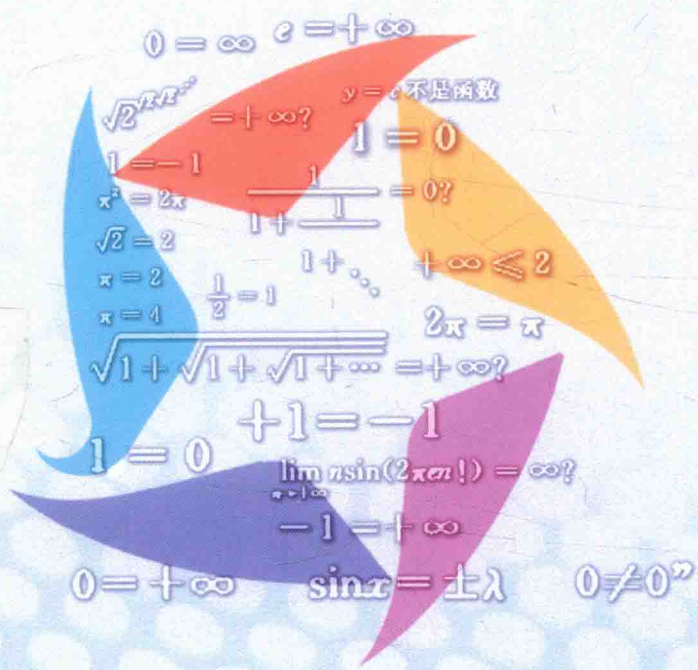


高等数学

错误在哪里?

王得民 著



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

高等数学

错误在哪里?

王得民 ●

$$0 = \infty \quad \infty = +\infty$$

$y = \frac{1}{x}$ 不是函数

$$1 = 0$$

$$1 = 0?$$

$$1 + \dots + 1$$

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

$$+1 = -1$$

$$1 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi n!) = \cos 1$$

$$-1 = +\infty$$

$$0 = +\infty$$

$$\sin x = \pm \lambda$$

$$0 \neq 0''$$



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书为作者多年教授高等数学积累所得,将高等数学的知识用反例的形式展现出来,通过十分丰富、有趣的反例,吸引读者的兴趣,帮助读者理解高等数学的基本概念、基本理论,掌握高等数学的基本解题方法和技巧,并有效避免错误。

本书可供教授学习高等数学的师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学错误在哪里/王得民著. —西安:西安交通大学出版社,2016.2
ISBN 978-7-5605-8292-4

I. ①高… II. ①王… III. ①高等数学 IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 032927 号

书 名 高等数学错误在哪里
著 者 王得民
责任编辑 刘雅洁 毛 帆

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路 10 号 邮政编码 710049)
网 址 <http://www.xjtpress.com>
电 话 (029)82668357 82667874(发行中心)
(029)82668315(总编办)
传 真 (029)82668280
印 刷 虎彩印艺股份有限公司

开 本 880mm×1230mm 1/32 印张 14 字数 398 千字
版次印次 2016 年 6 月第 1 版 2016 年 6 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5605-8292-4/O·529
定 价 29.80 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。
订购热线:(029)82665248 (029)82665249
投稿热线:(029)82669097 QQ 8377981
电子信箱:lg_book@163.com

版权所有 侵权必究

前 言

本书似乎是一本高等数学中的诡辩论,这一点可以从书中的许多醒目的标题“ $+1 = -1$ ”、“ $0 = +\infty$ ”、“ $\sin x = \pm 1$ ”、“ $0 \neq 0$ ”……中看出来,实际上本书可以归于高等数学中的反例这一类书。不过,作者不是用通常采用的“举例”的形式表述的,而是采用了所谓“诡辩”的形式加以阐述的,作者这样做的本意是希望引起读者的兴趣、注意和警觉,使其在学习高等数学时有所启迪,有所帮助。

