绪论

1. 什么是物理学

古希腊人把所有对自然界的观察和思考，笼统地包含在一门学问里，那就是自然哲学. 科学分化为天文学、力学、物理学、化学、生物学、地质学等只是近几百年的事. 在牛顿的时代里，科学和哲学还没有完全分家，牛顿划时代的著作——《自然哲学的数学原理》就是一个明证. 物理学最直接地关心自然界的最基本的规律，所以牛顿把当时的物理学叫做自然哲学.

什么是物理学？用一句话来概括，物理学是探讨物质结构和运动基本规律的学科. 尽管这个相当广泛的定义仍难以刻画出当代物理学极其丰富的内涵，不过有一点是肯定的，即与其他学科相比，物理学更着重于物质世界普遍而基本的规律的追求. 物理学是研究自然界基本规律的科学，它的英文单词 physics 来源于希腊文，原意是自然，而中文的含义是"物"(物质的结构、性质) 和"理"(物质的运动、变化规律). 中文含义与现代观点颇为吻合，现代观点认为，物理学主要研究物质和运动，或物质世界及其各部分之间的相互作用，或物质的基本组成及它们的相互作用.

物质可以小至微观粒子——分子、原子以至"基本"粒子. 所谓基本粒子，顾名思义是物质的基本组成成分，本身没有结构. 然而与人们的认识水平以及科学技术水平有关，因此，对"基本"的理解具有阶段性. 鉴于此，物理学家简单地称之为"粒子". 有时为了表达认识的层次，我们仍然可以说："现阶段的基本粒子为……". 现在我们认为基本粒子有轻子、夸克、光子和胶子等等，科学家们正在努力寻找自由夸克. 此外，分数电荷、磁单极也在寻找之列. 我们周围的物体是物质的聚集状态. 人们可以用自己的感官感知大多数聚集状态的物质，并称它们为宏观物质以区别前面所说的微观粒子. 居间的尺度是介观，而更大的尺度是宇观. 物质通过场传递相互作用，电磁场和引力场就是例子. 现在知道物质之间的相互作用有四种，即万有引力、弱相互作用、电磁相互作用和强相互作用.

就物理学和其他学科的关系而言，我们可以说物理学是最基本的学科，物理学是最古老、发展最快的学科，物理学提供最多、最基本的科学研究手段. 最基本的体现是，在天文学、地球学、化学、生命

科学中都包含着物理过程或现象.在这些学科中用到不少物理学概念和术语是很自然的.最重要的是,任何理论都不能和物理学的定律相抵触.例如,如果某种理论破坏能量守恒定律,那么,这一理论就很成问题.当然,某些物理理论本身或一些阶段性的工作本身也是在不断地完善之中.

物理学中最重大的基本理论有以下五个方面:一是牛顿力学或经典力学研究物体的机械运动;二是热力学研究温度、热、能量守恒以及熵原理等等;三是电磁学研究电磁以及电磁辐射等等;四是相对论研究高速运动、引力、时间和空间等等;五是量子力学研究微观世界.后两个理论主要是在20世纪发展起来的,是现代物理学的核心.

以上理论中,目前没有一个被完全推翻过,也没有一个是永远正确的.例如,牛顿力学在高速情形下,应该用狭义相对论来代替;而对于强引力,它又偏离于广义相对论,但在它的适用范围内仍然是精确的.科学的理论总是要发展的,需要根据新发现的事实进行修正.在教科书中只介绍一种版本的做法很可能导致"理论是唯一的"这样的观念.事实上,理论绝不是唯一的.科学理论往往在美学上令人赏心悦目,在数学上优雅而普适,但是仅仅有这些是绝不可能流传下来的.理论和思想必须经受实验的检验和验证.物理学中的理论和实验在相互促进和丰富中得到发展.

通常的科学研究方法一般有以下几点:一是通过观测、实验、计算机模拟得到事实和数据;二是用已知的、可用的原理分析这些事实和数据;三是形成假说和理论以解释事实;四是预言新的事实和结果;五是用新的事例修改和更新理论.

在大学物理的学习中,除了学习定理、定律、物理方程和解题技巧外,还必须努力从整体上掌握物理学,要了解各分支间的相互联系.现代观点认为,应该从整体上逻辑地、协调地把握物理学.学习中,对于基本物理定律的优美、简洁、和谐以及辉煌应该有所体会,要学会鉴赏其普适程度,了解其适用范围.还要学会区别理论和应用,物理思想和数学工具,一般规律和特殊事实,主要和次要效应,传统的和现代的推理方法等等.学习物理要做到以下几点.① 须重视物理概念.因为它是构成物理学大厦的骨架,应该说,概念、物理量与基本规律是不可分的;或者说,借助概念、物理量才能描述物质的运动规律.反之,通过运动规律才能对相关的物理量有更深刻的理解.② 须重视数学手段的运用.物理学的规律无论简繁,最终是用数学形式给出相关物理量间的关系.有些定律只有通过数学的分析才能认识其本质.③ 须把物理概念、物理定律和数学手段三位一体地结合起来进行学习.

2. 物理学中的近似

在作近似的时候,我们常常要先进行比较.只有同量纲的量才

能比较它们的大小.如果两个量 $f(x)$、$g(x)$ 随 x 变化(x 为自变量,为了比较方便,可以随意地把相关物理量中的一些量作为函数,另一些量作为自变量,这与其中的因果毫无关系).变化时有如下关系

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=C,\quad 0<|C|<\infty$$

当 x 趋向 a 时,$f(x)$、$g(x)$ 具有相同的数量级,写作

$$f(x)=o(g(x))$$

例如:

$$3x^2+5x^4=\begin{cases}o(x^2), & x\to 0\\ o(x^4), & x\to\infty\end{cases}$$

通常我们采用比例 10 作为 1 个量级.当 a 比 b 小两个量级以上时,我们说 $a\ll b$.当一个物理量减小到原来的 $1/e$ 时,其变化当然是较明显的.从这个意义上来说,有 $e^{-1}\ll 1$.就数学的严密性而言,这当然是不满足的.这里,我们可以只将其看作"有了明显变化"的同义语.如果

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

我们说当 x 趋向 a 时,$f(x)$ 是 $g(x)$ 的无限小量,并记作 $f(x)=o(g(x))$.

