

电 磁学是研究电磁现象的规律的学科。关于电磁现象的观察记录,可以追溯到公元前 6 世纪希腊学者泰勒斯(Thales),他观察到用布摩擦过的琥珀能吸引轻微物体。在我国,最早是在公元前 4 到 3 世纪战国时期《韩非子》中有关“司南”(一种用天然磁石做成的指向工具)和《吕氏春秋》中有关“慈石召铁”的记载。公元 1 世纪王充所著《论衡》一书中记有“顿牟缀芥,磁石引针”字句(顿牟即琥珀,缀芥即吸拾轻小物体)。西方在 16 世纪末年,吉尔伯特(William Gilbert, 1540—1603 年)对“顿牟缀芥”现象以及磁石的相互作用做了较仔细的观察和记录,electricity(电)这个字就是他根据希腊字 $\eta\lambdaεκτρου$ (原意琥珀)创造的。在我国,“电”字最早见于周朝(公元前 8 世纪)遗物青铜器“夔生簋”上的铭文中,是雷电这种自然现象的观察记录。对“电”字赋以科学的含义当在近代西学东渐之后。

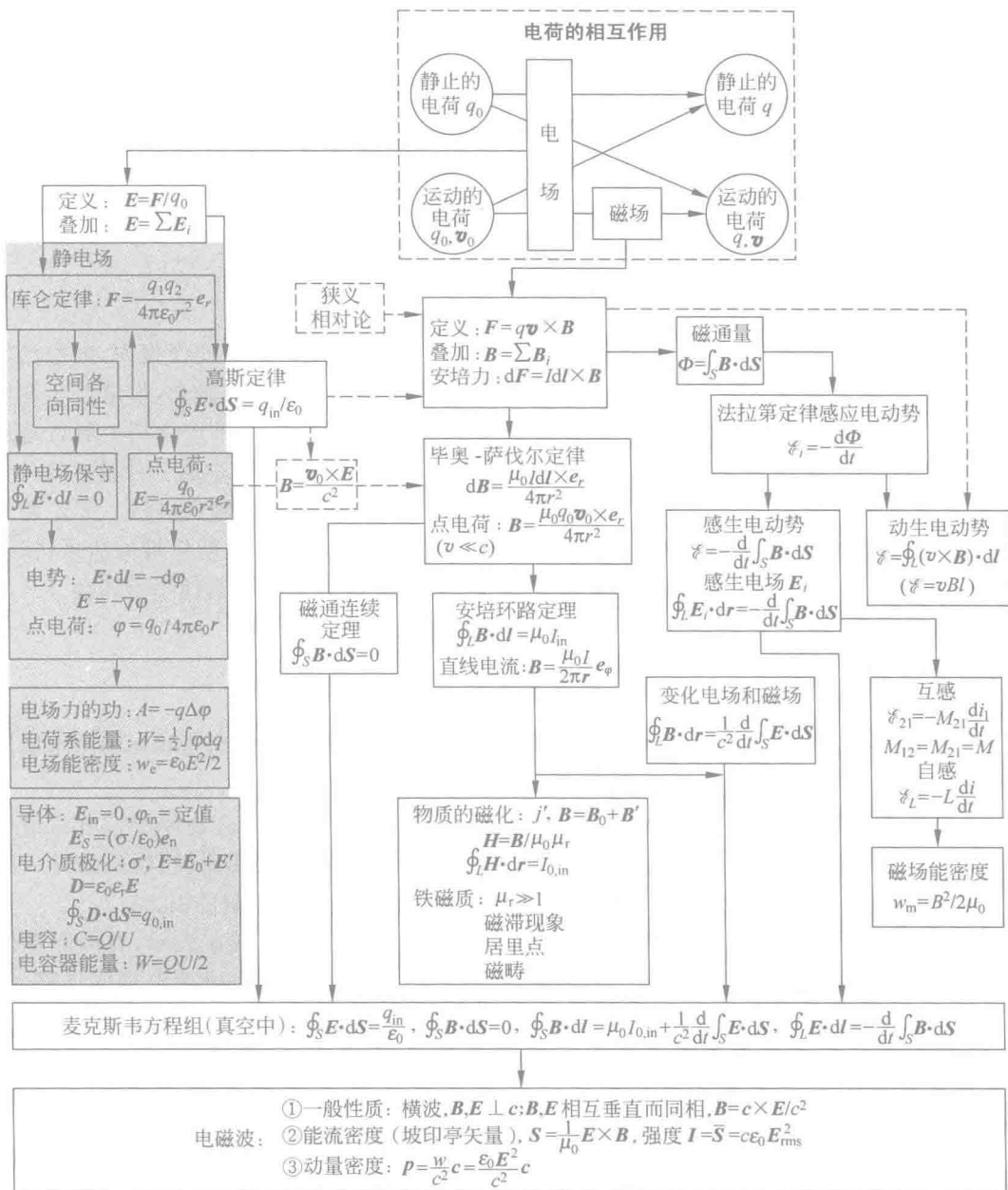
关于电磁现象的定量的理论研究,最早可以从库仑 1785 年研究电荷之间的相互作用算起。其后通过泊松、高斯等人的研究形成了静电场(以及静磁场)的(超距作用)理论。伽伐尼于 1786 年发现了电流,后经伏特、欧姆、法拉第等人发现了关于电流的定律。1820 年奥斯特发现了电流的磁效应,很快(一两年内),毕奥、萨伐尔、安培、拉普拉斯等作了进一步定量的研究。1831 年法拉第发现了有名的电磁感应现象,并提出了场和力线的概念,进一步揭示了电与磁的联系。在这样的基础上,麦克斯韦集前人之大成,再加上他极富创见的关于感应电场和位移电流的假说,建立了以一套方程组为基础的完整的宏观的电磁场理论。在这一历史过程中,有偶然的机遇,也有有目的的探索;有精巧的实验技术,也有大胆的理论独创;有天才的物理模型设想,也有严密的数学方法应用。最后形成的麦克斯韦电磁场方程组是“完整的”,它使人类对宏观电磁现象的认识达到了一个

