考研金榜题名名师辅导教材系列

金榜考研命题研究中心 编

高等数学18讲

考研数学分数曲线上的拐点

- 一线名师亲自指点，倾力打造专业经典
- 精心总结命题特点，创新习题精编精讲
- 内容精致全面指导，理清思路轻松上阵

3

扫描二维码可获赠V研客

免费课时、在线答疑、精美课件

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高等数学18讲

金榜考研命题研究中心◎编

本书专属：

Where there is a will, there is a way.

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

《高等数学18讲》是为参加全国硕士研究生入学考试的广大考生编写的高等数学学科辅导用书。本书由编者多年来在考研辅导班上的基础课讲稿改写而成。全书内容共分18讲(包含一个计算专题和一个证明专题),每讲均由考试内容要点精讲、典型例题及练习题三部分组成。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学18讲 / 金榜考研命题研究中心编. —北京:机械工业出版社,2016.8
考研金榜题名名师辅导教材系列
ISBN 978-7-111-54548-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①金… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第190932号
机械工业出版社(北京市百万庄大街22号邮政编码100037)
策划编辑:丁诚 责任校对:丁诚
责任编辑:丁诚
责任印制:李飞
北京铭成印刷有限公司印刷
2017年3月第1版·第1次印刷
184mm×260mm·13.75印张·332千字
0001—3000册
标准书号:ISBN 978-7-111-54548-4
定价:39.00元

前 言

高等数学是理工科院校的一门重要基础学科。同时也是研究生入学考试中难度比较大,分值比高的一门科目。就研究生数学考试而言,其要求要比教学高,侧重点也有所不同。因此,学好高等数学对考生来说相当重要。

很多考生很想知道怎样才能学好这门课。

首先,我们得承认高等数学这门学科本身的特点,直接决定了这门课是难度较大的。高等数学中的概念表述,很少有看得见、摸得着的直观形象,另外,这门课在判断推理过程中要运用逻辑的规则,遵循思维规律。

学好高等数学,要做到:

对于概念,弄清楚它是如何定义的、有什么性质,这样才能真正地理解概念。

对于定理,除了掌握它的条件和结论以外,还要搞清它的适用范围,以及有哪些特例。

对于例题,要尽量弄懂,同时还要适量做题。

《高等数学 18 讲》是为参加全国硕士研究生入学考试的广大考生编写的高等数学学科辅导用书。本书由编者多年来在考研辅导班上的基础课讲稿改写而成。全书内容共 18 讲(包含一个计算专题和一个证明专题),每讲均由考试内容要点精讲、典型例题及练习题三部分组成。

考生在学习本书内容时,学完每一讲后要及时总结知识体系,这样不仅可以加深对知识的理解,还会对进一步学习有所帮助。本书中例题的选取努力做到既要具有典型性,又要有助于理解概念和掌握定理,便于广大考生从中归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型;同时还要有指导性,依据命题的指导思想,发现命题趋势,指导复习方向。考生在做练习题时要归纳方法举一反三,总结错误查漏补缺。只有这样,才能将本书的效用发挥到最大,才会有所收获。

为了考生使用方便,本书对数学一、二、三不要求的内容都有所说明。希望本书能对考生有较大帮助。在编写本书的过程中,尽管我们抱着对广大考生认真负责的态度,高质量、严要求,但由于时间紧、任务重,加上我们水平有限,难免有许多不足、不尽如人意之处,敬请广大读者和同行批评指正。

编者

目 录

第 1 讲　预备知识

1.1　数的概念与分类

$$
\text{数}\begin{cases}
\text{狭义数}\begin{cases}
\text{实数}\begin{cases}
\text{有理数}\begin{cases}
\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\
\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}
\end{cases}\\
\text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}
\end{cases}\\
\text{复数 } a+bi\text{(}a\text{、}b\text{ 为实数，}i=\sqrt{-1}\text{ 为虚数单位)}
\end{cases}\\
\text{广义数}\begin{cases}\text{向量}\\ \text{矩阵}\\ \text{其他(如张量、群、环、域等)}\end{cases}
\end{cases}
$$

实数:有理数和无理数的全体,记作 **R**.

有理数:整数和分数(有限小数或无限循环小数).

无理数:无限不循环小数.

向量:既有大小又有方向的量.

矩阵:$m\times n$ 个数排成的 m 行 n 列的表.