毫无疑问,认真地阅读高等数学教科书中的内容,并通过十分丰富的、说明性的例子,理解书中的基本概念、基本理论,掌握数学的基本方法和解题技巧是十分重要的和必要的。但是,尤其是在高等数学中,相辅相成地给出各种各样的反例也是必不可少的。这不仅对正确、深入地理解教科书中的内容是不可或缺的,而且使读者知道,一旦超过了某个限度就会发生怎样的“毛病”,犯什么样的错误。这并不是作者过份的担心,而是使他(她)们知道,对教科书中细微差别的忽视所导致的后果。

本书集知识性和趣味性于一体,主要是供浏览用的。作者在多年的教学中发现,学生作业中的某些错误并不仅由于粗心大意造成的,于是便有意地根据这些错误编写一些例题,运用到课堂教学中,收到了出乎意料的效果。作者在多年积累的基础上编写了本书,书中所有的题目标题(命题)几乎都是错误的或

者是值得怀疑的,每一个问题都有详尽的“论证”或者“推论”过程。如果读者能够从中找出错误之处,找出造成错误的原因以及需要纠正之处和正确的结果,那么,本书的目的就达到了。假若有某些疑虑之处,不妨在读完正文后,参考一下每章后面的“错误与纠正”。

本书是为了学习高等数学的学生们写的,涉及到的概念、定理、结论、公式及方法可阅读教材中的有关部分。另外有少量涉及到教学分析的例子,可供各类学习高等数学的学生阅读或者作为考研者的参考,也可提供给数学教师们在习题课上作为选例。

限于作者的学识水平,本书难免有不当之处,敬请读者指正。

作者

目 录

第 1 章 函数	(1)
1.1 命题与疑问	(1)
1. $y = c$ 不是函数	(1)
2. $1 = 0$	(1)
3. 关于原点对称的函数一定是奇函数	(1)
4. 两个奇函数之和一定是奇函数	(1)
5. 分段定义的函数都是非初等函数	(2)
6. 在任一有限区间上都有界的函数,在整个数轴上都有界	(3)
7. 只有单调函数才有反函数	(3)
8. 在定义域内每一点都有有限值,在任一点的邻域内都有界	(4)
9. 不对称于原点的奇函数	(5)
10. 没有周期的周期函数	(5)
11. 周期函数的和(差)仍然是周期函数	(6)
12. 周期函数与非周期函数的和仍然是非周期函数	(6)
13. 两个非周期函数构成的复合函数仍然是非周期函数	(6)
14. 任何周期函数都有最小正周期	(7)
15. 两个无界函数之积仍然是无界函数	(7)
16. 两个单调函数之积仍然是单调函数	(7)
17. 在任何区间内都不单调的函数	(8)
18. $\sqrt{2}$ 是有理数	(8)
19. 函数 $y = b$ 的反函数	(9)
20. 没有反函数的复合函数	(9)
21. $\sqrt{2} = -\sqrt{2}$	(10)
22. 具有周期的非周期函数	(11)
23. $1 = 0$	(11)
24. 单调函数的反函数却不是单调的	(11)

25. 函数与它的反函数可以相等吗?	(12)
26. $2\pi = \pi$	(13)
1.2 错误及其纠正	(13)
第2章 数列	(19)
2.1 命题与疑问	(19)
1. 非单调数列一定不收敛	(19)
2. 单调而减少的数列一定以零为极限	(19)
3. 数列的最后一项	(20)
4. $0 = 1$	(20)
5. $e = +\infty$	(21)
6. 两个数列的比较	(22)
7. 非单调数列一定不收敛	(22)
8. 自然数列 $\{n\}$ 收敛于 0	(22)
9. 收敛数列可以有两个不同的极限	(23)
10. 无界的数列以 ∞ 为极限	(23)
11. 发散数列的和一定发散	(23)
12. 按数值调整数列	(24)
13. 发散数列与收敛数列的积仍发散	(25)
14. 既发散又收敛的数列	(25)
15. 无理数的旋涡	(26)
16. $\sqrt{2^{\sqrt{2^{\sqrt{2^{\dots}}}}} = +\infty$	(27)
17. $1 = -1$	(27)
18. 发散数列的平均值	(27)
19. $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}} = 0$	(28)
20. 投影的极限等于极限的投影	(30)
21. 柯西收敛原理的困惑	(31)
22. 所有的子数列都收敛则数列收敛	(32)
23. $+\infty \leq 2$	(33)
24. 数列乘积收敛, 则每一数列必收敛	(33)