新的高度。麦克斯韦的这一成就可以认为是从牛顿建立力学理论到爱因斯坦提出相对论的这段时期中物理学史上最重要的理论成果。

1905年爱因斯坦创立了相对论。它不但使人们对牛顿力学有了更全面的认识,也使人们对已知的电磁现象和理论有了更深刻的理解。根据电磁现象的规律必须满足相对论时空洛伦兹变换(这本质上是自然界的一种重要的对称性——匀速直线运动的对称性或洛伦兹对称性的表现)的要求,可以证明,从不同的参考系观测,同一电磁场可表现为只是电场,或只是磁场,或电场和磁场并存。更确切地说,表征电磁场的物理量——电场强度和磁感应强度——是随参考系改变的。这说明电磁场是一个统一的实体,而且麦克斯韦方程组可以在此基础上加以统一的论证。

本篇介绍的是经典的电磁理论,它是基于电磁场是连续地分布在空间这种认识的。20世纪初关于光电效应及热辐射规律的研究提出了电磁场是由不带电的分立的粒子——光子——组成的观点,从而建立了量子场论,它更全面而深刻地阐明了电磁场的规律。本书在第5篇量子物理基础中介绍光子的概念及其若干应用,对于量子场论,由于其理论艰深,本书作为基础物理教材,不再涉及。

本篇所采用的电磁学知识系统图



静 电 场

作为电磁学的开篇,本章讲解静止电荷相互作用的规律。在中学物理课程中,大家已学习了这方面很多知识,例如电荷,库仑定律,电场和电场强度的概念,带电粒子在电力作用下的运动等。本章除对这些内容作更准确地说明外,还特别侧重于介绍更具普遍意义的高斯定律及应用它求静电场的方法。对称性分析已成为现代物理学的一种基本的分析方法,本章在适当地方多次说明了对称性的意义及利用对称性分析问题的方法。无论是概念的引入,或是定律的表述,或是分析方法的介绍,本章所涉及的内容,就思维方法来讲,对整个电磁学(甚至整个物理学)都具有典型的意义,希望大家细心地、认真地学习体会。

10.1 电荷

电磁现象现在都归因于物体所带的电荷以及这些电荷的运动。电荷是物质的基本属性之一,它的一般性质有以下几方面。

电荷有两种,正电荷和负电荷。静止的电荷,同种相斥,异种相吸。物体所带电荷最终由(目前所认识的)组成它们的基本粒子的电荷决定。和电荷有两种相比较,物质的另一属性——质量则只有一种,与之相联系的相互作用只有一种——相互吸引的引力。

带电体所带电荷的多少叫电量(也常简单地直称电荷),常用 Q 或 q 表示,在国际单位制中,它的单位的规定方法见 14.5 节,其名称为库[仑],符号为 C。正电荷电量取正值,负电荷电量取负值。一个带电体所带总电量为其所带正负电量的代数和。

电荷是量子化的,即在自然界中,电荷总是以一个基本单元的整数倍出现,这个特性叫做电荷的量子性。电荷的基本单元就是一个电子所带电量的绝对值,常以 e 表示。经测定为

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$$

是正整数或负整数。近代物理理论认为每一个夸克或反夸克可能带有 $\pm \frac{1}{3}e$ 或 $\pm \frac{2}{3}e$ 的电量。然而至今单独存在的夸克尚未在实验中发现(即使发现了,也不过把基元电荷的大小缩小到目前的 $1/3$,电荷的量子性依然存在)。

本章讨论电磁现象的宏观规律,所涉及的电荷常常是基元电荷的许多倍。在这种情况下,将只从平均效果上考虑,认为电荷连续地分布在带电体上,而忽略电荷的量子性所引起

的微观起伏。尽管如此,在阐明某些宏观现象的微观本质时,还是要从电荷的量子性出发。

在以后的讨论中经常用到点电荷这一概念。当一个带电体本身的线度比所研究的问题中所涉及的距离小很多时,该带电体的形状与电荷在其上的分布状况均无关紧要,该带电体就可看作一个带电的点,叫点电荷。由此可见,点电荷是个相对的概念。至于带电体的线度比问题所涉及的距离小多少时,它才能被当作点电荷,这要依问题所要求的精度而定。当在宏观意义上谈论电子、质子等带电粒子时,完全可以把它们视为点电荷。

