学府考研

十年专注·只做考研

2018

线·性·代·数
名师辅导讲义

◎刘贤 编

数学全程答疑

下载答疑APP

基础薄弱考生专用

考研数学复习必备·紧扣同济六版教材

西北工业大学出版社

学府考研
十年专注·只做考研

XIANXING DAISHU MINGSHI FUDAO JIANGYI

线性代数名师辅导讲义

刘贤 编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是严格按照最新颁布《全国硕士研究生入学统一考试大纲》(数学)的要求编写的.本书对考研线性代数部分所要求的知识点进行了全面阐述,并对考试重点、难点以及常考知识点进行了深度剖析,同时,本书优化设计了一定数量的练习题,能够使考生巩固所学知识,提高实际解题能力,实现知识掌握、习题解答的统一.本书中设置的习题具有较好的前瞻性与预测性,对每一道题目都给出了详细的考点分析,并进行了详细的解答,尽可能给出多种解题方法,并进行解题方法、技巧的归纳总结,以期开阔考生的视野,从而达到融类旁通,举一反三的效果.

本书可作为备战2018年研究生入学考试的学生、提前备战2019年研究生入学考试的学生的辅导用书,也可供从事本专业教学的教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数名师辅导讲义 / 刘贤编. —西安 :西北工业大学出版社,2017.4

ISBN 978-7-5612-5308-3

Ⅰ.①线… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①线性代数—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第090113号

策划编辑:杨 军

责任编辑:王 静

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路127号 **邮编:**710072

电 话:(029)88493844 88491757

网 址:www.nwpup.com

印 刷 者:西安东江印务有限公司

开 本:787 mm×1 092 mm 1/16

印 张:17.75

字 数:392千字

版 次:2017年4月第1版 2017年4月第1次印刷

定 价:39.80元

风雨考研路　学府伴你行

“学府考研”是学府教育旗下专业从事考研辅导的品牌！

“学府考研”是一个为实现人生价值和理想而欢聚一堂的团队。2006年从30平方米办公室起步，历经十年，打造了一个考研培训行业的领军品牌。如今学府考研已发展成为集考研培训、图书编辑、在线教育为一体的综合性教育机构，扎根陕西，服务全国。

学府考研的辅导体系满足了考研学子不同层面的需求，主要以小班面授教学、全日制考研辅导、网络小班课为核心，兼顾大班教学、专业课一对一辅导等多层次辅导。学府考研在教学中的“讲、练、测、评、答”辅导体系，解决了考研辅导“只管教，不管学”的问题，保证学员在课堂上听得懂，课下会做题。通过定期测试，掌握学员的学习进度，安排专职教师答疑，保证学习效果。总结多年教学实践经验，学府考研逐渐形成了稳定的辅导教学体系，尽量做到一个学员一套学习计划、一套辅导方案，大大降低了学员考取目标院校的难度。在公共课教学方面实现零基础教学，在专业课方面，建立了遍及全国各大高校的研究生专业信息资源库，解决考生跨院校、跨专业造成的信息不对称、复习资料缺乏等难题。

“学府考研”的使命是帮助每一个信任学府的学员都能考上理想院校。

学府文化的核心是“专注文化”。

“十年专注，只做考研”。因为专业，所以深受万千考研学子信赖！

“让每一个来这里的考研学子都成为成功者”。正是这种责任，让学府考研快速成为考生心目中当仁不让的必选品牌。

人生能有几回搏，三十年太长，只争朝夕！

同学们，春华秋实，为了实现理想，努力吧！

学府考研总部 | 全国统一客服电话 | 400-090-8961
陕西·西安友谊东路75号新红锋大厦三层

学府官方微博

学府官方微信

致学府图书用户

亲爱的学府图书用户：

您好！欢迎您选择学府图书，感谢您信任学府！

“学府图书”是学府考研旗下专业从事考研教辅图书研发的图书公司！

为了更好地为您提供“优质教学、始终如一”的服务，对于您所提出的宝贵意见与建议，我们向您深表感谢！

若我们的图书质量或服务未达到您的期望，敬请您通过以下联系方式进行告知。我们珍视并诚挚地感谢您的反馈，谢谢您！

在此祝您学习愉快！

学府图书全国统一客服电话：400-090-8961

学府图书质量及服务监督电话：15829918816

学府图书总经理投诉电话：张城 18681885291 投诉必复！

您也可将信件投入此邮箱：34456215@ qq. com 来信必回！

图书微博　　图书微信　　图书微店

前　言

代数作为基础数学的三大分支之一，其重要性不言而喻.在数学中，凡是以“代数”两字命名的课程均非常抽象，研究问题所站的层面一定很高.而以“线性”两字命名的课程则比较简单，因为在所有的数学问题中，线性问题较为简单.因此，线性代数是数学的抽象课程中比较简单的一门.