1.2　集合

一般地,某些指定的对象集在一起就组成为一个集合,通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$,表示.集合中的每一对象叫作集合的一个元素,通常用小写字母 $a,b,c,\cdots$,表示.

一、集合与元素

(1) 集合元素的三个特征:**确定性**、**互异性**、**无序性**.

(2) 元素与集合的关系是**属于**或**不属于**关系.

(3) 集合的表示法:**列举法**、**描述法**、**图示法**(韦恩图法)、**区间法**.

(4) 常用数集:自然数集 $\mathbf{N}$;正整数集 $\mathbf{N}^*$(或 $\mathbf{N}_+$);正数集 $\mathbf{Z}$;有理数集 $\mathbf{Q}$;实数集 $\mathbf{R}$.

(5) 集合的分类:按集合中元素个数划分为**有限集合**(元素个数是有限个)、**无限集合**(元素个数是无限个)、**空集**(不含任何元素).

二、集合的关系与运算

设 A、B 是两个集合,如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的**子集**,记作 $A \subseteq B$,读作 A 包含于 B.

若 A、B 互为子集,即 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,则称集合 A 与集合 B **相等**,记作 $A = B$.

若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$,则称 A 是 B 的**真子集**,记作 $A \subset B$.

不含任何元素的集合称为**空集**,记作 $\varnothing$,且规定空集是任何集合的子集.

A 与 B 的并集(简称**并**),记作 $A \cup B$,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\};$$

A 与 B 的交集(简称**交**),记作 $A \cap B$,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\};$$

A 与 B 的差集(简称**差**),记作 $A - B$,

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\};$$

A 的补集,记作 $\overline{A}$,

集合 A 是集合 I 的子集,则称 $I - A$ 为 A 的补集(或余集).

设 A、B、C 为三个任意的集合,则有

(1) 交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;

(2) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(3) 分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

(4) 对偶律 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

1.3 不等式

不等式(组)的有关概念

(1) 不等式:用不等号("$<$""$>$""$\leqslant$""$\geqslant$""$\neq$")表示不相等关系的式子叫作不等式.

(2) 不等式的解:使不等式成立的未知数的值,叫作不等式的解.

(3) 不等式的解集:一个含有未知数的不等式的解的全体,叫作不等式的解集.

【注】 不等式的解与一元二次方程的解是有区别的,不等式的解是不确定的,是一个范围,而一元二次方程的解则是一个具体的数值.

(4) 不等式的性质:

1) 不等式的两边都加上(或减去)同一个数或同一个整式,不等号的方向不变. 如果 $a > b$,那么 $a + c > b + c$;

2) 不等式的两边都乘以(或除以)同一个正数,不等号的方向不变. 如果 $a > b$,并且

$c>0$,那么 $ac>bc\left(或\frac{a}{c}>\frac{b}{c}\right)$;

3) 不等式的两边都乘以(或除以)同一个负数,不等号的方向改变.如果 $a>b$,并且 $c<0$,那么 $ac<bc\left(或\frac{a}{c}<\frac{b}{c}\right)$.

(5) 一元一次不等式:只含有一个未知数,未知数的次数是 1,且系数不等于 0 的不等式叫作一元一次不等式.

(6) 一元一次不等式解题步骤:

1) 去分母; 2) 去括号; 3) 移项; 4) 合并同类项; 5) 化系数为 1.

注意 进行"去分母"或"化系数为 1"时,要根据不等号两边同乘以(或除以)的数的正、负,决定是否改变不等号的方向,若不能确定该数的正、负,则要分正、负两种情况讨论.

(7) 一元一次方程式是表达现实世界中量与量之间不等关系的重要数学模型,应用不等式解决问题的一般步骤如下:

1) 审题,弄清题目中的数量关系,用字母表达未知数;

2) 找出题目中隐含的一个不等关系,注意表达不等关系的术语,如至多、至少、不小于、不大于等;

3) 列出不等式;

4) 解不等式;

5) 根据实际问题写出符合题意的解.

(8) 类似于方程组,把几个一元一次不等式合在一起,就组成了一个一元一次方程组.

(9) 几个不等式的解集的公共部分,叫作由它们所组成的不等式组的解集.

(10) 解一元一次不等式组的步骤:

1) 分别求出不等式组中各个不等式的解集;

2) 借助数轴求出这些不等式解集的公共部分.