在绝大多数情况下,为了简化问题,常常丢掉无限小量或者最多只保留它的一次幂.对于非线性系统,问题对初值十分敏感.有时候初值的极其微小的差异会导致令人难以置信的差别.在天气系统中,所谓的"蝴蝶效应"就是指:一只蝴蝶在北京拍动一下翅膀引起的空气扰动,也许会导致下个月纽约的一场暴风雨发生改变.

利用级数展开可以用来求极限、估计量级或分离不同量级的量.这里只提其中的一种展开方式 —— 泰勒级数.

$f(x_0+x)=f(x_0)+f'(x_0)x+\dfrac{1}{2!}f''(x_0)x^2+\cdots$ ($|x|$ 小于 f 的收敛半径),最常用的函数的泰勒级数展开式为

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots,\quad x<1$$

$$(1+x)^q=1+qx+\frac{1}{2!}q(q-1)x^2+\cdots,\quad x<1$$

笼统地认为近似不如严格解的观点是不可取的.正确地、巧妙地运用近似,是有经验的科学工作者的基本技能.有时候,我们似乎能严格地解一些问题,实际上,这可能包含着更根本的近似 —— 模型近似.所有的理论模型都是近似的,它只把最主要的效应考虑在内.例如,在粒子物理学中,重力一般都不考虑.又如,当我们用一个统一的重力加速度的时候,实际上已假定了地球是一个均匀的圆球.此外,当我们用库仑定律

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}$$

来计算两个电荷之间的作用力时，电荷的尺寸必须比其间距小得多. 也就是说，要把它们看作点电荷，该公式才适用，否则就要计及它们的大小.

3. 矢量代数初步

1）矢量及其解析表示

在力学和物理学中常常遇到两种不同性质的量：标量和矢量. 仅用数值即可作出充分描述的量叫作标量. 这里，数值的含义包含正负在内. 路程、质量、时间、电量、电压、能量等物理量都是标量. 具有一定大小和方向且加法遵循平行四边形法则的量叫作矢量. 力、速度、加速度、电场强度和磁感应强度等均为矢量. 实际上，矢量概念正是由于研究物理问题的需要而产生出来的.

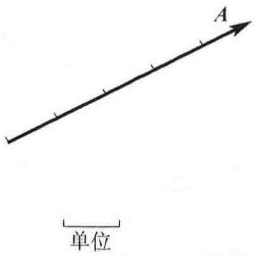


图 1　矢量的几何表示

从几何的观点看，矢量可以表示成有方向的线段（见图 1），在选定单位后，线段的长短即矢量的大小，箭头方向表示矢量的方向. 矢量起点称为矢尾，箭头处称为矢端. 书写时常以 $\vec{A}$ 表示矢量. 矢量的印刷符号常用黑体字母 $\boldsymbol{A}$ 表示.

矢量 $\boldsymbol{A}$ 的大小称作矢量 $\boldsymbol{A}$ 的模，即有向线段的长度，它是一正实数，记作 $|\boldsymbol{A}|$ 或 A. 模等于 1 的矢量称作单位矢量. 在直角坐标系中，沿 x、y、z 轴的单位矢量分别记作 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$. 模等于零的矢量称作零矢量，其方向可认为是任意的，记作 $\boldsymbol{0}$ 或者 $\vec{0}$，为简便起见，一般写成普通的 0.

若矢量 $\boldsymbol{A}$ 和矢量 $\boldsymbol{B}$ 的大小相等方向相同，则称此二矢量相等，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$. 矢量和标量属于不同的范畴，一般不直接进行比较.

矢量分析是研究电磁场和其他物理场必不可少的数学工具，它包括矢量代数、正交坐标系以及场函数的微积分运算等内容. 用直角坐标系来描述空间和矢量是最基本的方法. n 维的直角坐标系有 n 个相互垂直的坐标轴. 我们先从二维空间说起.

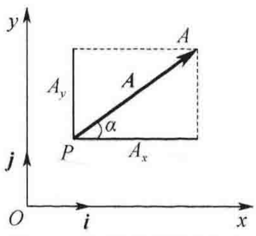


图 2　矢量在平面直角坐标系中的表示

如图 2 所示，在平面上取二维直角坐标系 xOy，在平面上存在矢量 $\overrightarrow{PA}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}$ 与 x 轴的夹角为 α，则它在 x、y 轴上的投影分别为 $A_x=A\cos\alpha$，$A_y=A\sin\alpha$，A_x 和 A_y 分别称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 的 x 分量和 y 分量. 应注意，一个矢量的分量是代数量，即其值是可正可负的. 分别沿坐标轴 Ox 和 Oy 取单位矢量 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$（见图 2），则有

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j} \tag{1}$$

这里 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 称为坐标系的基矢. 当坐标系及其基矢选定后，数列 (A_x, A_y) 可以把矢量 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征确定下来，所以我们也可以说矢量是个按一定顺序排列的数列，如数列 (2,1) 代表 $A_x=2$，$A_y=1$ 的矢量，数列 $(0,-5)$ 代表 $A_x=0$，$A_y=-5$ 的矢量. 矢量大小的平方等于它的分量的平方和，即

$$\boldsymbol{A}^2=A_x{}^2+A_y{}^2 \tag{2}$$

图 3 为三维空间里的直角坐标系，这里有三个相互垂直的坐标轴 x、y、z，空间向量 $\overrightarrow{PB}=\boldsymbol{A}$，方向与 x、y、z 轴的夹角分别为 α、β、γ，则它在 x、y、z 轴上的投影分别为 $A_x = A\cos\alpha$，$A_y = A\cos\beta$，$A_z = A\cos\gamma$，这里 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 的方向余弦. 方向余弦满足下列恒等式

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \equiv 1 \tag{3}$$

其中，三个数中只有两个是独立的，它们把矢量的方向唯一地确定下来.

