

高等院校应用型本科“十三五”规划教材·数学类

X 线性代数

IANXING DAISHU

(第二版)

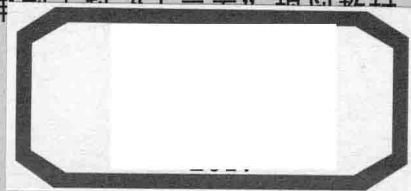
主编 蒋磊 吴小霞 肖艳



华中科技大学出版社

<http://www.hustp.com>

高等院校应用数学类教材 数学类



X 线性代数

IANXING DAISHU

(第二版)

主 编 蒋 磊 吴小霞 肖 艳
编 委 (按姓氏笔画排序)
马建新 朱家砚 李丽容
陈 芬 孟晓华 黄 敏
程淑芳 童丽珍 强静仁



华中科技大学出版社

<http://www.hustp.com>

中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/蒋磊,吴小霞,肖艳主编.—2版.—武汉:华中科技大学出版社,2017.4
ISBN 978-7-5680-2715-1

I. ①线… II. ①蒋… ②吴… ③肖… III. ①线性代数-高等学校-教材
IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 068115 号

线性代数(第二版)

蒋 磊 吴小霞 肖 艳 主编

Xianxing Daishu

策划编辑:曾 光

责任编辑:史永霞

封面设计:孢 子

责任监印:朱 玢

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

电话:(027)81321913

武汉市东湖新技术开发区华工科技园

邮编:430223

录 排:华中科技大学惠友文印中心

印 刷:黄冈市新华印刷有限责任公司

开 本:710mm×1000mm 1/16

印 张:15.5

字 数:274千字

版 次:2017年4月第2版第1次印刷

定 价:38.00元



本书若有印装质量问题,请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线:400-6679-118 竭诚为您服务
版权所有 侵权必究

序

课本乃一课之“本”。虽然高校的教材一般不会被称为“课本”，其分量也没有中小学课本那么重，但教材建设实为高校的基本建设之一，这大概是多数人都接受或认可的。

无论是教还是学，教材都是不可或缺的。一本好的教材，既是学生的良师益友，亦是教师之善事利器。应该说，这些年来，我国的高校教材建设工作取得了很大的成绩。其中，举全国之力而编写的“统编教材”和“规划教材”，为千百万人的成才做出了突出的贡献。这些“统编教材”和“规划教材”无疑具有权威性；但客观地说，随着我国社会改革的深入发展，随着高校的扩招和办学层次的增多，以往编写的各种“统编教材”和“规划教材”，就日益显露出其弊端和不尽如人意之处。其中最为突出的表现在于两个方面。一是内容过于庞杂。无论是“统编教材”还是“规划教材”，由于过分强调系统性与全面性，以至于每本教材都是章节越编越长，内容越写越多，不少教材在成书时接近百万字，甚至超过百万字，其结果既不利于学，也不便于教，还增加了学生的经济负担。二是重理论轻技能。很多“统编教材”和“规划教材”都有一个通病，即理论知识的分量相当重甚至太重，技能训练较少涉及。这样的教材，不要说“二本”、“三本”的学生不宜使用，就是一些“一本”的学生也未必合适。

现代高等教育背景下的本专科合格毕业生应该同时具备知识素质和技能素质。改革开放以后，人们都很重视素质教育；毫无疑问，素质教育中少不了知识素质的培养，但是仅注重学生知识素质的培养而轻视实际技能的获得肯定是不对的。我们都知道，在任何国家和任何社会，高端的研究型人才毕竟是少数，应用型、操作型人才才是社会所需的大量人才。因此，对于“二本”尤其是“三本”及高职高专的学生来说，在大学阶段的学习中，其知识素质与技能素质的培养具有同等的重要性。从一定意义上说，为了使其动手能力和实践能力明显强于少数日后从事高端研究的人才，这类学生技能素质的培养甚至比知识素质的培养还要重要。

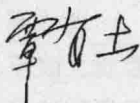
学生技能素质的培养涉及方方面面，教材的选择与使用便是其中重要的一环。正是基于上述考虑，在贯彻落实科学发展观的活动中，我们结合“二本”尤其是“三本”及高职高专学生培养的实际，组织编写了这一套教材。这一套教材