1.4 函数

一、函数的奇偶性

(1) 若 $f(x)$ 是偶函数,那么 $f(x)=f(-x)=f(|x|)$;

(2) 若 $f(x)$ 是奇函数,且 0 在其定义域内,则 $f(0)=0$(可用于求参数);

(3) 判断函数奇偶性可用定义的等价形式:

$$f(x)\pm f(-x)=0 \text{ 或 } \frac{f(-x)}{f(x)}=\pm 1 \quad [f(x)\neq 0];$$

(4) 若所给函数的解析式较为复杂,应先化简,再判断其奇偶性;

(5) 奇函数在对称的单调区间内有相同的单调性;偶函数在对称的单调区间内有相反的单调性.

二、复合函数的有关问题

(1) 复合函数定义域求法:若已知 $f(x)$ 的定义域为$[a,b]$,其复合函数 $f[g(x)]$ 的定义

域由不等式 $a \leqslant g(x) \leqslant b$ 解出即可;若已知 $f[g(x)]$ 的定义域为$[a,b]$,求 $f(x)$ 的定义域,相当于 $x \in [a,b]$ 时,求 $g(x)$ 的值域[即 $f(x)$ 的定义域];研究函数的问题时一定要注意定义域优先的原则.

(2) 复合函数的单调性由口诀"同增异减"判定.

三、初等函数

下列一些函数称为基本初等函数:

(1) 常值函数:C(C 为常数),$x \in \mathbf{R}$.

(2) 幂函数:x^a(a 为常数),其定义域由 a 确定,但不论 a 如何取值,在$(0,+\infty)$ 内总有定义.

(3) 指数函数:a^x(常数 $a > 0$,且 $a \neq 1$),$x \in \mathbf{R}$.

(4) 对数函数:$\log_a x$(常数 $a > 0$,且 $a \neq 1$),$x \in (0,+\infty)$.

(5) 三角函数:$\sin x, x \in (-\infty,+\infty)$;$\cos x, x \in (-\infty,+\infty)$;

$$\tan x, x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbf{Z}; \cot x, x \in (k\pi,(k+1)\pi), k \in \mathbf{Z}.$$

(6) 反三角函数:$\arcsin x, x \in [-1,1]$;$\arccos x, x \in [-1,1]$;

$$\arctan x, x \in \mathbf{R}; \operatorname{arccot} x, x \in \mathbf{R}.$$

由基本初等函数经有限次加、减、乘、除及复合而成的,并用一个式子表示的函数称为初等函数.

四、函数图像(或方程曲线的对称性)

(1) 证明函数图像的对称性,即证明图像上任意点关于对称中心(或对称轴)的对称点仍在图像上;

(2) 证明图像 C_1 与 C_2 的对称性,即证明 C_1 上任意点关于对称中心(或对称轴)的对称点仍在 C_2 上,反之亦然;

(3) 曲线 $C_1: f(x,y) = 0$,关于 $y = x + a$(或 $y = -x + a$)的对称曲线 C_2 的方程为 $f(y-a, x+a) = 0$[或 $f(-y+a, -x+a) = 0$];

(4) 曲线 C_1: $f(x,y) = 0$ 关于点(a,b) 的对称曲线 C_2 的方程为 $f(2a-x, 2b-y) = 0$;

(5) 若函数 $y = f(x)$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 时,$f(a+x) = f(a-x)$ 恒成立,则 $y = f(x)$ 的图像关于直线 $x = a$ 对称;

(6) 函数 $y = f(x-a)$ 与 $y = f(b-x)$ 的图像关于直线 $x = \dfrac{a+b}{2}$ 对称.

五、函数的周期性

(1) $y = f(x)$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 时,$f(x+a) = f(x-a)$ 或 $f(x-2a) = f(x)(a > 0)$ 恒成立,则 $y = f(x)$ 是周期为 $2a$ 的周期函数;

(2) 若 $y = f(x)$ 是偶函数,其图像又关于直线 $x = a$ 对称,则 $f(x)$ 是周期为 $2|a|$ 的周期函数;

(3) 若 $y = f(x)$ 是奇函数,其图像又关于直线 $x = a$ 对称,则 $f(x)$ 是周期为 $4|a|$ 的周期函

数；

(4) 若 $y=f(x)$ 关于点 $(a,0)$，$(b,0)$ 对称，则 $f(x)$ 是周期为 $2|a-b|$ 的周期函数；

(5) $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$，$x=b(a\neq b)$ 对称，则函数 $y=f(x)$ 是周期为 $2|a-b|$ 的周期函数；

(6) $y=f(x)$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 时，$f(x+a)=-f(x)$［或 $f(x+a)=-\frac{1}{f(x)}$］，则 $y=f(x)$ 是周期为 $2|a|$ 的周期函数.