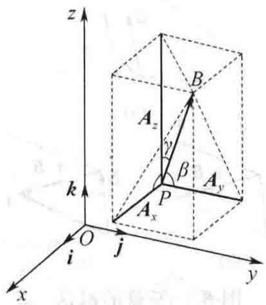


图 3 矢量在直角坐标系中的表示

通常用 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 来代表三维直角坐标系的基矢. 在三维的情况下，正交基矢有左手和右手两种系统. 设想基矢 $\boldsymbol{i}$ 沿小于 180° 的角度转向基矢 $\boldsymbol{j}$（见图 4），将右手的四指弯曲，代表旋转方向，则伸直的拇指指向基矢 $\boldsymbol{k}$. 由此得到的正交基矢系统称为右手系统. 按照国际惯例，一律采用右手系统.

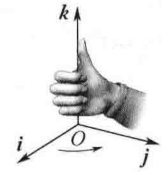


图 4 右手系

有了正交基矢，矢量可以写成解析形式

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k} \tag{4}$$

三维的矢量要用长度为 3 的数列（A_x，A_y，A_z）来表示，如（1，3，0）、（−2，0，−1）等. 与二维的情况类似，我们有

$$A^2 = A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2 \tag{5}$$

2）矢量的加减法

从上面我们看到，一个 n 维的矢量可看成是一个长度为 n 的有序数列（$\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$，…，$\boldsymbol{A}_n$）. 从这种意义上说，标量是一维的矢量. 把标量的加减运算推广到矢量，我们有

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n)\pm(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_n)\\ =\;&(\boldsymbol{A}_1\pm\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{A}_2\pm\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n\pm\boldsymbol{B}_n)\end{aligned} \tag{6}$$

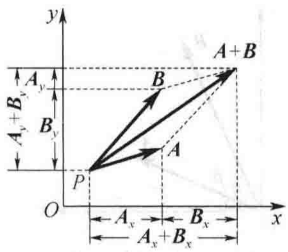
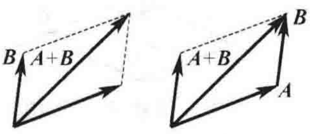


图 5 矢量的叠加图

从图 5 不难看出，上述运算（解析运算）与通常矢量合成的平行四边形法则（几何运算）是一致的（请读者自行证明）.

用几何法运算矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的叠加，可利用如图 6(a) 所示的平行四边形，也可利用如图 6(b) 所示的与之等价的三角形. 后一种图示对于两个以上矢量的合成特别方便，因为我们只需把它们首尾衔接起来就行了（见图 7）. 在一个矢量前面加负号，表示一个与它大小相等、方向相反的矢量[见图 8(a)]. 矢量之差 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 可理解为矢量 $\boldsymbol{A}$ 与矢量 $-\boldsymbol{B}$ 的合成 $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$[见图 8(b)]，它也可利用 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 组成的另一种方式组合成的三角形来表示[见图 8(c)].



(a) (b)

图 6 矢量的叠加的平行四边形法则

从矢量加减的解析表达(6)式可看出，它们是符合交换律和组合律的.

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\ (\text{交换律}) \tag{7}$$

$$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}\ (\text{组合律}) \tag{8}$$

用几何运算法来验证上述法则，也不算太困难，特别是利用三角形来表示.

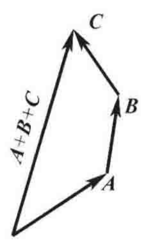


图 7 多个矢量的合成

并不是所有带有方向的物理量都服从上述叠加法则的（如大角

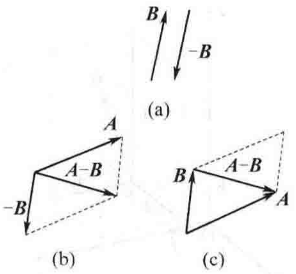


图 8 矢量的减法

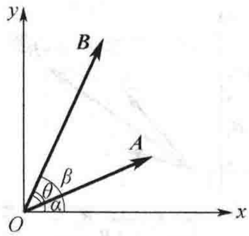


图 9 矢量的标积

度的角位移),不符合这些法则的物理量不是矢量.

3) 矢量的标积

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是两个任意矢量,它们的标积(常用 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 表示,故又称点乘)的解析定义为

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \tag{9}$$

由此定义不难看出,点乘是服从交换律和分配律的,即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}\ (\text{交换律}) \tag{10}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}\ (\text{分配律}) \tag{11}$$

下面看点乘的几何意义.把 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 两矢量的起点 O 叠在一起,二者决定一个平面,在此平面上取直角坐标系 xOy,从而 $A_z=B_z=0$.令 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 与 x 轴的夹角分别为 α、β(见图 9),则 $A_x=A\cos\alpha, A_y=A\sin\alpha$,$B_x=B\cos\beta, B_y=B\sin\beta$,标积

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}&=A_xB_x+A_yB_y=AB(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\\&=AB\cos(\beta-\alpha)\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\theta \tag{12}$$

式中 $\theta=\beta-\alpha$ 为两矢量之间的夹角.