电荷是守恒的,即对于一个系统,如果没有净电荷出入其边界,则该系统的正、负电荷的电量的代数和将保持不变。这就是电荷守恒定律。这个守恒是局域守恒,因此,针对的系统应该是局限在小区域的。宏观物体的带电、电中和以及物体内的电流等现象实质上是由于微观带电粒子在物体内部运动的结果。因此,电荷守恒实际上也就是在各种变化中,系统内粒子的总电荷数守恒。

现代物理研究已表明,在粒子的相互作用过程中,电荷是可以产生和消失(或湮灭)的。然而在已观察到的这种过程中,正、负电荷总是成对出现或成对消失,所以这种电荷的产生和消失并不改变系统中的电荷数的代数和,因而电荷守恒定律仍然保持有效。

和电荷守恒相比,质量也是守恒的,相应地也有质量守恒定律。不过,在爱因斯坦创立相对论以后,它已和能量守恒定律合二而一了。

电荷与带电体的运动速率无关,即随着带电体的运动速率的变化,它所具有的电荷的电量是不改变的。由于同一带电体的速率在不同的参考系内可以不同,因而电荷的这一性质也可说成是电荷与参考系无关。因此,电荷的这一性质又被称为电荷的相对论不变性。

和电荷的相对论不变性相比较,物体的质量是随其速率变化的,在高速领域更是这样。

10.2 电场和电场强度

自法拉第 1830 年代提出电荷是通过中间介质发生相互作用并把这种中间介质称为“场”以来,今天的物理学家们已普遍地接受了场的概念并作出了许多有关场的非常深入的研究。现已确认:两个电荷,无论运动与否,它们之间的相互作用是靠场来传递的。其中一种相互作用叫电场力,而传递这种力的场称为电场。下面我们就来说明什么是电场以及如何描述电场^①。

在图 10.1 中,电荷 Q 和 q 通过它们的场发生相互作用。当我们研究 q 受 Q 的作用时, Q 称为场源电荷或源电荷。它周围存在着与它相联系的,或说是“由 Q 产生的”场。 q 在这场中某点(这点称为场点)时就受到在该点处 Q 产生的场的作用力,这力称为场力。为了描述 Q 的场在各处的特征,我们将被称为检验电荷的点电荷 q 放在这场内某场点 P 处,使其保持静止并测量它受的场力。以 F 表示所测得的场力,然后依次把 q 放到其他场点处做同样的实验。结果表明,对于一定的场源电荷 Q ,同一检验电荷 q 在各场点所受

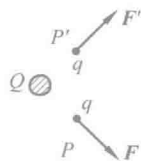


图 10.1 静止的检验电荷受的电场力

^① 电荷之间的另一种相互作用是磁场力,它和电荷的运动有关,磁场和磁场力将在第 13 和 14 章介绍。

的场力的方向和大小一般都不相同。但电量不同的同种检验电荷 q 在同一场点所受场力的方向都是一样的,而且尽管由于 q 不同所受场力的大小不等,但是比值 F/q 在同一场点对不同的 q 却是一个定值,它与 q 无关而只决定于场点所在的位置。这样就可以用比值 F/q 连方向带大小来确定场源电荷周围各场点的场的特征。这种利用静止的检验电荷 q 确定的场称为**电场**, F 就称为**电场力**而比值 F/q 就称为各点的**电场强度**。以 E 表示电场强度,就有定义公式

$$E = \frac{F}{q} \quad (q \text{ 静止}) \quad (10.1)$$

这就是说,电场中某场点的电场强度的方向为静止的正的检验电荷受场力的方向,而其大小等于静止的单位电荷受的场力。在场源电荷静止的情况下,其周围的电场称为**静电场**。这时,由式(10.1)所定义的电场强度(也常简称为电场)是空间坐标的矢量函数。

电场强度的 SI 单位为牛[顿]每库[仑],符号为 N/C^①。一些典型的电场强度的值由表 10.1 所给出。

表 10.1 一些电场强度的数值

N/C

铀核表面	2×10^{21}
中子星表面	约 10^{14}
氢原子电子内轨道处	6×10^{11}
X 射线管内	5×10^6
空气的电击穿强度	3×10^6
范德格拉夫静电加速器内	2×10^6
电视机的电子枪内	10^5
电闪内	10^4
雷达发射器近旁	7×10^3
太阳光内(平均)	1×10^3
晴天大气中(地表面附近)	1×10^2
小型激光器发射的激光束内(平均)	1×10^2
日光灯内	10
无线电波内	约 10^{-1}
家庭用电路内	约 3×10^{-2}
宇宙背景辐射内(平均)	3×10^{-6}

