数学讲义提纲

（三）

北京中医学院

1974.2

目　录

第八章　优选法

数学讲义提纲

（三）

北京中医学院

1974.2

第五章 几何与三角

§5-1 关于几何学的绪论

一、空间形式的抽象

1. 恩格斯说过："纯粹数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系""和数的概念一样，形的概念也完全是从外部世界得来的，而不是在头脑中由纯粹的思维产生出来的。必须先存在具有一定形状的物体，把这些形状加以比较，然后才能构成形的概念。"几何学的产生和发展充分说明这一切。数学决不是杜林所说的什么能够脱离经验的模式，数与形更不是杜林所歪曲的什么由数学本身创造的对象。

图形比数更现实具体，人类认识它也就更早。我国出土的殷代甲骨文中已有规和矩这两个字，也出现了田字。在殷周两代遗下的青铜器上花纹都是十分美丽而准确的几何图案。在西方，相传几何学是在四千年以前发源于埃及。埃及的尼罗河两岸土地肥沃，农产丰富，因此，埃及文化发展较早，成为西洋文化的发源地之一。相传尼罗河每年有定期泛滥，水涨时田地被淹，水退要重新划界，田地测量由此需要得到发展，从而产生了几何学。这种说法证实了几何学起源于生产实践，但这种说法有片面性，因为没有尼罗河的泛滥也是有几何学的。实际上人类社会发展到农业社会，需要定四时，测田亩，是普遍的要求，用来计算天文地理的几何学的产生发展也是必然的。几何学在我国古代早就有着辉煌的成就，不是偶然的。前面所说的勾股定理就是其中一例。

埃及的几何知识传到希腊得到很大发展，特点是把几何方面的零碎知识系统整理，组织成一门科学，二千年前希腊学者

欧几里得（Euclid 约公元前330-275年）把它写成"几何原本"一书，成为以后世界各国初等几何学教材的原始范本。我国明朝徐光启与西人利玛窦合作将它译成中文，1607年在北京出版。按英文与拉丁文几何一词都来自希腊含有测地术的意义。Geometry，前三个字母 Geo 是土地的意思，后面的 metry 是测量的意思，徐光启取 geo 音译，成几何。同时几何两字汉语中意思是问含量是多少，测量长度面积与体积总要问一个结果是多少，因此大家认为这个名称用来描述研究图形性质的科学比较好，一直沿用到现在。

2、毛主席教导我们："人的正确思想，只能从社会实践中来，只能从社会的生产斗争、阶级斗争和科学实验这三项实践中来"。列宁也曾写道："除了通过感觉，我们既不能知道任何物质形态，也不能知道任何运动形态"故感觉是客观世界在我们感觉器官上的作用的结果，分碎的感觉在人的头脑中複合成比较完整的知觉。人们依赖感觉和知觉获得各种对象的形象与性质，加以结合改造，保存在人们的意识中形成所谓观念。感觉、知觉和观念都是现实世界在人的头脑中的反映，给我们以思维所必需的材料。人们对同类现象和对象所给予我们的知觉和观念加以概括，抽出它们的本质属性，以思维形式表达出来，作为思维的基本形态，这就是概念。列宁曾经指出："概念是人脑底高级产物，而人脑是物质的高级产物"。在科学技术的每一部门中都要制定出一些概念，这些概念总是表示它们的研究对象，对象间某种特定关系，并且总括出这门科学的成果。数学更是如此。数学中每一概念都反映着属于同一数学模型的对象、现象和事物的量与形方面的本质属性，这些本质属性构成了概念的内涵，适合该概念的一切对象、现象则称为概念的

外延．用词确切说明概念内容，揭示其内涵时，这些词就称为概念的定义．故定义总是要指出事物及其现象反映在概念中的本质属性的．但简单列举一切本质属性来给概念下定义却十分困难．有时且不能完成任务．故逻辑上总是采用包含所考察的对象的一类比较广大的对象．并说明所考察对象和相邻其他对象的差别．也就是说用已经明确的比较简单的概念定义比较复杂的概念．简单更简单，总得有个根底．不可能无穷地定义下去．这个根底就是人类的实践．人类通过实践得到一些不需要再定义也不可能再定义的基本概念．这些基本概念只能用类似定义的各种逻辑形式固定下来．这就是对所研究的对象的特征予以解释和描述或用实例和比喻给对象以直观说明等々．现代的几何基础研究认为几何学上的基本概念可分为基本元素与基本关系两种．基本元素就是点、直线与平面．基本关系就是结合关系（点在直线上．点在平面上）顺序关系（介于……之间）和合同关系（线段相等．角的相等）．