六、方程 $k=f(x)$ 有解 $\Leftrightarrow k\in D$［D 为 $f(x)$ 的值域］；

七、$a\geqslant f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a\geqslant[f(x)]_{\max}$；$a\leqslant f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a\leqslant[f(x)]_{\min}$；

八、对数的计算公式

(1) $\log_a b=\log_{a^n}b^n(a>0,a\neq1,b>0,n\in\mathbf{R}_+)$；

(2) $\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}(a>0,a\neq1,b>0,b\neq1)$；

(3) $\log_a b$ 的符号由口诀“同正异负”记忆；

(4) $a^{\log_a N}=N(a>0,a\neq1,N>0)$.

九、判断对应是否为映射时要抓住两点

(1) A 中元素必须都有像且唯一；

(2) B 中元素不一定都有原像，并且 A 中不同元素在 B 中可以有相同的像.

十、能熟练地用定义证明函数的单调性、求反函数或判断函数的奇偶性

十一、关于反函数的一些结论

(1) 定义域上的单调函数必有反函数；

(2) 奇函数的反函数也是奇函数；

(3) 定义域为非单元素集的偶函数不存在反函数；

(4) 周期函数不存在反函数；

(5) 互为反函数的两个函数具有相同的单调性；

(6) $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数，设 $f(x)$ 的定义域为 A，值域为 B，则有 $f[f^{-1}(x)]=x(x\in B)$，$f^{-1}[f(x)]=x(x\in A)$.

十二、处理二次函数的问题勿忘数形结合

二次函数在闭区间上必有最值，求最值问题用“两看法”：一看开口方向；二看对称轴与所给区间的相对位置关系

十三、恒成立问题的处理方法

(1) 分离参数法；

(2) 转化为一元二次方程根的分布列不等式(组)求解.

典型例题

【例 1】 设$U=\mathbf{R}$,$A=\{x\mid x>0\}$,$B=\{x\mid x>1\}$,则$A\cap \complement_U B=$ ________.

(A)$\{x\mid 0\leqslant x<1\}$. (B)$\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$.

(C)$\{x\mid x<0\}$. (D)$\{x\mid x>1\}$.

【解析】 因为$B=\{x\mid x>1\}$, 所以$\complement_U B=\{x\mid x\leqslant 1\}$,

又$A=\{x\mid x>0\}$, 所以$A\cap\complement_U B=\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$.

【例 2】 已知不等式$ax^2-bx-1\geqslant 0$的解集是$\left[-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right]$,则求不等式$x^2-bx-a<0$的解集.

【分析】 知道$-\frac{1}{2}$和$-\frac{1}{3}$是$ax^2-bx-1=0$的两个实根,然后通过解方程组求出a、b.

【解】 由题意知$-\frac{1}{2}$和$-\frac{1}{3}$是$ax^2-bx-1=0$的两个实根.

所以由$\begin{cases}-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{b}{a},\\ -\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{a},\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=-6,\\ b=5.\end{cases}$

所以$x^2-bx-a<0\Leftrightarrow x^2-5x+6<0\Leftrightarrow 2<x<3$.

【例 3】 已知集合$A=\{1,2,3\}$,$B=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-ax+1=0,a\in A\}$,则满足$A\cap B=B$的实数$a$的值为________.

(A)1. (B)2 或 3. (C)1 或 2. (D)1 或 3.

【解】 当$a=1$时,$B=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-x+1=0\}=\varnothing$,满足$A\cap B=B$;

当$a=2$时,$B=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-2x+1=0\}=\{1\}$,这时$A\cap B=\{1\}=B$,满足条件;

当$a=3$时,$B=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-3x+1=0\}=\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$,这时$A\cap B=\varnothing$,不满足$A\cap B=B$. 故满足$A\cap B=B$的实数$a$的值为 1 或 2.

【例 4】 已知集合$A=\{x\mid 0<ax+1\leqslant 5\}$,集合$B=\left\{x\,\middle|\,-\frac{1}{2}<x\leqslant 2\right\}$.