然而，大部分学生在最初学习这门课程时还是会有“云里雾里”的感觉，甚至是“不识庐山真面目，只缘身在此山中”.之所以有这种感觉，是因为线性代数的抽象性使得考生难以抓住以下三点.

一、线性代数的核心

线性代数的核心是什么呢？答案简单明了——向量.向量是线性代数的主要研究对象，它可以串联线性代数中的所有概念.向量好比人体的“任督二脉”，学好向量，就如同打通了“任督二脉”，学通了向量这一章，就能够将线性代数的每一章都学通.因此，考生对向量这一章节的掌握程度显得尤为重要.

向量这一章主要研究两个问题：一是一个向量组的线性相关性；二是两个向量组之间的线性相关性.

对于第一个问题，主要有 3 个概念需要掌握：线性表示、线性相关(线性无关)、极大线性无关组.这 3 个概念非常抽象，掌握起来较为困难.通俗地讲，这 3 个概念主要对应 3 个问题：①在任给的一组向量中，是否有“多余”的向量，什么是“多余”？该问题对应的是线性表示.试想一下，若一个向量可以被其余向量表示，则这个向量在这一组向量中一定是“多余”的.②在任意一组向量中，如何快速地判断有没有“多余”的向量.这个问题对应的是线性相关(线性无关).线性相关意味着有“多余”的向量，线性无关意味着没有“多余”的向量.③在一组向量中，若有“多余”的向量，则如何找出多余的向量，并用剩下的向量表示那些“多余”的向量.这个问题对应的是极大线性无关组这一概念.在一组向量中，把“多余”的向量剔除掉，剩下的向量放在一起称为该向量组的一个极大线性无关组.这个极大线性无关组是该向量组的本质，“抓住”它就等于“抓住了”该向量组.

上述 3 个问题贯穿于整个线性代数始终，无论考生现在能否看懂，都需谨记！带着这 3 个问题去学习线性代数，会轻松很多，思路也会更加开阔！

二、线性代数的研究思路

我们知道，向量是线性代数的主要研究对象.同时，在高等数学中，对向量我们已经有所研究.高等数学中的向量没有太多的研究价值，因为向量无非就两点内容：一是大小；二是方向.向量的大小也就是向量的长度，拿尺子量一下就知道了；而向量的方向也只需要拿测角仪测一下就可以了！向量的大小和方向以及内积、外积、混合积在高等数学中已经有了透彻的研究.那么，

向量还有什么可研究的内容呢?

之所以说线性代数所站的层面比较高,是因为高等数学只是在微观层面上研究一个一个的向量,而线性代数是在宏观层面上研究一组一组的向量.

任给一组杂乱无章的向量,如何快速找出它的本质呢?其实很简单,只需将这个向量组中"多余"的向量剔除,剩余的向量就是这组向量的本质所在.这些非"多余"的向量就是我们上面所说的极大线性无关组.因此,"抓住了"一个向量组的极大线性无关组就等于"抓住了"这个向量组的"要害".

三、解决线性代数问题的工具

线性代数的主要研究对象是向量,以向量为核心衍生出大量问题.比如,矩阵秩的求解、矩阵方程的求解、齐次和非齐次线性方程组通解的求解、向量组的极大线性无关的求解等.在线性代数中,解决这些问题有一个共同的思路,那就是,对任意一个复杂的问题,通过一个工具,将其化为一个简单的同解问题,然后通过对这个同解问题的求解,来达到对这个复杂问题的求解.这个将复杂问题化为简单问题的工具就是——初等变换.

在整个线性代数中,几乎所有问题都能通过初等变换进行求解.初等变换之所以能将一个复杂问题化为简单问题去求解,是因为初等变换不会改变这个问题的解以及性质.初等变换不会改变问题的哪些性质呢?请考生仔细阅读本书以得到答案.

在此,笔者可以肯定一点,作为专业的考研辅导书籍,本书内容涵盖全面,只要认真钻研本书内容,再加以相应习题进行练习.相信考生定能在线性代数这门课程上取得理想成绩.

编写本书曾参阅了相关书籍资料,在此谨向其作者深表谢忱.

由于水平所限,书中难免有所漏洞甚至错误之处,恳请读者指教.