几个电荷可以同时在同一空间内产生自己的电场。这时空间中某一场点的电场强度仍由式(10.1)定义,不过式中 F 应是各场源电荷单独存在时在该场点的电场对检验电荷 q 的电场力的合力。以 F_i 表示一个场源电荷单独存在时在某场点的 q 所受的电场力,则 $F = \sum F_i$ 。将此 F 代入式(10.1)可得该场点的电场强度为

$$E = \frac{F}{q} = \frac{\sum F_i}{q} = \sum \frac{F_i}{q} \quad (10.2)$$

但由式(10.1)可知 F_i/q 为一个场源电荷单独在有关场点产生的电场强度 E_i ,所以由

① 电场强度的另一 SI 单位为伏[特]每米,符号为 V/m,它和单位 N/C 完全等效。

式(10.2)又可得

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \quad (10.3)$$

此式表示：在 n 个电荷产生的电场中某场点的电场强度等于每个电荷单独存在时在该点所产生的电场强度的矢量和。这个结论叫电场叠加原理。

10.3 库仑定律与静电场的计算

电荷既然是通过它们的场相互作用的,那么,要想求出一个电荷受的电场力以及其运动情况,就必须先知道电场的分布状况。场源电荷和它在周围产生的电场的分布有什么关系呢?我们将从最简单的情况开始讨论,即先考虑在真空中一个静止的电荷 q 的周围的电场分布。

1785年法国科学家库仑用扭秤做实验确定了电荷间相互作用的基本定律,现在就叫库仑定律。它的内容是:在真空中两个静止的点电荷之间的作用力的方向沿着两个点电荷的连线(同性相斥,异性相吸),作用力的大小 F 和两个点电荷的电量 q_1 和 q_2 都成正比,和它们之间的距离 r 的平方成反比。用 SI 单位,写成数学等式,就有

$$F = \frac{kq_1q_2}{r^2} \quad (10.4)$$

式中的比例常量 k 称为静电力常量,其一般计算用值为

$$k = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \quad (10.5)$$

为了从数学上简化电磁学规律的表达式和计算,又常引入另一常量 ϵ_0 并令

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2) \textcircled{1} \quad (10.6)$$

这 ϵ_0 称为真空介电常量(或真空电容率)。用 ϵ_0 取代 k ,式(10.4)又可写成

$$F = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0r^2} \quad (10.7)$$

在此式中,如果把 q_2 当作检验电荷, F 就是它在 q_1 的电场中所受的电场力。根据电场强度的定义,式(10.1), $F/q_2 = q_1/4\pi\epsilon_0r^2$ 就是 q_2 所在处的 q_1 的电场的电场强度。去掉 q_1 的下标,我们就可以得到一般的一个在真空中静止的点电荷 q 在它的周围产生的电场的电场强度的大小为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0r^2} \quad (10.8)$$

其中 r 是从场源电荷到场点的距离。用一正检验电荷放在此场点可以确定此电场的方向是:如果 q 为正电荷,则电场指离 q ;如果 q 是负电荷,则电场指向 q (图 10.2)。

将式(10.8)表示的电场强度的大小和上面关于电场强度方向的说明结合起来,一个在真空中静止的点电荷 q 在离它的距离为 r 的场点产生的电场强度可用下一矢量式表示:

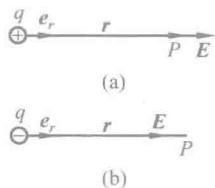


图 10.2 电场方向
(a) $q > 0$; (b) $q < 0$

$\textcircled{1}$ 单位 $\text{C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$ 也写成 F/m , F 是电容的单位,见第 12 章。

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad (10.9)$$

式中 \mathbf{e}_r 是从点电荷 q 指向场点 P 的单位矢量(图 10.2)。

由于式(10.9)表示 \mathbf{E} 只和矢径 r 的大小和方向有关,所以,从总体上看,一个点电荷的静电场具有以该点电荷为中心的球对称分布。

有了点电荷的电场强度公式,式(10.9),再根据电场叠加原理,式(10.3),原则上我们就可以求在真空中任意的静止的场源电荷的电场分布了。对于点电荷 q_1, q_2, \dots, q_n 的静电场中任一点的场强,我们有

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \mathbf{e}_{r_i} \quad (10.10)$$

式中, r_i 为 q_i 到场点的距离, \mathbf{e}_{r_i} 为从 q_i 指向场点的单位矢量。

若带电体的电荷是连续分布的,可认为该带电体的电荷是由许多无限小的电荷元 dq 组成的,而每个电荷元都可以当作点电荷处理。设其中任一个电荷元 dq 在 P 点产生的场强为 $d\mathbf{E}$,按式(10.9)有

$$d\mathbf{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

式中 r 是从电荷元 dq 到场点 P 的距离,而 \mathbf{e}_r 是这一方向上的单位矢量。整个带电体在 P 点所产生的总场强可用积分计算为

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad (10.11)$$

例 10.1 电偶极子的静电场。相距一段小距离 l 的一对等量正负电荷构成一个电偶极子,求电偶极子中垂线上离电偶极子甚远处(即 $r \gg l$)任一 场点的静电场强度。

解 设 $+q$ 和 $-q$ 到偶极子中垂线上任一点 P 处的位置矢量分别为 r_+ 和 r_- ,而 $r_+ = r_-$ (图 10.3)。由式(10.9), $+q, -q$ 在 P 点处的场强 $\mathbf{E}_+, \mathbf{E}_-$ 分别为(以 r/r 代替 \mathbf{e}_r)

$$\mathbf{E}_+ = \frac{q r_+}{4\pi\epsilon_0 r_+^3}$$

$$\mathbf{E}_- = \frac{-q r_-}{4\pi\epsilon_0 r_-^3}$$

以 r 表示电偶极子中心到 P 点的距离,则

$$\begin{aligned} r_+ = r_- &= \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}} = r \sqrt{1 + \frac{l^2}{4r^2}} \\ &= r \left(1 + \frac{l^2}{8r^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