(1) 若$A\subset B$,求实数a的取值范围;

(2) 若$B\subset A$,求实数a的取值范围;

(3)A、B能否相等?若能,求出a的值;若不能,试说明理由.

【解析】 在确定集合A时,需要对x的系数a进行讨论. 利用数轴分析,使问题得到解决. 集合A中不等式的解集应分三种情况讨论:

ⅰ) 若$a=0$,则$A=\mathbf{R}$;

ⅱ) 若$a<0$,则$A=\left\{x\,\middle|\,\frac{4}{a}\leqslant x<-\frac{1}{a}\right\}$;

ⅲ) 若$a>0$,则$A=\left\{x\,\middle|\,-\frac{1}{a}<x\leqslant\frac{4}{a}\right\}$.

(1) 当$a=0$时,若$A\subset B$,此种情况不存在.

当 $a<0$ 时,若 $A\subset B$,则 $\begin{cases}\dfrac{4}{a}>-\dfrac{1}{2},\\-\dfrac{1}{a}\leqslant 2,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}a<-8,\\a\leqslant-\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 所以 $a<-8$.

当 $a>0$ 时,若 $A\subset B$,则 $\begin{cases}-\dfrac{1}{a}\geqslant-\dfrac{1}{2},\\\dfrac{4}{a}\leqslant 2,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}a\geqslant 2,\\a\geqslant 2,\end{cases}$ 所以 $a\geqslant 2$.

综上知,当 $A\subset B$ 时,$a<-8$ 或 $a\geqslant 2$.

(2) 当 $a=0$ 时,显然 $B\subset A$;

当 $a<0$ 时,若 $B\subset A$,则 $\begin{cases}\dfrac{4}{a}\leqslant-\dfrac{1}{2},\\-\dfrac{1}{a}>2,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}a\geqslant-8,\\a>-\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 所以 $-\dfrac{1}{2}<a<0$.

当 $a>0$ 时,若 $B\subset A$,则 $\begin{cases}-\dfrac{1}{a}\leqslant-\dfrac{1}{2},\\\dfrac{4}{a}\geqslant 2,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}a\leqslant 2,\\a\leqslant 2,\end{cases}$ 所以 $0<a\leqslant 2$.

综上知,当 $B\subset A$ 时,$-\dfrac{1}{2}<a\leqslant 2$.

(3) 当且仅当 A、B 两个集合互相包含时,$A=B$. 由(1)、(2) 知,$a=2$.

【例 5】 已知二次函数 $f(x)=ax^2+x$ 有最小值,不等式 $f(x)<0$ 的解集为 A.

(1) 求集合 A;

(2) 设集合 $B=\{x\mid |x+4|<a\}$,若集合 B 是集合 A 的子集,求 a 的取值范围.

【解析】 (1) 因为二次函数 $f(x)=ax^2+x$ 有最小值,所以 $a>0$.

因为解不等式 $f(x)=ax^2+x<0$,得集合 $A=\left(-\dfrac{1}{a},0\right)$.

(2) 由 $B=\{x\mid |x+4|<a\}$,解得 $B=(-a-4,a-4)$,

因为集合 B 是集合 A 的子集,所以 $\begin{cases}a>0,\\-a-4\geqslant-\dfrac{1}{a},\\a-4\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $0<a\leqslant\sqrt{5}-2$.

【例 6】 解不等式:$x+\dfrac{3(x+1)}{8}>1-\dfrac{x-5}{2}$.

【解】 去分母,得 $8x+3(x+1)>8-4(x-5)$

去括号,得 $8x+3x+3>8-4x+20$

移项,得 $8x+4x+3x>8-3+20$

合并同类项,得 $15x>25$

系数化为 1,得 $x>\dfrac{5}{3}$.

【例 7】 当 x 为何值时,代数式 $\dfrac{2x+1}{3}-1$ 的值不小于 $\dfrac{3+5x}{4}$ 的值?

【解】 从题目得知 $\dfrac{2x+1}{3}-1\geqslant\dfrac{3+5x}{4}$

所以 $$4(2x+1)-12 \geqslant 3(3+5x)$$
去括号,得 $$8x-15x \geqslant 9+12-4$$
合并同类项,得 $-7x \geqslant 17$

系数化为1,得 $x \leqslant -\frac{17}{7}$.