与以往的“统编教材”和“规划教材”有很大的不同。不同在哪里?其一,体例与内容有所不同。每本教材一般不超过40万字。这样,既利于学,亦便于教。其二,理论与技能并重。在确保基本理论与基本知识不能少的前提下,注重专业技能的训练,增加专业技能训练的内容,让“二本”、“三本”及高职高专的学生通过本、专科阶段的学习,在动手能力上明显强于研究生和“一本”的学生。当然,我们的这些努力无疑也是一种摸索。既然是一种摸索,其中的不足和疏漏甚至谬误就在所难免。

武汉学院在本套教材的组织编写活动中,为了确保质量,成立了以主管教学的副院长徐仁璋教授为主任的教材建设委员会,并动员校内外上百位专家学者参加教材的编写工作。在这些学者中,既有曾经担任国家“规划教材”、“统编教材”的主编或撰写人的老专家,也有教学经验丰富、参与过多部教材编写的年富力强的中年学者,还有很多硕士、博士及博士后等青年才俊。他们之中不少人都已硕果累累,因而仅就个人的名利而言,编写这样的教材对他们并无多大意义。但为了教育事业,他们都能不计个人得失,甘愿牺牲大量的宝贵时间来编写这套教材,精神实为可嘉。在教材的编写和出版过程中,我们还得到了众多前辈、同人及方方面面人士的关心、支持和帮助。在此,对本套教材的面世而付出辛勤劳动的所有单位和个人表示衷心的感谢。

最后,恳请学界同人和读者对本套教材提出宝贵的批评和建议。

武汉学院院长



2011.7.16



前言

随着高等院校的教育教学观念的不断更新、教学改革的不深入和办学规模的不断扩大,作为数学教学三大基础之一的线性代数开设的专业覆盖面也在不断扩大.针对这一发展现状,本教材在编写时,既做到教学内容在深度和广度方面达到教育部高等学校“线性代数”教学的基本要求,又注重线性代数概念的直观性引入,加强学生分析和解决实际问题能力的培养,力求做到易教、易学.

本书主要特点如下.

- 理论与实际应用有机结合.大量的实际应用贯穿于理论讲解的始终,体现了线性代数在各个领域中的广泛应用.

- 习题安排科学合理.每一节的后面给出了同步习题,并做了分类,其中 $\langle A \rangle$ 为基础题, $\langle B \rangle$ 为提高题,每一章(第 6 章除外)后面还有涵盖全章内容重难点的总习题,学生可根据自身基础和教学要求进行针对性练习,达到触类旁通的效果.

- 紧密结合数学软件 Matlab. 最后一章介绍了目前国际公认的最优秀的工程应用开发软件——Matlab 的基本用法及与线性代数相关的基本命令,并更新为主流的 R2013b 版本.

- 数学名家介绍. 每章最后都介绍了一位数学名家的故事,以增强读者的学习兴趣,丰富读者的数学修养.

- 考研真题. 附录 A 收集了 2007—2016 年硕士研究生入学考试(数学三)试题(线性代数部分),并给出了参考答案,供有更高要求的学生进行选择练习.

本书是对武汉学院强静仁主编的《线性代数》的修订,改正了一些错误和不妥之处,并对内容做了重新调整;每章内容均有一些增删,在原版的风格与体系基础上做了进一步完善和更新,力求结构严谨、叙述清晰、例题典型、习题丰富,可供高等学校经管类专业和工科学生选作教材或参考书.通过修订,读者使用起来会更加方便、实用.

本书共 6 章,参加本次修订的有武汉学院蒋磊(第 1 章、第 2 章并统稿)、吴小霞(第 4 章、第 6 章)、肖艳(第 3 章)、孟晓华(第 5 章)、朱家砚(附录 A).在教

材的修订过程中,我们得到了武汉学院领导给予的大力支持,也得到了许多同行的热切帮助,在此表示衷心感谢!

教材中难免有疏漏和不足之处,欢迎广大读者、专家批评指正。

编 者

2016 年 12 月

目录

CONTENTS

第 1 章	行列式	(1)
1.1	2 阶、3 阶行列式	(1)
1.2	n 阶行列式	(4)
1.3	行列式的性质	(10)
1.4	行列式按行(列)展开	(17)
1.5	克莱姆(Cramer)法则	(24)
	数学家——克莱姆	(29)
	第 1 章总习题	(29)
第 2 章	矩阵	(35)
2.1	矩阵的概念和特殊矩阵	(35)
2.2	矩阵的运算	(38)
2.3	矩阵的逆	(47)
2.4	矩阵的初等变换	(53)
2.5	矩阵的秩	(66)
2.6	分块矩阵	(71)
	数学家——凯莱	(79)
	第 2 章总习题	(81)
第 3 章	线性方程组	(86)
3.1	线性方程组解的判别	(86)
3.2	向量与向量组	(94)
3.3	向量组的秩	(103)
3.4	线性方程组解的结构	(108)
3.5	线性方程组在经济学中的应用——投入产出模型	(115)
	数学家——高斯	(123)
	第 3 章总习题	(125)