3．几何上的点是物体々积不断缩小．小而又小．小到它只占有空间位置而无体积大小可言的一种抽象．故欧几里得的《几何原本》上说几何上的点是不可再分的。

几何上的线是宽度与厚度无限减小的带子的抽象．是粗细无限减小的绳子的抽象．我们可以把线看成为无穷多个点一个接一个连续连接而成．带子与绳子绷紧时就得到直线的抽象．直线这一概念舍弃了绳子的一切性质，只剩下在长度且可无限延伸这一性质．《几何原本》上描述直线时．说得很玄妙，它说："直线是这样的线．它对于它的任何点来说．都是同样地放置的"这话的意思，就是说．如果把两条直线叠合一部分，它就全体叠合，成为一条直线．也可以理解为固定直线上任意两点的位置．将直线旋转．直线上各点位置是无一改变的。

由一些直线的部分所组成的线称为折线。除直线与折线外的一切线都称为曲线。易见直线是最简单的线。

物体总是有厚度的，如厚度越来越薄，物体形成薄片，这种几何薄片薄到厚度为0，只有面积大小可言，这种抽象出来的薄片就叫做面。过面中任意两点的直线如全部落在此面上时就称为平面。故从《几何原本》上说“平面是这样的面，它对于它的任何直线来说都是同样放置着的”易见平面是最简单的面。

在现实世界中，物体总占有一部分空间，总是有一定体积的，如果我们舍弃物理和化学性质，只得出它的空间位置、形状和大小等几何性质时，这种物体就叫做几何体（在几何上简称为体）我们可以将几何体看成是由点、线、面构成，而归根到底是由点的集合构成。线、面、体都是点的集合。点、线、面、体的集合统称为几何图形。几何图形就是几何学研究对象。专研究同一平面上的几何图形时是平面几何，研究不局限一个平面的空间的几何图形时是立体几何。

4. 物体用来和邻接的其他物体并将它们分开的是面，面只有宽广而无厚薄，面与面相交得到线，线只有长度特征，线与线相交就得到点，点无大小，只有位置，因此，如果采用运动观点看问题，一个点在空间相对静止时，它只占有一定位置，而无活动余地，对此，数学上叫做无自由度或自由度为0（自由度又叫做向度）当点在空间连续移动时，它的轨迹就是线，线有一个自由度，长。线在空间连续移动时，它的迹就是面，这样又增加了一个自由度，故而有二个向度，而在空间连续移动的迹就是体，体比较面又多了一个自由度，它的向度是3。体是空间的一部分，故我们称空间为三度空间。例如描述空间时，我们可以说上下、左右、前后。描述一个平面时，只能说

左右、前后。概述一条线只能说左右（或前后）对于一个点而言，上下、左右、前后均无活动自由了，故自由度为0．由于人们把运动观点引入几何学，变量数学和代数学才进入几何学而形成解析几何，解析几何也是高等数学的一个重要基础．因为这样，数与形才能密切结合起来．故恩格斯说过："笛卡儿的变数是数学中的转折点，因此运动和辩证法便进入了数学，因此微分与积分也就立刻成为必要的了……"（笛卡儿是17世纪法国数学家，最早发表解析几何学的人）

二、几何学中的逻辑推理

1.逻辑是logic的译音，它就是论理学，旧称名学．列宁在《哲学笔记》上指出："逻辑学是关于知识的学说，是认识的理论"这就是说逻辑是关于正确思维形式和规律的科学。正确思维的规律是表达思想和联系思想的规律，必须遵守这些规律，我们的思想发展才能是正确的，首尾一贯的和有系统的．我们在分析矛盾解决矛盾时才能从已知道的事实和原理作出正确的结论．逻辑有形式逻辑与辩证逻辑．列宁教导我们："形式逻辑……是以最普通的或经常看到的东西为指南来研究形式的规定，而且只局限于这一点，……辩证逻辑则要求我们更往前进，要真正瞭解一个对象，必须考察，研究它的一切方面，一切联系和「媒介化」……这是第一。第二辩证逻辑要求从其发展「自己运动」（如黑格尔有时所说的），变化中考察一个对象"因此形式逻辑是初等逻辑，辩证逻辑是高等逻辑．恩格斯把它们比做初等数学和高等数学。