所以,当 $x \leqslant -\frac{17}{7}$ 时,代数式$\frac{2x+1}{3}-1$ 的值不小于$\frac{3+5x}{4}$ 的值.

【例8】 已知不等式 $5(x-2)+8<6(x-1)+7$ 的最小整数解为方程 $2x-ax=3$ 的解.求代数式 $4a-\frac{14}{a}$.

【分析】 本题是一道将解不等式方程和求代数式值融为一体的综合题,必须"各个击破",即一个一个解决,这也是解综合题的常用方法.

【解】 解不等式 $$5(x-2)+8<6(x-1)+7$$
去括号,得 $$5x-10+8<6x-6+7$$
合并同类项,得 $$8-10+6-7<6x-5x$$
系数化为1,得 $x>-3$

所以此不等式的最小整数解为 $x=-2$.

因为 $x=-2$ 为方程 $2x-ax=3$ 的解,所以

$2\cdot(-2)-a(-2)=3$

故 $a=\frac{7}{2}$.

当 $a=\frac{7}{2}$ 时,$4a-\frac{14}{a}=4\times\frac{7}{2}-\frac{14}{\frac{7}{2}}=10$.

【例9】 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+ax+b$ 的图像过点 $P(0,2)$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处的切线斜率为6,求函数 $y=f(x)$ 的解析式;

(2) 若 $a>3$,求函数 $y=f(x)$ 的单调区间.

【解】 (1)$f'(x)=3x^2+2ax+a$, 从题得知$\begin{cases}f(0)=b=2,\\ f'(-1)=3-2a+a=6,\end{cases}$

得$\begin{cases}a=-3,\\ b=2,\end{cases}$ 故 $f(x)=x^3-3x^2-3x+2$.

(2)$f'(x)=3x^2+2ax+a=0$.

因为 $a>3$,所以 $\Delta=4a^2-12a>0$.

由 $f'(x)>0$ 解得 $x<\frac{-a-\sqrt{a^2-3a}}{3}$ 或 $x>\frac{-a+\sqrt{a^2-3a}}{3}$.

由 $f'(x)<0$ 解得$\frac{-a-\sqrt{a^2-3a}}{3}<x<\frac{-a+\sqrt{a^2-3a}}{3}$.

所以 $f(x)$ 的单调增区间为$\left(-\infty,\frac{-a-\sqrt{a^2-3a}}{3}\right)$和$\left(\frac{-a+\sqrt{a^2-3a}}{3},+\infty\right)$;

$f(x)$ 的单调减区间为$\left(\frac{-a-\sqrt{a^2-3a}}{3},\frac{-a+\sqrt{a^2-3a}}{3}\right)$.

【例 10】 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-bx^2+2x+a$,且 $x=2$ 是 $f(x)$ 的一个极值点.

(1) 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 若当 $x\in[1,3]$ 时,$f(x)-a^2>\frac{2}{3}$ 恒成立,求 a 的取值范围.

【解】 (1) $f'(x)=x^2-2bx+2$,因为 $x=2$ 是 $f(x)$ 的一个极值点,所以 $x=2$ 是方程 $x^2-2bx+2=0$ 的一个根,解得 $b=\frac{3}{2}$.

令 $f'(x)>0$,则 $x^2-3x+2>0$. 解得 $x<1$ 或 $x>2$.

所以函数 $y=f(x)$ 的单调递增区间为$(-\infty,1)$和$(2,+\infty)$.

(2) 因为当 $x\in(1,2)$ 时,$f'(x)<0$;当 $x\in(2,3)$ 时,$f'(x)>0$.
所以 $f(x)$ 在$(1,2)$上单调递减,在$(2,3)$上单调递增.
故 $f(2)$ 是 $f(x)$ 在区间$[1,3]$上的最小值,且 $f(2)=\frac{2}{3}+a$.

若当 $x\in[1,3]$ 时,要使 $f(x)-a^2>\frac{2}{3}$ 恒成立,只需 $f(2)>a^2+\frac{2}{3}$,即$\frac{2}{3}+a>a^2+\frac{2}{3}$,解得 $0<a<1$.