刘　贤

2016 年 12 月

目　录

第一部分　名师讲义

第二部分 典型习题及解答

第一部分

名师讲义

第1章 行列式

线性代数是产生于人们探索解线性方程组的过程中的一门学科.在研究线性方程组时，人们发现一个方程组是否有解与该方程组的系数有直接的关系.这种关系早在1693年4月，莱布尼茨在写给洛必达的一封信中已经提出，并给出了行列式的概念.在本章中，考生需要掌握行列式的定义、性质及其行列式的一般计算方法.

1.1 n 阶行列式

一、全排列及其逆序数

1. 全排列

定义 1 把 n 个不同的元素排成一列，叫作这 n 个元素的**全排列**(也称为 n 元全排列).

例如：1234，2314 都是 4 元排列；341562 是 6 元排列.

名师点拨

(1) 一般情况下，在这 n 个元素的全排列中，把这 n 个元素分别记为 $1,2,\cdots,n$，因此，n 个元素的全排列就是 $1,2,\cdots,n$ 的排列.例如，4，2，3，1 就是一个 4 元全排列.

(2) n 元全排列一共有 $n!$ 种.例如，3 元排列有 $3!=6$ 种，它们分别为

123　132　213　231　312　321

2.逆序

定义 2 若一个 n 元全排列是由小到大进行排列的，则称此 n 元全排列为**标准排列**.

名师点拨

n 元标准排列只有一个，即 $1,2,\cdots,n$.

定义 3 在一个 n 元全排列中，如果某两个元素，大的排在小的前面，则称这两个元素构成一个**逆序**.在一个 n 元全排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中，逆序的总数称为这个全排列的**逆序数**，记为 $\tau(i_1,i_2,\cdots,i_n)$.

例如，因为 3 元排列 312 中 3 与 2 构成一个逆序，且 3 与 1 构成一个逆序，所以 $\tau(312)=2$.

名师点拨

对于任一全排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数，有

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=\sum_{k=1}^{n}t_k$$

其中，t_k 是第 k 个元素的逆序数，即在全排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，比 i_k 大且排在 i_k 前面的元素的个数.例如，$i_1=0$，因为排在 i_1 前面且比 i_1 大的数不存在.

例 1　求 362154 的逆序数.

【分析】 从左至右依次计算每个数前面比它大的数的个数，再求和.

【解析】 因为在全排列 362154 中：排在 3 前面且比 3 大的没有；排在 6 前面且比 6 大的也没有；排在 2 前面且比 2 大的有 2 个；排在 1 前面且比 1 大的有 3 个；排在 5 前面且比 5 大的有 1 个；排在 4 前面且比 4 大的有 2 个，所以，$\tau(362154)=2+3+1+2=8$.

例 2　求排列 $135\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$ 的逆序数.

【解析】

$$\begin{aligned}&\tau[135\cdots(2n-1)24\cdots(2n)]\\&=0+0+\cdots0+(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0=\frac{n(n-1)}{2}\end{aligned}$$

定义 4　逆序数为奇数的全排列叫作奇排列，逆序数为偶数的全排列叫作偶排列.

定义 5　在一个全排列中，将任意两个元素的位置对调，其余的元素不动，这种在一个全排列中，作出一次对调的过程称为一次对换.

名师点拨

在一个全排列中，将任意两个元素作一次对换，则改变全排列的奇偶性.即一个奇排列经过一次对换后就变成偶排列，而一个偶排列经过一次对换就变成奇排列.

二、n 阶行列式的定义

定义 6　由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的如下记号：

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，记为 $\det(a_{ij})$ 或 D_n，下角标 n 表示行列式的阶数，有时候在上下文不至于混淆的情况下，也记 D_n 为 D，其中 a_{ij} 为第 i 行第 j 列的元素.

规定：n 阶行列式是所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和，即

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

特别地，规定一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$.

名师点拨

(1)2 阶行列式：$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

(2)3 阶行列式：

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

(3) 行列式本质上是一个代数式.

(4)n 阶行列式的展开式是 $n!$ 项的代数和，且这 $n!$ 项中的每一项都是来自 n 阶行列式中的不同行不同列元素的乘积.

(5) 主对角线以下(上) 的元素都为 0 的行列式称为上(下) 三角形行列式，主对角线以下和以上的元素都为 0 的行列式叫做对角行列式.如下所示：

① 上三角行列式：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

② 下三角行列式：$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

③ 对角行列式：$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

④ 副对角行列式：$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

(6) 若记 $D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，$D_n^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则称行列式 D_n^{T} 为行列式 D_n 的转置行列式.