形式逻辑是一门古老的初级思维科学：它研究四个初级的思维规律（同一律、矛盾律、排中律和充足理由律）；三种思维形式：（概念、判断、推理）和证明。

关于思维形式中的概念含意上面已经讲到，思维形式中的判断则总是关于某一东西属性的某一种表达，它由概念和联系词"是"与"不是"构成的。例如"苏修是社会帝国主义"这一判断，是由"苏修"和"社会帝国主义"两个概念和联系词"是"而构成的，人们总是用判断进行思维，阐述事物属性，判断其真假，凡和客观现实一致的是真，否则是假。苏修是社会帝国主义是真判断。"上帝是存在的"则是假判断，在科学上，所有科学真理都是需经过证明的。经过证明的判断才是确实可靠的。毛主席教导我们："真理的标准只能是社会的实践"因此在数学上，人们用推理获得新的判断，用证明证实已知的判断，归根到底，必须立足于客观实际，它所用作根据的判断必须是已被实践证明是真实的，它在推理和证明过程中的思维规律必须遵守上述四个初级的思维规律，即同一律、矛盾律、排中律和充足理由律。所谓同一律，就是说思维要有确定性，使用某一概念，要有明确的定义，在推理过程中要同一意义使用到底，不得中途偷换。矛盾律是说思维不得有矛盾，论证问题要首尾一贯，不得语无伦次，自相矛盾，排中律则强调思维要有明确性，是与不是要明确分清，不得模棱两可，含糊其词。至于充足理由律那就是说真实判断需要有充足理由，所谓充足理由是指这样一些用做论据的真实的判断，由它们可以推证出另一个真实判断，既要求它真实，又要求它理由充足。只要我们立足于客观实际，遵守逻辑思维规律，在数学中我们是可以由某些正确前提推出某些正确结论的。这就是数学中的逻辑推理方法，恩格斯在《反杜林论》中指出："甚至形式逻辑首先也是寻找新结果的方法，由已知进到未知的方法，辩证法也是这样，只不过处在更高的阶段上罢了，而且辩证法突破形式逻辑的狭隘的眼界，在本身中包含着更广大的世界观的萌芽。"

总之，概念反映着对象的本质属性；判断反映着对象与对象、对象与属性、属性与属性间的关系；推理和证明则更进一步，它通过判断和判断间的有机联系，间接地、合乎逻辑地(即合乎正确思维规律）从已知前提推出新结论。必须指出，形式逻辑的推理仅是人们借助于某于某些正确判断推出某些判断的逻辑方法，它仅以反映事物间简单关系，局限性地获得一些新的知识；如果需更深入地、更全面地、更正确地反映自然、揭露自然内在规律，单靠形式逻辑是远以不够的，而就须要依靠马克斯列宁主义的辩证法和辩证逻辑的应用。

在几何学中人们比较集中地使用上述推理方法以系统探求图形的某些性质，故人们一直认为学习几何学不仅在于学习一些图形有用的性质，其目的还在于通过几何学以习一些数学推理方法，实际上在数学其他分支也是同样有这样训练的。过多困陷入几何学中这样的繁琐论证是不符合教改要求的，为了使同学们能对此有一初步概括了解，故简略讲了一些逻辑推理的极其简单的轮廓，至于具体的推理方法只能结合数学具体事例讲解。

2．在数学上称叙述一个判断的语言为命题，定义、公理和定理都是一种判断性语言，都可统称命题。由已经证明的正确命题和定义以及经过人类亿万次实践验证为正确的公理而推断得出具有正确性的重要命题称为定理、在几何中定理总是揭露几何图形某种性质和规律的，几何学中有两项主要工作，一是简化语言确立定义，二是蕃衍内容，推证定理，推证新定理也和定义新概念一样，要有一个旧的依据，层层往上追寻，终究有个根源，这就迫使我们不得不采用一套基本命题，不加证明作为一切定理的基础，而不再追究它的成立的理由，这套不加证明的基本命题就是公理，列宁同志说过：“人的实践重复

了不止亿万次，于是在人的意识中以逻辑形式固定下来而成为公理"由此可见公理是经过实践直接和间接证明的真理．它是数学上逻辑推理的根据．不需要证明也不可能再用逻辑推理证明的。

三、公理

1．用公理系统建立几何学，要注意三个基本问题：(1)公理系统的和谐性，诸公理间不互相抵触．(2)各条公理均具有独立性，不能互相推出．(3)公理系统的完备性，不能够增加新公理．这些问题直到十九世纪末期才系统总结构成几何学基础重要内容．我们不需要深入研究，这里只根据中学数学内容和一般证题引用方便和需要罗列一些常用的公理．它当然不是什么严格的公理系统。