练习题

1. 方程组$\begin{cases}x+y=1,\\x-y=-1\end{cases}$的解集是________.
   (A)$\{x=0,y=1\}$.　　(B)$\{0,1\}$.
   (C)$\{(0,1)\}$.　　(D)$\{(x,y)\mid x=0$ 或 $y=1\}$.
2. 设 A、B 是全集 U 的两个子集,且 $A\subseteq B$,则下列式子成立的是________.
   (A) $\complement_U A\subseteq\complement_U B$.　(B) $\complement_U A\cup\complement_U B=U$.　(C)$A\cap\complement_U B=\varnothing$.　(D) $\complement_U A\cap B=\varnothing$.
3. 下列各项中,不可以组成集合的是________.
   (A) 所有正数.　(B) 约等于 2 的数.　(C) 接近于 0 的数.　(D) 不等于 0 的偶数.
4. 已知集合 $A=\{x\mid ax^2-3x+2=0\}$ 至多有一个元素,则 a 的取值范围是________. 若至少有一个元素,则 a 的取值范围是________.
5. 设集合 $A=\{(x,y)\mid a_1x+b_1x+c_1=0\}$,$B=\{(x,y)\mid a_2x+b_2x+c_2=0\}$,则方程 $(a_1x+b_1x+c_1)(a_2x+b_2x+c_2)=0$ 的解集为________.
6. 已知 $f(x)=m(x-2m)\cdot(x+m+3)$,$g(x)=2^x-2$,若同时满足条件:1) 任意 $x\in\mathbf{R}$,$f(x)<0$ 或 $g(x)<0$;2) 存在 $x\in(-\infty,-4)$,使得 $f(x)g(x)<0$. 则 m 的取值范围是________.
7. 不等式组$\begin{cases}a-1<x<a+2,\\3<x<5\end{cases}$的解集是 $3<x<a+2$,则 a 的取值范围是________.
   (A)$a>1$.　(B)$a\leqslant 3$.　(C)$a<1$ 或 $a>3$.　(D)$1<a\leqslant 3$.
8. 函数 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上是单调递减函数,则 $f(1-x^2)$ 的单调递增区间是________.
9. 若函数 $f(x)=\dfrac{x-4}{mx^2+4mx+3}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,则实数 m 的取值范围是________.
   (A)$(-\infty,+\infty)$.　(B)$\left(0,\frac{3}{4}\right]$.　(C)$\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$.　(D)$\left[0,\frac{3}{4}\right)$.

练习题参考答案

1. C.

2. C.

3. C.

4. $\left\{a \middle| a \geqslant \frac{9}{8} \text{ 或 } a=0\right\}$；$\left\{a \middle| a \leqslant \frac{9}{8}\right\}$.

5. $A \cup B$.

6. $-4<m<-2$.

7. D.

8. $[0,1]$.

9. D.

第 2 讲　极限与连续

2.1　极限

一、极限的概念

1. 数列极限

数列$\{a_n\}$与常数A，如果它们之间满足下列关系："对于任意$\varepsilon>0$，存在$N>0$，当$n>N$时，有$|a_n-A|<\varepsilon$"，则称数列$\{a_n\}$收敛，且收敛于A，记为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，也称"当$n\to\infty$时，$a_n$的极限为$A$".

(1) 此定义称为数列极限的n—N定义.

(2)ε是充分小的正数，它刻画了a_n与A的接近程度，ε可以任意给定，但已经给出后应看成固定不变的，ε可以换成$k\varepsilon$（常数$k>0$）、ε^2等.

(3)N是正整数，它刻画了a_n与A的接近时刻，N随ε的变化而变化，但并非函数关系. 我们关心的是N的存在性，一般不必找出最小的N.

2. 函数极限

(1) 自变量趋于无穷大时函数的极限

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$：任意$\varepsilon>0$，存在$X>0$，使得当$|x|>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$：任意$\varepsilon>0$，存在$X>0$，使得当$x>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$：任意$\varepsilon>0$，存在$X>0$，使得当$x<-X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

【注】 在函数极限中，$x\to\infty$是指$x\to\pm\infty$，而在数列极限中，$n\to\infty$是指$n\to+\infty$.

定理　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

(2) 自变量趋于有限值时函数的极限

1) 极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$：任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

【注】 函数$f(x)$在点x_0处的极限是否存在？如果存在，极限值等于多少？这些问题仅与$f(x)$在点x_0的去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$内的函数值有关，而与$f(x)$在点x_0处是否有定义、如果有定义则函数值等于多少这些问题无关.