(12) 式可看作是标积的几何定义.从这个定义可得出:$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 平行时,$\theta=0$,标积 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB$;$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 反平行时,$\theta=\pi$,标积 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=-AB$;$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 垂直时,$\theta=\pi/2$,标积 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$.一般来说,$\theta$ 为锐角时,标积取正值;θ 为钝角时,标积取负值.矢量 $\boldsymbol{A}$ 与自身的标积 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=A^2$.

在物理学中,标积的典型例子是功.

4) 矢量的矢积

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是两个任意矢量,它们的矢积(常用 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 表示,故又称叉乘)的解析定义为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}&=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{k}\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\A_x&A_y&A_z\\B_x&B_y&B_z\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{13}$$

由此定义不难看出,叉乘是服从反交换律和分配律的,即

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}\ (\text{反交换律}) \tag{14}$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}\ (\text{分配律}) \tag{15}$$

下面看叉乘的几何意义.同前,把 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 两矢量的起点 O 叠在一起,二者决定一个平面,在此平面上取直角坐标系 xOy,从而 $A_z=B_z=0$.令 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 与 x 轴的夹角分别为 α、β,则 $A_x=A\cos\alpha, A_y=A\sin\alpha, B_x=B\cos\beta, B_y=B\sin\beta$,矢积

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{k}=AB(\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta)\boldsymbol{k}=AB\sin(\beta-\alpha)\boldsymbol{k}$$

即

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = AB\sin\theta\,\boldsymbol{k} = \boldsymbol{C} \tag{16}$$

式中 $\theta=\beta-\alpha$ 为两矢量之间的夹角. 当 $\beta>\alpha$ 时, $\theta>0$, $\boldsymbol{C}$ 沿 $\boldsymbol{k}$ 的正方向;当 $\beta<\alpha$ 时, $\theta<0$, $\boldsymbol{C}$ 沿 $\boldsymbol{k}$ 的负方向. 由于我们采用的是右手坐标系, $\boldsymbol{C}$ 的指向可用如图 10(a) 所示的右手法则来判断:设想矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿小于 180° 的角度转向矢量 $\boldsymbol{B}$,将右手的四指弯曲,代表旋转方向,则伸直的拇指指向它们的矢积 $\boldsymbol{C}$.

(16) 式可看作是矢积的几何意义,即矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的矢积 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 的数值 $C=AB\sin\theta$,正好是由 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为边组成的平行四边形的面积[见图 10(b)];$\boldsymbol{C}$ 的方向与 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 组成的平面垂直,其指向由右手法则来确定. 从这个定义可得出:$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 平行或反平行时,$\theta=0$ 或 π 时,矢积 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=0$;$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 垂直时,$\theta=\pi/2$,矢积的数值 $C=|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=AB$ 为最大值. 矢量 $\boldsymbol{A}$ 与自身的矢积 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}=0$.

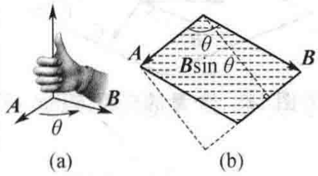


图 10　矢量的矢积

在物理学中,矢积的典型例子有角动量、力矩等.

5) 矢量的三重积

物理学中经常遇到矢量的三重积. 最常见的三重积有以下两个.

(1) 三重标积 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$

三重积 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 是个标量,此三重积的解析表达式为

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \tag{17}$$

从几何上看,因 $|\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}|$ 是以 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 为边组成的平行四边形的面积,矢积 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ 的方向沿其法线,故而再与 $\boldsymbol{A}$ 点乘,相当于再乘上 $\boldsymbol{A}$ 在法线上的投影,亦即,该三重积的绝对值等于以 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 三矢量为棱组成的平行六面体的体积(见图 11),其正负号与三矢量的循环次序有关. 由于计算平行六面体的体积与取哪一面为底无关,点乘又是可交换的,所以 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 三矢量的轮换,以及 · 和 × 的位置对调,都不影响此三重积的计算结果. 唯一要注意的是三矢量的循环次序不能变,否则,变换一次加一个负号. 概括起来写成公式,我们有

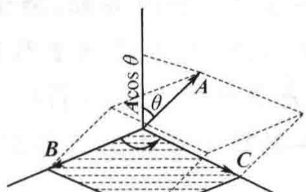


图 11　矢量的三重标积

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) &= \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \\ &= (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B} \\ &= -\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}) = -\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}) \\ &= -(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{B} = -(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{A} = -(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{C}\end{aligned} \tag{18}$$

从解析表达(17) 式来看(18) 式的成立,就更显然了.

注意:在 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 三个矢量中,有任意两个平行或反平行时,三

重标积为 0.

(2) 三重矢积 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$

三重积 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 是个矢量.矢积 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 组成的平面Ⅱ垂直(见图 12),而 $\boldsymbol{A}$ 与它的矢积又回到Ⅱ平面内,故矢量 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 与 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 共面.从而 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 是 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 的线性组合,即 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=a_1\boldsymbol{B}+a_2\boldsymbol{C}$.用矢量的解析表达式可以直接验证:$a_1=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$,$a_2=-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$.亦即存在

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \tag{19}$$

这是该三重积最重要的等式.