2．一般的数学公理已在以前文章中用到．补再列举如下：

(1)．如 $a=c$．$b=c$．则 $a=c$

(2)．如 $a=b$．$c=d$ 则 $a\pm c=b\pm d$

(3)．如 $a=b$ 则 $na=nb$（n是数）

(4)．如 $a=b$ 则 $\frac{a}{n}=\frac{b}{n}$（n是数）

(5) 全量大于部份．全量等于各部份和．

(6)．一量的等量可以替换这个量

(7)．$a>b$．且 $c=d$．则 $a\pm c>b\pm d$．

(8)．$a=b$ 且 $c>d$ 则 $a-c<b-d$．

(9)．如 $a>b$ 则 $na>nb$．且 $\frac{a}{n}>\frac{b}{n}$（n是正数）

(10)．如 $a>b$．$c>d$ 则 $a+c>b+d$．

(11)．如 $a>b$．$b>c$ 则 $a>c$

左列公理在几何．算术和代数等学科中均要用到．在几何中．式中 a.b.c.d 均指有单位的量．一般是指线段的长度角的度量．以及面积．体积的度量等。

3、几何学上的公理，称为几何公理。常引用的几何公理择要列举如下：

(1). 两点唯一确定一直线。直线可无限延长

(2). 三点唯一确定一平面。平面可无限延伸

(3). 直线有两点在平面上，则点点在平面上。

(4). 平面有一点公共，则必有另一公共点，因而平面相交唯一确定一条直线

(5). 截三角形一边而不过顶点的直线必截三角形的另一边。

(6). 几何图形可以在空间移动而不改变它的大小与形状

(7). 叠合两个几何图形，如它们点点重合，则它们是全等形。

(8). 过直线外一点只能引一条与该直线平行的直线（同一平面上不相交的直线互称平行线）

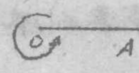
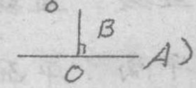
(9). 直线的一部分叫做线段。给定线段 $AB>CD$，则必有正整数 n 使 $nCD \le AB \le (n+1)CD$（这一公理是线段度量的理论基础。我国墨子最早提出，比古希腊的阿基米德早发现二百多年）

(10). 两点间的直线段比其他连线最短，称为两点间的距离。

四、角及其度量

1、在直线上取二个点，则两点间的部分直线称为线段。固定线段一个端点，向另一端点方向无限延长的半直线称为射线

从一点引出两条射线所组成的图形叫做角。这个点叫做角的顶点。这两条射线叫做角的边。 如图 $\angle AOB$ 或

∠θ 是一个角，当射线 OA 绕 O 点按反时针方向（↺）旋转一周，再回到 OA 位置，这样旋转的角叫做周角（）周角的一半叫平角（）平角的两个边形成一条直线。平角的一半叫直角（）这时两边的位置关系叫做互相垂直，记为 OB⊥OA，小于直角的角叫锐角，大于直角，小于平角的角叫钝角。

2. 角有两种度量方法，第一种是角度法，即规定周角＝360°（度），1度＝60′（分），1分＝60″（秒），因此：平角＝180°，直角＝90°，易见所有的直角都是相等的。角的第二种度量方法是弧度法，讲了圆后再介绍。

3. 如 $\angle\alpha+\angle\beta=90°$ 则 $\angle\alpha$ 与 $\angle\beta$ 互称余角，如 $\angle\alpha+\angle\beta=180°$ 则两角互称补角。

五、定理的结构、证明及其相应命题的变化

1. 定理也是一种判断性语言，它由两部分构成，一部分是条件（或称假设）一部分是结论，概括的形式是："如A则B" A是已知条件部分，B是终结部分，例如对顶角相等。

条件是："两角是对顶角"（即一个角的两边和是另一角两边的反向延长线如）结论是"两角相等"（$\angle\alpha=\angle\beta$）。

2. 定理的证明必须根据题设已知条件，定义、公理和已证明的定理，由题设直接推出命题所要求的结论是直接证法，有些定理往往不易或不能由题设直接推断结论，这时通常用反证法，即假定命题的结论不成立，这样上述根据中多了这一个否定题断的依据，由它们综合推论，如能得到一个结果，这个结果与某公理或某定理，或本题假设相互抵触，出现矛盾时则定理也就证明了，这就是说，命题结论如不成立，就出现错处，因