25. 数列的算术平均值收敛, 则数列收敛	(34)
26. $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}} = +\infty?$	(34)
27. $\frac{1}{2} = 1$	(35)
28. 有理数列的极限一定是有理数	(36)
29. $0 = \infty$	(36)
30. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin(2\pi en!) = \infty$	(36)
31. $-1 = +\infty$	(38)
2.2 错误及其纠正	(38)
第3章 极限	(49)
3.1 命题与疑问	(49)
1. $\pi^2 = 2\pi$	(49)
2. $\sqrt{2} = 2$	(49)
3. $\pi = 2$	(50)
4. $\pi = 4$	(51)
5. $\pi = 2 \frac{2}{3}$	(53)
6. $\ln 2 = 0$	(54)
7. $\sin(+\infty) = ?$	(55)
8. $\sin 2x = 2\sin x$	(56)
9. $0 = \frac{1}{2}$	(56)
10. 最高阶的无穷小	(57)
11. $0 + 0 \neq 0$	(57)
12. $0 \times 0 \times 0 \cdots \neq 0$	(58)
13. $0 \times 0 \times 0 \cdots = +\infty$	(58)
14. 夹逼准则的失效	(59)
15. $+1 = -1$	(60)
16. $1 = +\infty$	(60)
17. $0 \neq 0$	(61)
18. $0 = \frac{1}{2}$	(61)

19.	$1 \neq 1$	(62)
20.	$\frac{1}{2} = -\infty$	(62)
21.	$1 = 0$	(63)
22.	$1 = \sqrt{5}$	(63)
23.	$\frac{\pi}{2} = 1$	(64)
24.	$1 = 0$	(64)
25.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \sin \cdots \sin x = ?$	(65)
26.	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$ 不存在	(66)
27.	无界函数一定是无穷大	(67)
28.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sgn} \sin^2(n! \pi x) = -1$ 或 0 或 $+1$	(67)
29.	复合函数的极限	(68)
30.	两个无极限的函数之积仍无极限	(68)
31.	$1 \neq 1$	(69)
32.	没有极限的复合函数的极限	(69)
33.	$0 \neq 0$	(70)
34.	非无穷小的乘积可以是无穷小	(70)
35.	$\sqrt{2} = -\sqrt{2}$	(70)
36.	$0 = 1$	(71)
37.	没有极限的极限	(71)
38.	$0 = \pi$	(72)
3.2	错误及其纠正	(73)
第 4 章	函数的连续性	(78)
4.1	命题与疑问	(78)
1.	处处有定义而处处不连续的函数	(78)
2.	仅在一点连续的函数	(79)
3.	在无理点上连续而在有理点上间断的函数	(79)
4.	不连续函数的和函数	(81)
5.	两个不连续函数的乘积	(81)
6.	不连续函数的复合	(82)