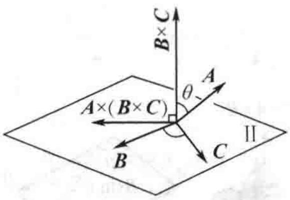


图 12 矢量的三重矢积

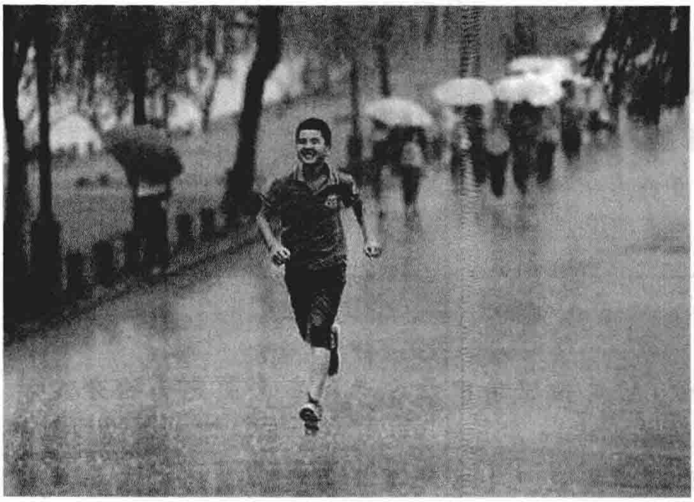
力　学　篇

力学是物理学的重要组成部分，它是物理学中最古老和发展最完美的分支学科，也是众多工程技术问题的理论基础.

力学起源于公元前4世纪古希腊学者亚里士多德关于力生运动的观点和我国《墨经》中关于杠杆原理的论述等，至今已有两千多年的发展历史，然而，其成为一门科学理论却只有三百多年的时间.17世纪，伽利略论述了惯性运动，继而牛顿又提出了三大运动定律和万有引力定律，并成功地预言了海王星的存在，使力学理论的发展达到了前所未有的水平.以牛顿三大运动定律为基础的力学常称之为牛顿力学，也叫经典力学.经典力学有严谨的理论体系和完备的研究方法，如观察现象，分析和综合实验结果，建立物理模型，应用数学表述，作出推论和预言以及用实践检验和校正结果等.因此，它曾被人们誉为完美、普遍的理论而兴盛了约三百年.

经典力学主要研究宏观物体机械运动的规律.所谓机械运动是指物体与物体之间、物体各部分之间相对位置随时间的变化.机械运动是物质最简单、最基本的运动形式，几乎所有的物质运动都包含机械运动的成分.进入20世纪，随着相对论和量子力学的诞生，人们发现经典力学在高速运动和微观领域存在严重的局限性，但经典力学所形成的研究方法、概念和原理在相对论和量子力学中仍得到了延续和发展.目前，在一般技术领域，如机械制造、土木建筑、水利设施、航空航天技术等工程技术中，经典力学仍然是其他学科无可替代的重要的基础理论.

本篇主要介绍经典力学，包括质点运动学、质点(系)动力学、刚体力学基础、机械振动和机械波.全篇内容以牛顿运动定律为基础，以动量、能量、角动量的三个基本定理和相应的守恒定律为核心，重点讨论质点运动的描述，质点之间的相互作用和运动规律，刚体绕定轴的转动规律，简谐振动的特征及描述方法以及平面简谐波的传播规律.



在一个无风的下雨天，一个学生忘记带雨伞但又必须在雨中行走，在这种情况下，她应该走还是跑，才能尽可能的少淋雨？

第1章 质点运动学

自然界中，一切物质都处在永不停息的运动中，运动是物质的基本属性，这种运动的普遍性和永恒性称为运动的**绝对性**. 而运动的形式又是多种多样、千变万化的，其中最简单、最普遍而又最基本的一种运动形式是一个物体在空间相对于另一物体的位置（或者是物体的某一部分相对于其他部分的位置）随时间而变化的运动，这种运动称为**机械运动**. 描述一个物体的运动情况与观察者的相对位置息息相关，例如轮船开动与否，船上的观察者与岸上的观察者得出的结论是不同的，这就是运动描述的**相对性**. 对被研究的运动对象而言，力学可分为质点力学和刚体力学. 对研究对象的运动做出描述，这就是**运动学**.

运动学中，相当一部分概念和公式在中学物理课程中都已学过，本章重提不是简单的重复，而是更科学、更严格、更全面也更系统化了，特别是在数学概念和运算方面，如矢量、微分、积分等，它们是我们理解和掌握本章基本概念必备的数学基础，初学者应特别注意这一点.

本章首先定义描述质点运动的物理量，如位置矢量、位移、速度和加速度等，进而讨论这些量随时间变化的关系，然后以圆周运动为例讨论曲线运动的描述，最后介绍相对运动以及相对运动中的速度叠加原理.

1.1 质点 物理模型 参照系 坐标系

1.1.1 质点

任何一个真实物体都有一定的形状和大小.如果物体的形状和大小对所研究的问题影响不大,或可以忽略,这时可将物体抽象为一个只有质量而无形状和大小的几何点,这样的点称之为**质点**.多个质点的集合称之为**质点系**.显然,质点是实际物体抽象出来的一个理想模型.

一个真实物体能否被视为质点的关键不在于物体本身的形状和绝对大小,而决定于所研究问题的性质.只有当物体的形状和大小对所研究的问题影响不大,或可以忽略时,该真实物体在该研究目的下才能视为质点.例如,地球的半径约为 6 370 m,可谓一个庞然大物!但在研究其公转时,仍可将其视为质点.这是因为地球的直径仅为日地距离的万分之一,地球上的各点相对于太阳的运动差别不大,所以可把地球当作质点.相比之下,分子和原子直径的数量级为 10^{-10} m,是一个很小很小的物体!但在研究它们的自转时仍不能将其视为质点.因为在这种情况下,如果把它们视为质点,我们就无法达到研究的目的.同一物体往往在某一研究目的下能视为质点,在另一研究目的下却不能视为质点.如讨论地球的公转和自转时,就会出现这种情况.前者可视为质点,而后者却不能视为质点.