例 3 计算 3 阶行列式：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$.

【解析】 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1\times 2\times(-2) + 2\times 1\times(-3) + (-2)\times 4\times(-4)$

$$-(-4)\times 2\times(-3) - 2\times(-2)\times(-2) - 1\times 1\times 4$$

$$= -4 - 6 + 32 - 24 - 8 - 4 = -14$$

例 4 解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$.

【解析】 方程左端的 3 阶行列式为

$$D = 3x^2 + 4x + 18 - 12 - 9x - 2x^2 = x^2 - 5x + 6$$

由 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 解得 $x = 2$ 或 $x = 3$.

例 5 填空题：

(1) 在 5 阶行列式中，项 $a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25}$ 的符号为__________；

(2) 在 4 阶行列式中，带负号且包含元素 a_{23} 和 a_{31} 的项为__________；

(3) 若 n 阶行列式中等于 0 的元素个数大于 $n^2 - n$，则此行列式的值为__________.

【解析】 应填(1) 正，(2)$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$，(3)0.

(1) 方法一：将该项按照自然顺序排列，有 $a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25} = a_{12}a_{25}a_{31}a_{43}a_{54}$，后者按照列标排列的逆序数 $\tau(25134) = 4$，故符号为正.

方法二：直接计算行标的逆序数和列标的逆序数，有

$$\tau(13542) + \tau(21435) = 6$$

故符号为正.

(2) 由行列式的定义可知，包含元素 a_{23} 和 a_{31} 的项必为 $a_{1i}a_{23}a_{31}a_{4j}$，其中 i,j 为 2,4 或 4,2，又因为此项的符号为负，所以 $i31j$ 为奇排列，从而 $i = 4, j = 2$.

(3)n 阶行列式中，共有 n^2 个元素，若等于 0 的元素个数大于 $n^2 - n$，则不等于 0 的元素个数就小于 n，又因为 n 阶行列式的每一项是 n 个元素的乘积，所以必定为 0，从而此行列式的值也为 0.

例 6 已知 $a_{5i}a_{42}a_{33}a_{21}a_{k4}$ 是 5 阶行列式的一项，试问 i,k 应该取何值？并确定项的符号.

【解析】 由于行列式中的元素取自不同行不同列，所以

将行标取出 $5432k$ 应是一个 5 级排列，$k = 1$；

将列标取出 $i2314$ 应是一个 5 级排列，$i = 5$；

该项的符号为 $(-1)^{\tau(54321)+\tau(52314)} = (-1)^{10+6} = 1$，即该项取正号.

例 7 设 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 2x & 1 & 0 \\ 1 & 3x & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2x & -2 \\ 1 & 1 & -1 & x \end{vmatrix}$，则其中展开式中 x^4 的系数为________，x^3 的系数为________.

【解析】 应填 6，-4.

在 $f(x)$ 的展开式中只有 $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$ 相乘才会出现 x^4，而列标构成的全排列 1234 的逆序数为 0，所以含 x^4 的项为 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=6x^4$，即 x^4 的系数为 6. 只有 $a_{12}, a_{21}, a_{33}, a_{44}$ 相乘才会出现 x^3，而列标构成的全排列 2134 的逆序数为 1，所以含 x^3 的项为 $-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=-4x^3$，即 x^3 的系数为 -4.

三、n 阶行列式的性质

由 n 阶行列式的定义可知，用定义计算一个 n 阶行列式（当阶数 n 比较大时）比登天还难，那么是否有一些比较简单的方法计算 n 阶行列式呢？答案是肯定的，但必须熟悉 n 阶行列式的下述性质：

性质 1 设 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，记 $D_n^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，行列式 D_n^{T} 称为行列式 D_n 的**转置行列式**，则有 $D_n=D_n^{\mathrm{T}}$ 成立，即 n 阶行列式与它的转置行列式相等.

名师点拨

由于行列式的行和列具有平等的地位，则把行列式的行变成列、列变成行之后得到的转置行列式与原行列式相等. 因此，行列式中凡是行具有的性质，列也同样具有.

性质 2 若行列式中有某一行（或某一列）的元素全为零，则该行列式等于零. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0，且 \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

性质 3 若一个数 k 乘以行列式的某一行（某一列）中的所有元素等于这个数 k 乘以整个行列式，即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

且
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 4　交换行列式的某两行(某两列),行列式变号,即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

且
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 5　若行列式有某两行(某两列)的元素对应相同,则行列式等于零,即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{且} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

性质 6　若行列式的某两行(某两列)对应元素成比例,则该行列式等于零,即有