7. 既连续又间断的函数	(83)
8. $0 = 1$	(83)
9. 初等函数在其定义域内都连续	(83)
10. $1 = 0$	(84)
11. 连续函数的极限函数仍然是连续函数	(84)
12. 处处连续函数的极限函数依然是处处连续函数	(85)
13. 仅在整数点上连续的函数	(85)
14. 能取两个数之间的一切数值,函数就一定连续	(86)
15. 不连续函数的反函数仍不连续	(87)
16. 连续性概念的质疑	(87)
17. 连续函数的图形上一定没有“洞”吗?.....	(89)
18. 可以通过曲线任何点的圆柱形管子	(90)
19. 面积误差一致的正方形	(92)
20. 连续而有界的函数一定一致连续	(92)
21. 一致连续的函数一定有界	(93)
22. 既一致连续又不一致连续	(93)
23. 两个一致连续函数之积一定一致连续	(94)
24. 一致连续函数的反函数也一致连续	(95)
4.2 错误及其纠正	(97)
第5章 一元函数微分学	(100)
5.1 命题与疑问	(100)
1. 处处间断函数的导数	(100)
2. 仅在一一点可导的函数	(100)
3. 处处连续而无处可导的函数	(101)
4. $0 = +\infty$	(106)
5. 几乎处处可导又几乎处处不可导函数	(107)
6. $f'(x_0) = 0$ 说明了什么?.....	(109)
7. 函数处处连续可导,导函数一定连续	(111)
8. $f'(x_0) > 0$ 说明了什么?.....	(111)
9. 函数在不连续点上的导数	(113)
10. 无穷远 ∞ 处的导数	(114)
11. 不能成为导函数的函数	(115)

12. 存在切线吗?	(116)
13. $\frac{1}{2} = -\infty = +\infty$	(119)
14. $0 = -\infty$	(120)
15. $0 =$ 不存在	(121)
16. $\varphi(a) \neq \varphi(a)$	(122)
17. 函数在无定义点处的导数	(122)
18. 处处不可导函数的复合却可以处处可导	(123)
19. $\frac{d}{dx}(\max\{f(x), g(x)\}) = ?$, $\frac{d}{dx}(\min\{f(x), g(x)\}) = ?$	(124)
20. $0 \neq 0$	(126)
21. 中值定理的失效	(127)
22. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = f'_+(x_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = f'_-(x_0)$	(128)
23. 与任何弦都不平行的切线	(129)
24. 初等函数一定可导	(129)
25. 严格单调增加的连续函数一定处处可导	(130)
26. 严格单调增加而处处可导的函数, 其导数必大于 0	(130)
27. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = 0$	(131)
28. $\sin \alpha = \sqrt{2}$	(132)
29. 一点的切线	(133)
30. 偶函数一定以 $x = 0$ 为极值点	(133)
31. 重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 的新证法	(134)
32. $0 \neq 0$	(135)
33. 一切正分数都相等	(135)
34. $+\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$	(135)
35. 不能求得结果的极限	(136)
36. $1 =$ 不存在	(137)
37. $0 \neq 0$	(138)
38. $+\pi = -\pi$	(139)

39. $0 = e = \frac{1}{e}$	(139)
40. $0 =$ 不确定	(141)
41. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} = 0$	(141)
42. $\sqrt{2} \leq 1$	(142)
43. $0 =$ 不存在	(144)
44. 同一个函数?	(144)
45. $\sqrt{2} = 1$	(145)
46. 在圆内没有最大也没有最小的弦	(146)
47. $\frac{0}{0} = 0$	(146)
48. 在极值点的邻域内,两边的导数一定保持同一种符号 ..	(147)
49. 极大值等于极小值的非常值函数	(148)
50. $0 \neq 0$	(148)
51. 不等式的微分法	(149)
52. 圆内每一点都是圆心	(149)
53. $2\sqrt{3} < 3$	(150)
54. $2 = \infty$	(150)
55. 无法求得结果的极限	(151)
56. $f''(x_0) = 0$ 的点 x_0 一定不取得极值	(152)
57. 函数在一点任意阶导数都等于 0, 函数在该点能否取得极值	(153)
58. 函数有 n 阶导数就有任意阶导数	(155)
59. 椭圆处处向下凹	(156)
60. 不存在最大值或最小值的闭区间上的连续函数	(157)
61. $f''(x_0)$ 不存在, 点 $(x_0, f(x_0))$ 一定不是拐点	(157)
62. 既取得极值又取得拐点	(158)
63. 没有泰勒展开式的可展函数	(158)
64. 对给定的误差, 不能用多项式逼近的函数	(159)
65. 函数在一点导数大于 0, 则函数在该点的邻域内单调增加	(159)
66. 若导函数不连续, 那么间断点是第几类?	(160)