如果物体在所研究的问题中不能抽象为质点时,我们总可以将该物体划分成许多个线度足够小的质量元,使其中任意一个质量元都满足抽象为质点的条件,而整个物体则可视为一个质点系.因此,研究质点的运动规律是研究实际物体运动的基础,有重要的意义.

1.1.2 物理模型

物质世界是错综复杂、丰富多彩的.在物理学中,为了突出研究对象的主要性质,通常需要将实际问题抽象为一个既满足所研究问题的基本需要,又方便数学描述的**物理模型**.通过对物理模型的研究,揭示出自然界的本质规律,这是物理学的一种重要的研究方法.显然,质点是实际物体抽象出来的一个物理模型,它在客观世界中是不存在的.但是,它在突出主要矛盾的前提下,使实际问题得到了简化,有利于我们了解实际物体运动的本质属性.在后续章节中,我们还会陆续接触刚体、谐振子及理想弹性介质等物理模型.

1.1.3 参照系

运动是物质的存在形式，是物质的固有属性，具有绝对性. 然而，运动的描述却是相对的. 因此，在确定研究对象的位置时，必须事先选定一个标准物体（或相对静止的若干个物体组成的物体群）作为基准. 通常我们把选定的物体或物体群叫作**参照物**或**参照系**.

物体的运动情况与参照系的选择密切相关. 例如，我国发射载人飞船时，飞船中的宇航员被固定在驾驶座上，若选飞船为参照系，宇航员处于静止状态；若选地面为参照系，则宇航员和飞船一起高速飞向太空；若选太阳或其他星体为参照系，则宇航员的运动描述将更为复杂. 可见，同一物体机械运动的描述随参照系选择的不同而发生变化，这就是机械运动描述的相对性. 因此，但凡讨论一个物体的运动，首先指出所选定的参照系是非常必要的.

在运动学中，参照系的选择无任何限制，但通常以讨论问题的方便为前提. 在大多数情况下，研究地球上物体的运动，以地球为参照系最为方便（以后如不作特别说明，研究地面上物体的运动，都是以地球为参照系）.

在后续章节中，物理定律中用的一些物理量必须是对同一参照系而言的，所以处理问题时，一定要明确各物体运动所选择的参照系，各物理量必须统一到同一个参照系才能求解有关问题.

1.1.4 坐标系

选定参照系后，还只能对物体的机械运动作定性的描述. 要想定量地描述物体的运动，就必须在参照系上建立适当的坐标系. 在力学中最常用的是直角坐标系，另外，还有自然坐标系、平面极坐标系、球面坐标系和柱面坐标系等. 在具体应用中，究竟采用何种坐标系应以分析问题的方便而定. 值得特别注意的是，虽然坐标系与参照系有联系，但两者不能混同. 参照系是实物，而坐标系只是参照系的数学抽象.

1.2 位置矢量　位移　速度　加速度

1.2.1 位置矢量

为了定量研究质点的运动，我们有必要对质点的位置作定量的描述. 为此，我们引入位置矢量的概念. **位置矢量是描述某一时刻质**

点所在空间位置的物理量. 具体的讲，在选好的参照系上建立如图 1－1 所示的直角坐标系，设某一时刻质点位于 P 点，其位置可用从坐标原点 O 引向点 P 的有向线段 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$ 表示，$\boldsymbol{r}$ 称为该时刻质点的**位置矢量**，简称**位矢**.

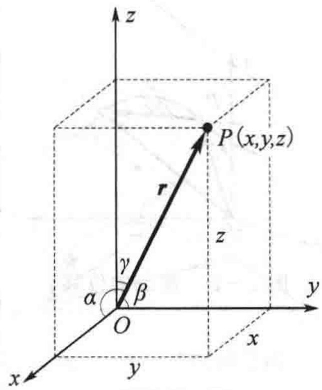


图 1－1　位置矢量

质点运动时，其位矢 $\boldsymbol{r}$ 随时间而变，也就是说，位矢 $\boldsymbol{r}$ 是时间 t 的函数为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{1.1}$$

这个函数描述了质点空间位置随时间变化的过程，称之为运动方程.

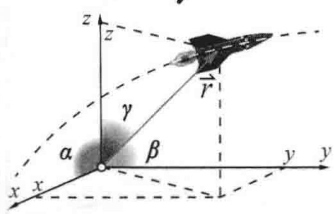
在直角坐标系中，位矢可用分量表示为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{1.2}$$

或

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \tag{1.3}$$

上式中，x、y、z 分别代表位矢 $\boldsymbol{r}$ 在 x、y、z 三个坐标轴上的投影，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别代表沿 x、y、z 三个坐标轴正方向上的**单位矢量**. 由位矢的三个分量可以求出位矢的大小(模) 以及表示方向的**方向余弦**.



质点运动的描述

位矢的大小为

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{1.4}$$

位矢的方向余弦：

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\quad \cos\beta=\frac{y}{r},\quad \cos\gamma=\frac{z}{r} \tag{1.5}$$

在国际单位制 SI 中(本书除有特别声明外，所用单位均采用 SI 制)，位矢大小的单位为米(m).

质点运动的空间轨迹(径迹) 称为轨道，由(1.3) 式消去参量 t 得质点的**轨道方程**

$$F(x,y,z)=0 \tag{1.6}$$

质点运动的轨迹若为直线称为直线运动，若为曲线则称为曲线运动. 例如，已知质点的运动方程为

$$x=3\cos\frac{\pi}{6}t,\quad y=3\sin\frac{\pi}{6}t,\quad z=0$$

消去 t 得轨道方程为

$$x^2+y^2=9,\quad z=0$$

它表示质点在 x、y 平面内作以原点为圆心、半径为 3 m 的圆周运动(曲线运动).