在距电偶极子甚远时,即当 $r \gg l$ 时,取一级近似,有 $r_+ = r_- = r$,而 P 点的总场强为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (r_+ - r_-)$$

以 l 表示从负电荷指向正电荷的矢量间距,则 $r_+ - r_- = -l$,而上式化为

$$\mathbf{E} = \frac{-q l}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

此式中的乘积 ql 称为电偶极子的电偶极矩,简称电矩。以 \mathbf{p} 表示此电矩,则

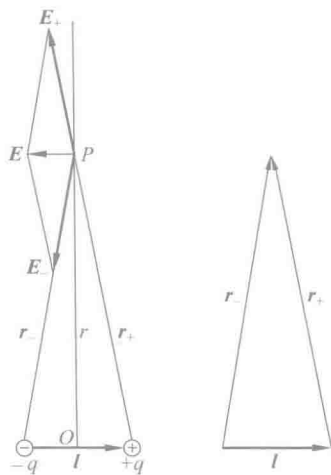


图 10.3 电偶极子的电场

$$p = ql \quad (10.12)$$

而上述结果又可写成

$$\mathbf{E} = \frac{-\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (10.13)$$

此结果表明,电偶极子中垂线上距离电偶极子中心较远处各点的电场强度与电偶极子的电矩成正比,与该点离电偶极子中心的距离的三次方成反比,方向与电矩的方向相反。

从总体上看电偶极子的静电场具有以电偶极子轴线为轴的轴对称分布,式(10.13)给出了电偶极子中垂面上的电场分布。

例 10.2 带电直线段的静电场。一根带电直棒,如果限于考虑离棒的距离比棒的截面尺寸大得多的地方的电场,则该带电直棒就可以看作一条带电直线。今设一均匀带电直线段,长为 L (图 10.4),线电荷密度(即单位长度上的电荷)为 λ (设 $\lambda > 0$),求此直线段中垂线上一点的场强。

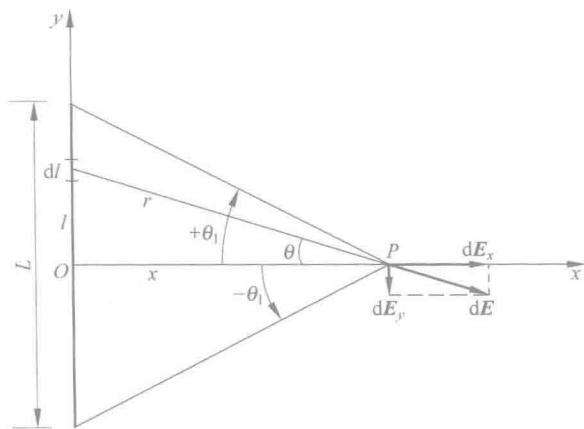


图 10.4 带电直线中垂线上的电场

解 在带电直线段上任取一长为 dl 的电荷元,其电量 $dq = \lambda dl$ 。以带电直线段中点 O 为原点,取坐标轴 Ox, Oy 如图 10.4 所示。电荷元 dq 在 P 点的场强为 $d\mathbf{E}$, $d\mathbf{E}$ 沿两个轴方向的分量分别为 dE_x 和 dE_y 。由于电荷分布对于 OP 直线的对称性,所以全部电荷在 P 点的场强沿 y 轴方向的分量之和为零,因而 P 点的总场强 \mathbf{E} 应沿 x 轴方向,并且

$$E = \int dE_x$$

而

$$dE_x = dE \cos\theta = \frac{\lambda dl x}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

由于 $l = x \tan\theta$, 从而 $dl = \frac{x}{\cos^2\theta} d\theta$ 。由图 10.4 知 $r = \frac{x}{\cos\theta}$, 所以

$$dE_x = \frac{\lambda dl x}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\lambda \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 x} d\theta$$

由于对整个带电直线段来说, θ 的变化范围是从 $-\theta_1$ 到 $+\theta_1$, 所以

$$E = \int_{-\theta_1}^{+\theta_1} \frac{\lambda \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 x} d\theta = \frac{\lambda \sin\theta_1}{2\pi\epsilon_0 x}$$

将 $\sin\theta_1 = \frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + x^2}}$ 代入, 可得

$$E = \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 x(x^2 + L^2/4)^{1/2}} \quad (10.14)$$

此电场的方向垂直于带电直线段而指向远方。

均匀带电直线段的静电场从总体上看具有相对于带电直线段(及其延长线)的轴对称分布。式(10.14)给出了带电直线段中垂面上电场的分布。

式(10.14)给出,当 $x \ll L$ 时,即在带电直线段中部近旁区域内,有

$$E \approx \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \quad (10.15)$$