第 4 章	矩阵的相似	(129)
4.1	矩阵的特征值与特征向量	(129)
4.2	相似矩阵及矩阵的对角化	(135)
4.3	实对称矩阵的对角化	(142)
	数学家——若尔当	(150)
	第 4 章总习题	(151)
第 5 章	二次型	(153)
5.1	二次型及其矩阵表示	(153)
5.2	二次型的标准形	(157)
5.3	正定二次型及正定矩阵	(163)
	数学家——西尔维斯特	(165)
	第 5 章总习题	(167)
* 第 6 章	Matlab 与线性代数	(168)
6.1	Matlab R2013b 概述	(168)
6.2	数组与矩阵	(170)
6.3	矩阵的运算	(172)
6.4	利用 Matlab 求解线性方程组	(177)
6.5	利用 Matlab 求矩阵的特征值及特征向量	(180)
6.6	用 Matlab 优化工具箱解线性规划	(183)
	数学家——哈密顿	(190)
附录 A	2007—2016 年硕士研究生入学考试(数学三)试题	(193)
部分参考答案		(202)
参考文献		(237)

第 1 章 行列式

一门科学,只有当它成功地运用数学时,才能达到真正完善的地步.

——马克思

行列式是在求解线性方程组的过程中产生的,现已成为线性代数的一个重要组成部分.行列式不仅是研究矩阵和线性方程组等数学问题的重要工具,而且在经济、管理及工程技术等领域也有着极其广泛的应用.

本章以 2 阶与 3 阶行列式为基础,引入 n 阶行列式的概念,研究其性质并给出利用行列式求解线性方程组的克莱姆(Cramer)法则.

1.1 2 阶、3 阶行列式

1.1.1 2 阶行列式

称

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

为 2 阶行列式,其中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 称为 2 阶行列式 D 的元素,横排称为行,竖排称为列.元素 a_{ij} ($i, j = 1, 2$) 的第一个下标称为行标,第二个下标称为列标,表明该元素位于行列式的第 i 行第 j 列.

例如,元素 a_{12} 位于行列式的第 1 行第 2 列,元素 a_{22} 位于行列式的第 2 行第 2 列.

从左上角到右下角的实线称为行列式的主对角线,从右上角到左下角的虚线称为行列式的次对角线.2 阶行列式等于主对角线上元素的乘积减去次对角线上元素的乘积,这种计算方法称为对角线法则(见图 1-1).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

图 1-1

例 1 计算 2 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$.

解 $D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times 3 - 4 \times 2 = 1$.

例 2 试问 x 取何值时, 2 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} x & x-1 \\ 2 & x+5 \end{vmatrix} = 0$?

解 由 $D = \begin{vmatrix} x & x-1 \\ 2 & x+5 \end{vmatrix} = x \cdot (x+5) - 2 \cdot (x-1) = 0$

得一元二次方程

$$x^2 + 3x + 2 = 0, \quad \text{即} \quad (x+1)(x+2) = 0,$$

故当 $x_1 = -1$ 或 $x_2 = -2$ 时, 有 $D = \begin{vmatrix} x & x-1 \\ 2 & x+5 \end{vmatrix} = 0$ 成立.

1.1.2 3 阶行列式 ■ ■ ■ ■ ■

称

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \quad (1.1.1)$$

为 3 阶行列式.

式(1.1.1)所确定的 3 阶行列式可以利用“对角线法则”(见图 1-2)或“沙路法则”(见图 1-3)来描述, 每条实线上的三个元素的乘积带正号, 每条虚线上的三个元素的乘积带负号.

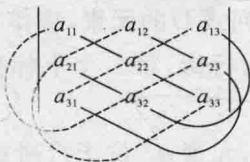


图 1-2

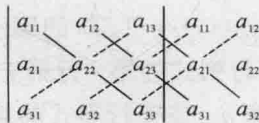


图 1-3

例 3 计算 3 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ 的值.