1.2.2　位移

位移是描述质点位置变化的物理量. 如图 1－2 所示，设 t_1 时刻质点位于 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 点，其位矢为 $\boldsymbol{r}_1$；t_2 时刻质点位于 $P_2(x_2,$

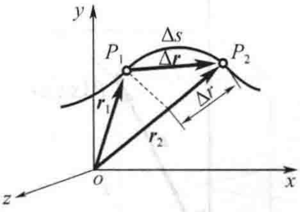


图 1-2 质点的位移

位移方向演示

y_2, z_2) 点,其位矢为 $\boldsymbol{r}_2$. 从 P_1 点引向 P_2 点的有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 称为质点在 $\Delta t = t_2 - t_1$ 时间内发生的**位移**,用 $\Delta\boldsymbol{r}$ 表示. 在直角坐标系中,位移的分量表达式为

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k} \tag{1.7}$$

其大小为

$$|\Delta\boldsymbol{r}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{1.8}$$

其方向为从 P_1 点指向 P_2 点.

当 $\Delta t \to 0$ 时,位移矢量的微分表达式

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\boldsymbol{k} \tag{1.9}$$

应特别注意的是,**位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 与路程 Δs** 是两个不同的概念!位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 是矢量,反映质点 Δt 内位置的变化;而路程 Δs 是标量,它代表质点在 Δt 内所走过的路径的长度. 一般情况下,位移的大小也并不等于路程,只有质点作单方向的直线运动时,$|\Delta\boldsymbol{r}| = \Delta s$,或 $\Delta t \to 0$ 时,$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \mathrm{d}s$. 还需注意,$\Delta r$ 与 $\Delta\boldsymbol{r}$ 也不同. 在图 1-2 中,$\Delta r = |\boldsymbol{r}_2| - |\boldsymbol{r}_1|$ 表示两个位矢模的增量,与位移和路程没有直接的关系,而 $|\Delta\boldsymbol{r}|$ 表示位矢增量的模,在有心力场做功中将用到.

1.2.3 速度

速度是描述质点位置变化快慢及方向的物理量. 在经典力学中,质点的运动状态由位矢和速度两个物理量描述. 只有这两个物理量同时被确定时,质点的运动状态才被确定.

设质点在 Δt 时间内发生的位移为 $\Delta\boldsymbol{r}$,则 $\Delta\boldsymbol{r}$ 与 Δt 的比值称为质点在该段时间内的**平均速度**,即

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1.10}$$

平均速度只能粗略地描述质点的运动情况. 因为在 Δt 时间内,质点运动可以时快时慢,方向也可以发生改变. 然而,随着时间间隔 Δt 的缩短,平均速度对质点运动的描述就越细致. 如果使 Δt 趋近于零,那么平均速度的极限就能精确地描写质点在时刻 t 运动的快慢和方向. 因此,我们把 Δt 趋近于零时平均速度的极限定义为在时刻 t 的**瞬时速度**,简称**速度**,即

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1.11}$$

显然,质点在某时刻的瞬时速度等于该时刻位矢对时间的一阶导数.

速度 $\boldsymbol{v}$ 是矢量,速度的大小 v 称为速率,速率描述了质点在 t 时刻运动的快慢. 由于 $\Delta t \to 0$ 时 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \mathrm{d}s$,所以

$$v = |\boldsymbol{v}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{\Delta t} = \frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1.12}$$

速度的方向是 Δt 趋近于零时,位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的极限方向. 参看图 1-3,$\Delta\boldsymbol{r}$

沿割线$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向，当$\Delta t\to 0$时，$\overrightarrow{P_1P_2}$趋于P_1点的切线. 所以速度的方向是沿着运动轨迹上质点所在处的切线并指向质点前进的方向.

在直角坐标系中，速度的分量表达式为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}\tag{1.13}$$

式中$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，$v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$分别是速度$v$在$x$、$y$、$z$三个坐标轴上的投影，即速度在各坐标轴上的投影值等于各相应位置坐标对时间的一阶导数.

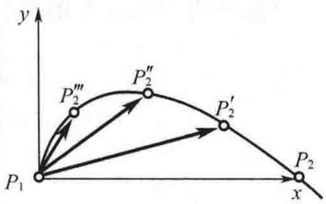


图 1－3　速度的方向

速度的大小为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\tag{1.14}$$

方向由三个方向余弦确定，即

$$\cos\alpha=\frac{v_x}{v},\quad \cos\beta=\frac{v_y}{v},\quad \cos\gamma=\frac{v_z}{v}\tag{1.15}$$

在 SI 中，速度和速率的单位均为米每秒($\mathrm{m\cdot s^{-1}}$)

1.2.4　加速度

在一般情况下，质点运动速度的大小或方向都是随时间变化的. 为了描述速度改变的快慢和方向，引入加速度矢量.

如图 1－4 所示，在t_1时刻，质点位于P_1处，速度为$\boldsymbol{v}_1$；t_2时刻，质点位于P_2处，速度为$\boldsymbol{v}_2$；在$\Delta t=t_2-t_1$时间内，质点的速度增量为$\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1$，比值$\Delta\boldsymbol{v}/\Delta t$反映了在时间$\Delta t$内质点速度的平均变化情况，称为**平均加速度**，即

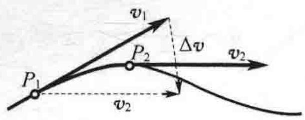


图 1－4　速度的增量

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1}{\Delta t}\tag{1.16}$$

$\bar{\boldsymbol{a}}$的方向与$\Delta\boldsymbol{v}$一致. 平均加速度只能反映速度在某一段时间内的平均变化情况. 只有当$\Delta t\to 0$时，比值$\Delta\boldsymbol{v}/\Delta t$的极限才能精确地反映出质点在某一时刻(或某一位置)速度的变化情况. 这一极限值称为**瞬时加速度**，简称**加速度**，以$\boldsymbol{a}$表示，即

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\tag{1.17}$$

可见，质点的加速度等于速度对时间的一阶导数，或位矢对时间的二阶导数.