此时相对于距离 x ,可将该带电直线段看作“无限长”。因此,可以说,在一无限长带电直线周围任意点的场强与该点到带电直线的距离成反比。

式(10.14)还给出,当 $x \gg L$ 时,即在远离带电直线段的区域内,有

$$E \approx \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

其中 $q = \lambda L$ 为带电直线段所带的总电量。此结果显示,离带电直线段很远处该带电直线段的电场相当于一个点电荷 q 的电场。

例 10.3 带电圆环的静电场。一均匀带电细圆环,半径为 R ,所带总电量为 q (设 $q > 0$),求圆环轴线上任一点的场强。

解 如图 10.5 所示,把圆环分割成许多小段,任取一小段 dq ,其上带电量为 dq 。设此电荷元 dq 在 P 点的场强为 dE ,并设 P 点与 dq 的距离为 r ,而 $OP = x$, dE 沿平行和垂直于轴线的两个方向的分量分别为 $dE_{//}$ 和 dE_{\perp} 。由于圆环电荷分布对于轴线对称,所以圆环上全部电荷的 dE_{\perp} 分量的矢量和为零,因而 P 点的场强沿轴线方向,且

$$E = \int_q dE_{//}$$

式中积分为对环上全部电荷 q 积分。

由于

$$dE_{//} = dE \cos\theta = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta$$

其中 θ 为 dE 与 x 轴的夹角,所以

$$E = \int_q dE_{//} = \int_q \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta = \frac{\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_q dq$$

此式中的积分值即为整个环上的电荷 q ,所以

$$E = \frac{q \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

考虑到 $\cos\theta = x/r$,而 $r = \sqrt{R^2 + x^2}$,可将上式改写成

$$E = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}} \quad (10.16)$$

E 的方向为沿轴线指向远方。

从总体上看,均匀带电圆环的静电场的分布具有相对于圆环轴线的轴对称性,也具有相对于圆环平面的镜面对称性。式(10.16)只给出了圆环轴线上的电场分布。

当 $x \gg R$ 时, $(x^2 + R^2)^{3/2} \approx x^3$,则式(10.16)给出 E 的大小为

$$E \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

此结果说明,远离环心处的电场也相当于一个点电荷 q 所产生的电场。

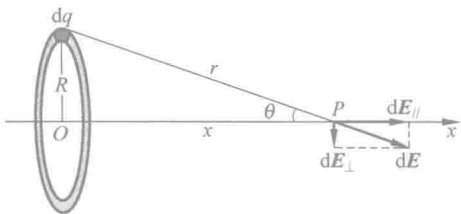


图 10.5 均匀带电细圆环轴线上的电场

例 10.4 带电圆面的静电场。一带电平板,如果限于考虑离板的距离比板的厚度大得多的地方的电场,则该带电板就可以看作一个带电平面。今设一均匀带电圆面,半径为 R (图 10.6),面电荷密度(即单位面积上的电荷)为 σ (设 $\sigma > 0$),求圆面轴线上任一点的场强。

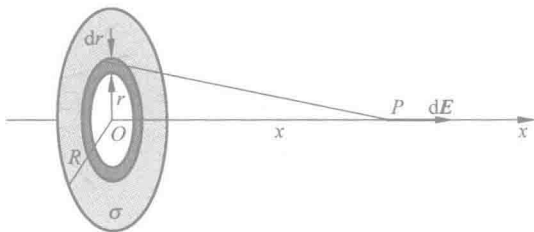


图 10.6 均匀带电圆面轴线上的电场

解 带电圆面可看成由许多同心的带电细圆环组成。取一半径为 r ,宽度为 dr 的细圆环。由于此环带有电荷 $\sigma \cdot 2\pi r dr$,所以由上例可知,此圆环电荷在 P 点的场强大小为

$$dE = \frac{\sigma \cdot 2\pi r dr \cdot x}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + x^2)^{3/2}}$$

方向沿着轴线指向远方。由于组成圆面的各圆环的电场 dE 的方向都相同,所以 P 点的场强为

$$E = \int dE = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{(R^2 + x^2)^{1/2}} \right] \quad (10.17)$$

其方向也垂直于圆面指向远方。

从总体上看,均匀带电圆盘的静电场的分布具有和均匀带电圆环的静电场相似的对称性。式(10.17)只给出了圆盘轴线上的电场分布。

当 $x \ll R$ 时,式(10.17)给出

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (10.18)$$

此时相对于 x ,可将该带电圆面看作“无限大”带电平面。因此,可以说,在一无限大均匀带电平面附近,电场是一个均匀场,其大小由式(10.15)给出。

当 $x \gg R$ 时,式(10.17)给出

$$\begin{aligned} (R^2 + x^2)^{-1/2} &= \frac{1}{x} \left(1 - \frac{R^2}{2x^2} + \dots \right) \\ &\approx \frac{1}{x} \left(1 - \frac{R^2}{2x^2} \right) \end{aligned}$$

于是

$$E \approx \frac{\pi R^2 \sigma}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

式中 $q = \sigma\pi R^2$ 为圆面所带的总电量。这一结果也说明,在远离带电圆面处的电场也相当于一个点电荷的电场。

10.4 电场线和电通量

为了形象地描绘电场在空间的分布,可以画电场线图。电场线是按下述规定在电场中画出的一系列假想的曲线:曲线上每一点的切线方向表示该点场强的方向;电场中某点场强的大小,等于该点处的电场线密度,即通过该点与电场方向垂直的单位面积的电场线条数。可以证明,这样画出的电场线都是连续的曲线,互不相交而且起自正电荷终于负电荷

