$\}$，试分别表述事件 A，B，C 的对立事件，并且确定 A，B，C 的对应关系．

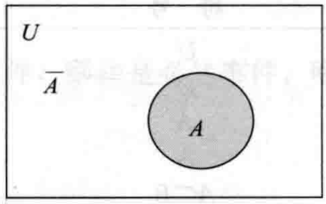

图 1-1-5

解　抽取到的两件产品都是合格品的否定是：两件产品都是不合格品或者两件产品中一件是合格品、一件不是合格品，所以，

$\overline{A}=\{$两件都是不合格品或者一件合格品、一件不合格品$\}$

$=B+C=\{$至少有一件不合格品$\}$；

抽取到的两件产品中一件是合格品、一件不是合格品的否定是：两件产品都是不合格品或者都是合格品，所以，

$\overline{B}=\{$两件都是不合格品或者都是合格品$\}=A+C$；

抽取到的两件产品都是不合格品的否定是：两件产品都是合格品或者两件产品中一件是合格品、一件不是合格品，所以，

$\overline{C}=\{$两件都是合格品或者一件合格品、一件不合格品$\}$

$=A+B=\{$至少有一个合格品$\}$.

注意

两个事件 A，B 相互对立与互不相容是两个不同的概念，前者要求两个等式 $AB=\varnothing$，$A+B=U$ 都成立，后者只要求一个等式 $AB=\varnothing$ 成立．所以，相互对立的事件一定互不相容，而互不相容的事件不一定对立．由例 8 可以看到，事件 A 与 B 互不相容，但 $\overline{A}=B+C\neq B$，B 不是 A 的对立事件．

思考题

请读者再举出一例说明：事件 A 与 B 互不相容，但不是相互对立的事件．

6. 事件的差

定义 6　若事件 A 发生而事件 B 不发生，称这一事件为**事件 A 与 B 的差**，记作 $A-B$ 或 $A\overline{B}$，如图 1-1-6 阴影部分所示．

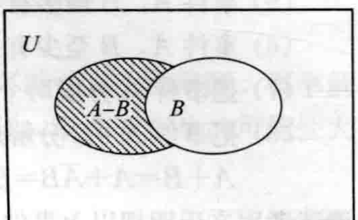

图 1-1-6

例 9　从一批电视机中任取一台测试它的寿命，定义 $A=\{50\leqslant t\leqslant 200\}$，$B=\{t>150\}$，求 AB，$A-B$.

解　$AB=\{50\leqslant t\leqslant 200\}\{t>150\}=\{150<t\leqslant 200\}$，

$A-B=A\overline{B}=\{50\leqslant t\leqslant 200\}\{t\leqslant 150\}=\{50\leqslant t\leqslant 150\}$.

从上面的讨论可以看到，事件间的关系和运算与集合间的关系和运算是一致的．列出表 1-1-1 便于对照．

表 1－1－1　　事件与集合

符　号	事　件	集　合
U	必然事件	全集合
$\varnothing$	不可能事件	空集
A	事件	集合
$\overline{A}$	A 的对立事件	A 的补集
$A\subset B$	事件 A 包含于事件 B	A 为 B 的子集
$A=B$	事件 A 与 B 相等	集合 A 与 B 相等
$A+B$	A 与 B 的和事件	A 与 B 的并集
AB	A 与 B 的积事件	A 与 B 的交集
$A-B$	A 与 B 的差事件	A 与 B 的差集
$AB=\varnothing$	A 与 B 互不相容	A 与 B 不相交

事件与集合具有相同的算律，如表 1－1－2 所示．

表 1－1－2　　事件运算律

运算律 \ 运算	求　和	求　积
交换律	$A+B=B+A$	$AB=BA$
结合律	$A+(B+C)=(A+B)+C$	$(AB)C=A(BC)$
分配律	$A(B+C)=AB+AC$	$A+BC=(A+B)(A+C)$
包含律	$A+B\supset A$，$A+B\supset B$	$AB\subset A$，$AB\subset B$
重叠律	$A+A=A$	$AA=A$
吸收律	$A+U=U$，$A+\varnothing=A$	$AU=A$，$A\varnothing=\varnothing$
对立律	$A+\overline{A}=U$	$A\overline{A}=\varnothing$
摩根律	$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$

由事件间的关系及运算规律归纳出以后常用且重要的一些事件的表达式：

(1) 事件 A，B 至少有一个发生：$A+B$；

(2) 事件 A，B 都发生：AB；

(3) 事件 A，B 恰有一个发生：$A\overline{B}+\overline{A}B$；

(4) 事件 A，B 都不发生：$\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A+B}$；

(5) 事件 A，B 最多有一个发生：$\overline{A}\,\overline{B}+A\overline{B}+\overline{A}B=\overline{B}+\overline{A}B=\overline{A}+A\overline{B}$；

(6) 事件 A，B 至少有一个不发生：$\overline{A}+\overline{B}=\overline{AB}$；

(7) 把事件 A 分成两个互不相容的事件之和：$A=AB+A\overline{B}$；

(8) 把事件 $A+B$ 分解成几部分两两互不相容事件之和：

$$A+B=A+\overline{A}B=B+A\overline{B}=AB+A\overline{B}+\overline{A}B.$$

请读者用文氏图把以上事件表示出来．

本节关键词

随机事件　事件间的包含　事件的和　事件的积　互不相容事件　对立事件