在直角坐标系中，加速度的分量表达式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\\&=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}\\&=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\end{aligned}\tag{1.18}$$

式中,$a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$,$a_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}$,$a_z=\frac{dv_z}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2}$,分别为加速度 $\boldsymbol{a}$ 在 x,y,z 三个坐标轴上的投影.

加速度的大小为

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2} \tag{1.19}$$

方向由三个方向余弦来确定,即

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{a},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{a},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{a} \tag{1.20}$$

以上介绍了描述质点运动的物理量:位置矢量 $\boldsymbol{r}$、位移 $\Delta\boldsymbol{r}$、速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$. 我们应注意这些物理量的相关特性:

① **矢量性**:这几个物理量都是矢量,具有大小和方向,遵从矢量相加的平行四边形法则.

② **相对性**:这几个量都与参照系的选择有关,在不同参照系中,对同一质点的运动,$\boldsymbol{r}$、$\Delta\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 可以不同.

③ **瞬时性**:$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$ 都表明质点在运动中某一时刻或某一位置的物理量,具有瞬时性.

1.2.5 质点运动学的两类基本问题

在质点运动学中,主要有以下两种类型的运动学问题:

(1) 已知运动学方程,求速度和加速度

这类问题只需按公式 $\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ 和 $\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$,将已知的 $\boldsymbol{r}(t)$ 函数对时间 t 求导数即可求解,这类问题称为**微分问题**.

(2) 已知速度求运动学方程,或已知加速度求速度和运动学方程

这类问题应根据初始条件(初始时刻质点的位置、速度),通过积分法求解,这类问题称为**积分问题**. 下面将用具体实例来说明以上两类问题的求解方法.

例 1-1

一质点在 xOy 平面内运动,运动方程为 $x=2t$,$y=19-2t^2$.

(1) 写出质点任意时刻的位置矢量 $\boldsymbol{r}$,速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 和加速度矢量 $\boldsymbol{a}$;

(2) 写出轨道方程;

(3) 什么时刻,质点的位置矢量和速度矢量恰好垂直.

解 (1) 根据质点的运动方程可知

$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=2t\boldsymbol{i}+(19-2t^2)\boldsymbol{j}$

质点的速度为

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=2\boldsymbol{i}-4t\boldsymbol{j}$$

质点的加速度为

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=-4\boldsymbol{j}$$

(2) 因为

$$x=2t,y=19-2t^2$$

消去参数 t，得其轨道方程为

$$y = 19 - 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 19 - \frac{x^2}{2}$$

(3) 要使质点的位置矢量和速度矢量恰好垂直需满足 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} = 0$，即

$$[2t\boldsymbol{j} + (19 - 2t^2)\boldsymbol{j}]\cdot(2\boldsymbol{j} - 4t\boldsymbol{j}) = 0$$

整理得

$$4t - 4t(19 - 2t^2) = 0$$

解得

$$t_1 = 0\ \text{s}, t_2 = 3\ \text{s}, t_3 = -3\ \text{s}（舍去）$$

所以，质点在初始时刻和 3 s 末位置矢量和速度矢量恰好垂直.

例 1 - 2

路灯距地面的高度为 h，一个身高为 l 的人在路上匀速运动，速度为 v_0，如图 1-5 所示，求：(1) 人影中头顶的移动速度 v_1.(2) 影子长度增长的速率.

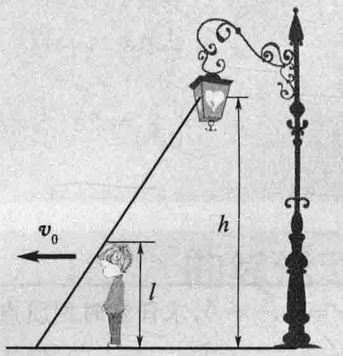


图 1-5　例 1-2 图

解　建立如图 1-5 所示坐标系，选取路灯在地面上的垂直投影点为坐标原点 O，x_0、x_1 分别表示任意时刻人的位置及其影子的坐标，则

$$\frac{l}{k} = \frac{x_1 - x_0}{x_1}$$

即 $$lx_1 = h(x_1 - x_0)$$

上式两边对 t 求导，得

$$lv_1 = h(v_1 - v_0)$$

所以

$$v_1 = \frac{hv_0}{h - l}$$

(2) 影子长度为 $x_1 - x_0$，则影子长度增长速率为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_1 - x_0) = v_1 - v_0 = \frac{hv_0}{h-l} - v_0 = \frac{lv_0}{h-l}$$

例 1 - 3

在离水面高 h 米的岸上，有人用绳子拉船靠岸，设任一时刻船在离岸 x 处，如图 1-6 所示.当人以 $v_0(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$ 的速率收绳时，试求船运动的速度和加速度的大小.

解　设任一时刻人到船之间绳的长度为 l，绳与水面成 θ 角，由图 1-6 可知

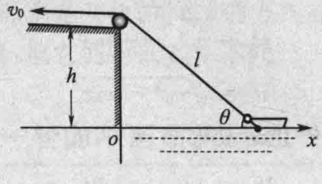


图 1-6　例 1-3 图

$$l^2 = h^2 + x^2$$

将上式对时间 t 求导，得

$$2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

根据速度的定义，则

$$v_{绳} = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = -v_0$$

$$v_{船} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{x}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = -\frac{l}{x}v_0 = -\frac{v_0}{\cos\theta} = -\frac{\sqrt{h^2+x^2}}{x}v_0$$