(见 10.5 节)。图 10.7 画出了几种不同电荷系统的静电场的电场线,它们都是各种静电场的包含场源电荷在内的对称平面内的电场线分布。

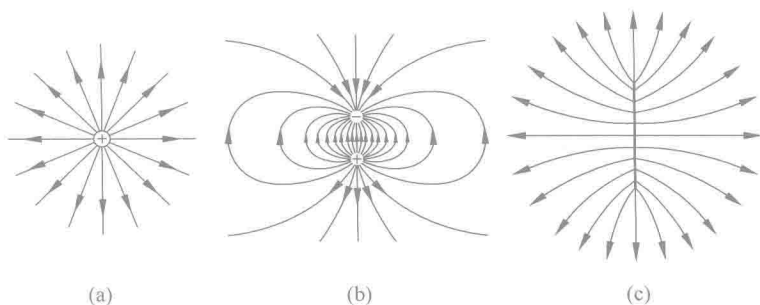


图 10.7 几种静止的电荷的电场线图

(a) 点电荷; (b) 电偶极子; (c) 均匀带电直线段

10.3 节式(10.13)、式(10.14)、式(10.16)和式(10.17)表示了几种场源电荷的电场分布和场源电荷的关系,它们都基于库仑定律和电场叠加原理。利用电场线概念,可以将场源电荷和它们的电场分布的一般关系用另一种形式——高斯定律表示出来。为了导出这一形式,我们需要引入**电场通量**,简称**电通量**的概念。

先考虑通过电场中一微小面元 dS 的电通量 $d\Phi_e$ 。关于面元,我们规定垂直面元 dS 的某一方向为面元的法线正方向,并以单位矢量 e_n 表示之。这时面元就用矢量面元 $d\mathbf{S} = dS\mathbf{e}_n$ 表示。此时通过面元 dS 的电通量定义为

$$d\Phi_e = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (10.19)$$

假设电场 \mathbf{E} 与 e_n 之间的夹角为 θ ,则由标量积的定义得 $d\Phi_e = E dS \cos\theta$,但显然由此式决定的电通量 $d\Phi_e$ 有正、负之别。当 $0 \leq \theta < \pi/2$ 时, $d\Phi_e$ 为正;当 $\theta = \pi/2$ 时, $d\Phi_e = 0$;当 $\pi/2 < \theta \leq \pi$ 时, $d\Phi_e$ 为负。电通量 $d\Phi_e$ 也可以理解为穿过面元 dS 的电场线根数。或者我们可以依据通过垂直于电场截面的电通量的值,来决定该处究竟该画几根电场线。

为了求出通过任意曲面 S 的电通量(图 10.8),可将曲面 S 分割成许多小面元 dS 。先计算通过每一小面元的电通量,然后对整个 S 面上所有面元的电通量相加。用数学式表示就有

$$\Phi_e = \int d\Phi_e = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (10.20)$$

这样的积分在数学上叫**面积分**,积分号下标 S 表示此积分遍及整个曲面。

通过一个封闭曲面 S (图 10.9)的电通量可表示为

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (10.21)$$

积分符号“ \oint ”表示对整个封闭曲面进行面积分。

对于不闭合的曲面,面上各处法向单位矢量的正向可以任意取指向这一侧或那一侧。对于闭合曲面,由于它使整个空间划分成内、外两部分,所以一般规定**自内向外**的方向为各处面元法向的正方向。

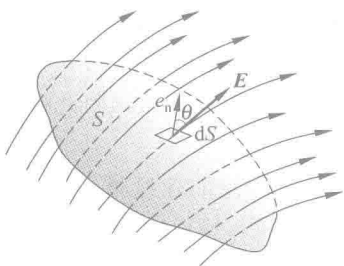


图 10.8 通过任意曲面的电通量

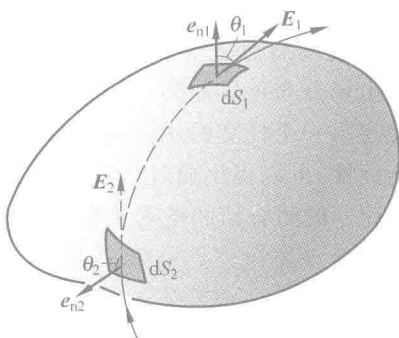


图 10.9 通过封闭曲面的电通量

10.5 高斯定律

高斯(K. F. Gauss, 1777—1855年)是德国物理学家和数学家,他在实验物理和理论物理以及数学方面都作出了很多贡献,他导出的高斯定律是电磁学的一条重要规律。

高斯定律是用电通量表示的电场和场源电荷关系的定律,它给出了通过任一封闭面的电通量与封闭面内部所包围的电荷的关系。下面我们利用电通量的概念根据库仑定律和场强叠加原理来导出这个关系。

我们先讨论一个静止的点电荷 q 的电场。以 q 所在点为中心,取任意长度 r 为半径作一球面 S 包围这个点电荷 q (图 10.10(a))。我们知道,球面上任一点的电场强度 \mathbf{E} 的大小都是 $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$,方向都沿着径矢 \mathbf{r} 的方向,而处处与球面垂直。根据式(10.21),可得通过这球面的电通量为

$$\begin{aligned}\Phi_e &= \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint_S dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