解 利用“沙路法则”计算, 有

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 3 + 3 \times 1 \times 1 + (-1) \times 2 \times 3 - (-1) \times 2 \times 1 - 1 \times 1 \times 3 - 3 \times 2 \times 3 = -16.$$

例4 解方程 $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

解 由3阶行列式的定义得

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3x^2 - 2x - 1 = 0,$$

即 $(x-1)(3x+1) = 0,$

故 $x = 1$ 或 $x = -\frac{1}{3}.$

习题 1.1

< A >

1. 计算下列2阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix};$

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix};$

(3) $\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix};$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix};$

(5) $\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix};$

(6) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix};$

(7) $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix};$

(8) $\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix}.$

2. 计算下列3阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix};$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix};$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix};$

$$(5) \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$(6) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$(7) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$(8) \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}.$$

3. 试问 x 为何值时, 3 阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$?

< B >

1. 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} \frac{t+2}{1-t} & \frac{1}{1+t} \\ 1+t^3 & 1-t^2 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \log_b a \\ 0 & \log_a b & 0 \end{vmatrix} \quad (a > 0, b > 0 \text{ 且 } a \neq 1, b \neq 1).$$

2. 解下列方程:

$$(1) \begin{vmatrix} x+1 & 2 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0;$$

$$(2) \begin{vmatrix} x-1 & x-2 \\ x+1 & x+2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(3) \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & x+1 & 2 \\ 0 & 0 & x+2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

3. 证明等式:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

1.2 n 阶行列式

为了定义 n 阶行列式, 首先引入排列的相关概念.

1.2.1 排列与逆序 ■ ■ ■ ■ ■

定义 1.2.1 由正整数 $1, 2, \dots, n$ 组成的不重复的有序数组 $i_1 i_2 \dots i_n$ 称为一个 n 级排列(简称排列).

例如, 2314 和 4123 都是 4 级排列, 6732415 是一个 7 级排列.

定义 1.2.2 在一个 n 级排列 $i_1 \dots i_s \dots i_t \dots i_n$ 中, 若数 $i_s > i_t$ (前面的数大于后面的数), 则称 i_s 与 i_t 构成一个逆序. 一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数, 记为 $\tau(i_1 i_2 \dots i_n)$.

例 1 计算 5 级排列 41253 和排列 35124 的逆序数.

解 排在 4 后且比 4 小的数有 3 个, 排在 1 后比 1 小的数有 0 个, 排在 2 后比 2 小的数有 0 个, 排在 5 后比 5 小的数有 1 个, 3 在最后不需考虑, 故该排列的逆序数

$$\tau(41253) = 3 + 0 + 0 + 1 = 4.$$

同理可得

$$\tau(35124) = 5.$$

定义 1.2.3 逆序数为偶数的排列称为偶排列, 逆序数为奇数的排列称为奇排列.

例如, 例 1 中的排列 41253 是偶排列, 排列 35124 是奇排列.

定义 1.2.4 将排列 $i_1 \dots i_s \dots i_t \dots i_n$ 中的某两个数 i_s 与 i_t 的位置互换, 其余的数不动, 即可得到一个新的排列 $i_1 \dots i_t \dots i_s \dots i_n$, 这一变换称为对换, 记为对换 (i_s, i_t) .

例如, 对排列 41253 施以对换 $(1, 5)$ 后, 得到新的排列 45213, 其逆序数为 7, 它是一个奇排列.

定理 1.2.1 任意一个排列经过一次对换后奇偶性改变.

定理 1.2.2 n 级排列共有 $n!$ 个, 且奇偶排列各占一半.

1.2.2 n 阶行列式的定义 ■ ■ ■ ■ ■

观察 3 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32},$$

易见:

(1) 左端由 3^2 个数排成 3 行 3 列;

(2) 右端共有 $3!$ 项, 每项都是不同行不同列的 3 个元素的乘积;

(3) 带正号的项和带负号的项的个数相同, 且所带符号与下标有关——每一项的 3 个元素的行标所成的排列都是 123, 列标所成的排列是偶排列则带正号, 否则带负号.

于是, 3 阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3},$$

其中, $j_1 j_2 j_3$ 为 3 级排列.