67. 曲线上两边凹凸方向不同的点就是拐点	(162)
68. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$, 则 $f'(x_0)$ 存在	(162)
69. 区间之外的中值	(163)
70. 求导的疑虑	(163)
71. $4 > 5$	(163)
72. 不是拐点的拐点	(164)
73. 没有导数的导数	(165)
5.2 错误及其纠正	(166)
第 6 章 原函数与不定积分	(177)
6.1 命题与疑问	(177)
1. 两个原函数之间相差不等于一个常数	(177)
2. 不连续函数可以有原函数吗?	(177)
3. 原函数对区间具有可加性	(178)
4. 一切初等函数在其定义域内都有原函数	(178)
5. $\ln(-1) = 0$	(179)
6. 初等函数的原函数一定是初等函数	(179)
7. 一个函数可以有不同形式的原函数	(180)
8. 没有原函数的两个函数的和函数却有原函数	(181)
9. 偶函数的原函数是奇函数, 奇函数的原函数是偶函数	(182)
10. 积分是微分的逆运算	(183)
11. $\tan x = \pm i$	(183)
12. $\sin x = \pm 1$	(184)
13. $\sin^2 x = 1$	(184)
14. 连续函数的原函数却不连续	(185)
15. 间断函数 $\operatorname{sgn} x$ 的不定积分	(185)
16. 可积分函数的和不可积分	(186)
17. 不能积分函数的和却可积分	(186)
18. 有理函数的(不定)积分仍是有理函数	(187)
19. $\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$	(188)
20. $0 = 1$	(188)
21. $0 = 1 = 2 = \dots = n$	(189)

22. 积不出来的函数其和却可以积出来	(190)
23. 周期函数的原函数仍然是周期函数	(190)
24. 函数 $ x $ 处处可导	(192)
25. $ x = x$	(192)
26. 连续函数却没有原函数	(193)
6.2 错误及其纠正	(193)
第7章 定积分	(201)
7.1 命题与疑问	(201)
1. 在区间上可积的函数一定存在原函数	(201)
2. $0 \neq 0$	(202)
3. 有界函数一定可积分	(203)
4. 有无穷多间断点的函数也可积分	(204)
5. 单调函数一定可积分	(205)
6. 开区间内连续的函数可否积分?	(206)
7. 绝对可积的函数一定可积	(207)
8. 两个可积函数的复合函数一定可积	(208)
9. 两个不可积函数的复合函数一定不可积	(208)
10. 若 $f(x) \geq 0$ 且可积, 则 $\int_a^b f(x) dx > 0$	(209)
11. 可积函数与不可积函数之积可积分或不可积分	(209)
12. 两个不可积函数的乘积仍不可积	(209)
13. $\frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt \neq f(x)$	(210)
14. $-2 > 0$	(210)
15. $0 = -2$	(211)
16. $-\frac{1}{3} > 0$	(211)
17. $-\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$	(212)
18. $0 = 1$	(213)
19. $0 \geq \frac{\pi}{3}$	(214)
20. 失去的部分	(215)