由此, 给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.2.5 将 n^2 个数 a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$) 排成 n 行 n 列, 称

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (1.2.1)$$

为 n 阶行列式, 记为 $D_n = |a_{ij}|$ 或 $D_n = \det(a_{ij})$. 数 a_{ij} 称为行列式的元素, 位于行列中的第 i 行第 j 列. 不需要指出行列式的阶数时, 可省略下标 n , 即 $D = |a_{ij}|$.

n 阶行列式表示取自不同行不同列的 n 个元素的代数和, $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 称为行列式 D 的一般项, 其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为 n 级排列, 即当这一项的元素的行标按顺序排列时, 该项的符号取决于相应列标排列的奇偶性, 偶排列取正号, 奇排列取负号; $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对自然数 $1, 2, \dots, n$ 的所有 n 级排列

对应的项进行求和. 当 $n = 1$ 时, 规定 $|a| = a$.

例 2 判断 $-a_{11} a_{23} a_{34} a_{45} a_{56} a_{62}$ 和 $a_{14} a_{23} a_{31} a_{42} a_{56} a_{65}$ 是否为 6 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 中的项.

解 显然 $a_{11} a_{23} a_{34} a_{45} a_{56} a_{62}$ 是 6 阶行列式中不同行不同列的 6 个元素的乘积, 且行标组成的排列为 123456, 列标组成的排列为 134562, 该排列为偶排列, 故 $-a_{11} a_{23} a_{34} a_{45} a_{56} a_{62}$ 不是 6 阶行列式中的项. 同理可得, $a_{14} a_{23} a_{31} a_{42} a_{56} a_{65}$ 是 6 阶行列式中的项.

例 3 计算 4 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

解 由定义 1.2.5 得

$$D = \sum_{j_1, j_2, j_3, j_4} (-1)^{\tau(j_1, j_2, j_3, j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4},$$

和式中只有当 $j_1 = 4, j_2 = 2, j_3 = 1, j_4 = 3$ 时, $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} \neq 0$, 所以

$$D = (-1)^{\tau(4213)} a_{14} a_{22} a_{31} a_{43} = (-1)^4 \times 1 \times 2 \times (-1) \times 4 = -8.$$

例 4 证明下三角行列式 $D =$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

证明 由定义 1.2.5 得

$$D = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \dots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

和式中只有 $j_1 = 1, j_2 = 2, \dots, j_n = n$ 时, $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \neq 0$, 所以

$$D = (-1)^{\tau(12 \cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

类似地, 上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

特别地, 对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

利用排列对换的性质, 得到行列式的等价定义.

定义 1.2.5' n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 还可以写成

$$\begin{aligned} D = |a_{ij}| &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} (-1)^{\tau(i_1, i_2, \dots, i_n) + \tau(j_1, j_2, \dots, j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} \\ &= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} (-1)^{\tau(i_1, i_2, \dots, i_n) + \tau(j_1, j_2, \dots, j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} \\ &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} (-1)^{\tau(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}. \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 与 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为 n 级排列.

例 5 分别计算下列行列式的值:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 5 \\ -4 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -5 & 5 \\ -4 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 (1) 由定义 1.2.5' 知, 只有当 $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} a_{i_3 j_3} a_{i_4 j_4} a_{i_5 j_5}$ 中的每一个元素都不为零时, 该项才不等于零, 故我们从含有零元素最多的行开始选取元素, 得到

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 5 \\ -4 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ 不等于零的项是 } (-1)^{\tau(45321)+\tau(31425)} a_{43} a_{51} a_{34} a_{22} a_{15} \text{ 和}$$

$$(-1)^{\tau(45321)+\tau(31452)} a_{43} a_{51} a_{34} a_{25} a_{12}, \text{ 因此}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 5 \\ -4 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(45321)+\tau(31425)} a_{43} a_{51} a_{34} a_{22} a_{15}$$

$$+ (-1)^{\tau(45321)+\tau(31452)} a_{43} a_{51} a_{34} a_{25} a_{12} \\ = 2 \times 4 \times 2 \times 1 \times 1 - 2 \times 4 \times 2 \times 5 \times 2 = -144.$$

(2) 类似(1)的解法, 从含有零元素最多的列开始选取元素, 可以得到

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -5 & 5 \\ -4 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ 不等于零的项是 } (-1)^{\tau(24315)+\tau(23415)} a_{22} a_{43} a_{34} a_{11} a_{55} \text{ 和}$$

$$(-1)^{\tau(24315)+\tau(23451)} a_{22} a_{43} a_{34} a_{15} a_{51}, \text{ 因此}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -5 & 5 \\ -4 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(24315)+\tau(23415)} a_{22} a_{43} a_{34} a_{11} a_{55}$$

$$+ (-1)^{\tau(24315)+\tau(23451)} a_{22} a_{43} a_{34} a_{15} a_{51}$$