21. 在对称区间上奇函数的积分不等于零 (215)
22. $\sin x = \cos x$ (216)
23. $0 = 1$ (217)
24. $2 \neq 2$ (217)
25. $0 \geq \frac{2}{3}$ (218)
26. $\ln 2 = 1 = 0$ (219)
27. $0 \geq \frac{1}{2}$ (219)
28. 不存在的中值 (220)
29. $\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$ (221)
30. $0 \geq 0$ (221)
31. $\frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{4}$ (222)
32. $0 = 1$ (223)
33. 在对称区间上可积分的函数都是偶函数 (224)
34. 牛顿-莱布尼茨公式的困惑 (224)
35. 若 $|f(x)|$ 可积分, 则 $f(x)$ 也可积分 (225)
36. 估值的错误 (225)
37. $\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}?$ (226)
38. $0 > \frac{\pi}{4}$ (227)
39. $\frac{d}{dx} \int_0^x [t] dt = [x]$ (227)
40. $2\pi = \frac{5}{2}\pi$ (228)
41. $0 = 1$ (229)
42. 闭区间上连续曲线是否一定可求长 (229)
43. $0 = \infty - \infty$ (231)
44. 若 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (231)
45. 若 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内有界 (233)

46. 图形无限面积却有限	(234)
47. 面积无限体积却有限	(234)
48. 若 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 内绝对收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f^2(x) dx$ 也收敛	(235)
49. $0 = -2$	(236)
50. $\infty - \infty = 0$	(236)
51. 连续奇函数的原函数是偶函数, 连续偶函数的原函数是奇函数	(237)
7.2 错误及其纠正	(237)
第 8 章 多元函数微分学	(256)
8.1 命题与疑问	(256)
1. $+1 = -1$	(256)
2. $0 = 1$	(256)
3. $0 = -1$	(257)
4. 沿任意方向的极限存在, 函数的极限就一定存在	(258)
5. $0 = \sqrt{-\infty}$	(258)
6. $0 \neq 0$	(259)
7. $e = 1$	(259)
8. $0 \neq 0$	(260)
9. 二元函数 $f(x, y)$ 分别对每一个变量都连续就是二元连续函数	(261)
10. 函数 $f(x, y)$ 沿任意过点 (x_0, y_0) 的射线是连续的, 则函数 在该点连续	(262)
11. 在每个点都连续的不连续函数	(263)
12. 在平面上任一点都不连续的函数	(263)
13. 存在偏导数就一定连续	(264)
14. 存在偏导数就一定可微分	(264)
15. 偏导数不连续, 函数就不可微分	(265)
16. 仅在一一点可微分的函数	(266)
17. 沿任意方向的方向导数存在, 函数就一定连续	(267)
18. 每一点都有偏导数, 则偏导数就有界	(268)

19.	$\sqrt{2} = +\infty$	(269)
20.	函数沿任意方向的方向导数存在,函数就可微分	(269)
21.	$\cos\theta = \cos^3\theta$	(270)
22.	具有全微分的不可微函数	(271)
23.	函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处沿任意方向的方向导数都相等, 则 $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0)$	(271)
24.	$f'_x(x, y) = f'_y(x, y) \equiv 0$, 则 $f(x, y)$ 是常数	(272)
25.	$0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$	(273)
26.	$0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = +\infty$	(273)
27.	$-1 = +1$	(274)
28.	二阶偏导数在某点存在,则一阶偏导数在该点连续	(275)
29.	$+1 = -1$	(276)
30.	存在隐函数却不唯一	(277)
31.	函数 $f(x, y)$ 过点 (x_0, y_0) 的任意直线上都有极值,函数在 该点就一定有极值	(278)
32.	$-1 > 0$	(278)
33.	在不连续点上函数是否有极值	(280)
34.	有多个极大值而无极小值的函数	(280)
35.	不是极值的极值	(281)
36.	点到曲面的最短距离不存在	(282)
8.2	错误及其纠正	(282)
第9章	多元函数积分学	(293)
9.1	命题与疑问	(293)
1.	$+1 = -1$	(293)
2.	若 $\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$, 则函数 $f(x, y)$ 在 $D: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ 上可积分	(293)
3.	$0 \neq 0$	(295)
4.	$\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$	(295)
5.	二重积分存在就能化作二次积分计算	(296)