此结果与球面半径 r 无关,只与它所包围的电荷的电量有关。这意味着,对以点电荷 q 为中

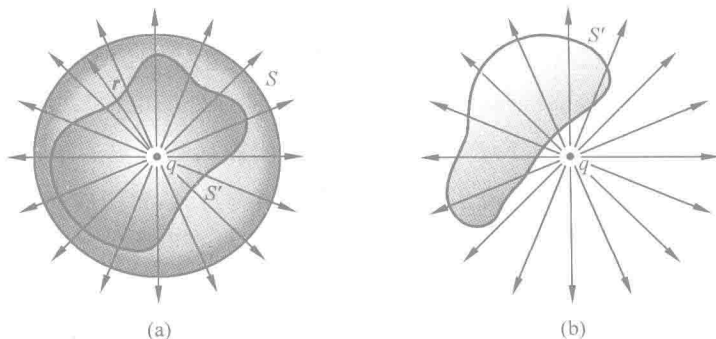


图 10.10 说明高斯定律用图

(a) 封闭面包围点电荷; (b) 封闭面不包围点电荷

心的任意球面来说,通过它们的电通量都一样,都等于 q/ϵ_0 。用电场线的图像来说,这表示通过各球面的电场线总条数相等,或者说,从点电荷 q 发出的电场线连续地延伸到无限远处。这就是电场分布可以如图 10.7 中那样用连续的曲线——电场线描绘的根据。

现在设想另一个任意的闭合面 S' , S' 与球面 S 包围同一个点电荷 q (图 10.10(a)), 由于电场线的连续性,可以得出通过闭合面 S 和 S' 的电力线数目是一样的。因此通过任意形状的包围点电荷 q 的闭合面的电通量都等于 q/ϵ_0 。

如果闭合面 S' 不包围点电荷 q (图 10.10(b)), 则由电场线的连续性可得出,由这一侧进入 S' 的电场线条数一定等于从另一侧穿出 S' 的电场线条数,所以净穿出闭合面 S' 的电场线的总条数为零,亦即通过 S' 面的电通量为零。用公式表示,就是

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

以上是关于单个点电荷的电场的结论。对于一个由点电荷 q_1, q_2, \dots, q_n 等组成的电荷系来说,在它们的电场中的任意一点,由场强叠加原理可得

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n$$

其中 $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_n$ 为单个点电荷产生的电场, \mathbf{E} 为总电场。这时通过任意封闭曲面 S 的电通量为

$$\begin{aligned} \Phi_e &= \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \oint_S \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S} + \oint_S \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{S} + \dots + \oint_S \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{S} \\ &= \Phi_{e1} + \Phi_{e2} + \dots + \Phi_{en} \end{aligned}$$

其中 $\Phi_{e1}, \Phi_{e2}, \dots, \Phi_{en}$ 为单个点电荷的电场通过封闭曲面的电通量。由上述关于单个点电荷的结论可知,当 q_i 在封闭曲面内时, $\Phi_{ei} = q_i/\epsilon_0$; 当 q_i 在封闭曲面外时, $\Phi_{ei} = 0$, 所以上式可以写成

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{in} \quad (10.22)$$

式中, $\sum q_{in}$ 表示在封闭曲面内的电量的代数和。式(10.22)就是高斯定律的数学表达式,它表明:在真空中的静电场内,通过任意封闭曲面的电通量等于该封闭面所包围的电荷的电量的代数和的 $1/\epsilon_0$ 倍。

对高斯定律的理解应注意以下几点:(1)高斯定律表达式中的场强 \mathbf{E} 是曲面上各点的场强,它是由全部电荷(既包括封闭曲面内又包括封闭曲面外的电荷)共同产生的合场强,并非只由封闭曲面内的电荷 $\sum q_{in}$ 所产生。(2)通过封闭曲面的总电通量只决定于它所包围的电荷,即只有封闭曲面内部的电荷才对这一总电通量有贡献,封闭曲面外部电荷对这一总电通量无贡献。(3)有了高斯定律,很容易证明电场线在没有电荷处总是连续不间断的。

上面利用库仑定律(已暗含了空间的各向同性)和叠加原理导出了高斯定律。在电场强度定义之后,也可以把高斯定律作为基本定律结合空间的各向同性而导出库仑定律来(见例 10.5)。这说明,对静电场来说,库仑定律和高斯定律并不是互相独立的定律,而是用不同形式表示的电场与场源电荷关系的同一客观规律。二者具有“相逆”的意义:库仑定律使我们在电荷分布已知的情况下,能求出场强的分布;而高斯定律使我们在电场强度分布已知

时,能求出任意区域内的电荷。尽管如此,当电荷分布具有某种对称性时,也可用高斯定律求出该种电荷系统的电场分布,而且,这种方法在数学上比用库仑定律简便得多。

此处应该指出的是,如上所述,对于静止电荷的电场,可以说库仑定律与高斯定律二者等价。但在研究运动电荷的电场或一般地随时间变化的电场时,人们发现,库仑定律不再成立,而高斯定律却仍然有效。所以说,高斯定律是关于电场的普遍的基本规律。

10.6 利用高斯定律求静电场的分布

在一个参考系内,当静止的电荷分布具有某种对称性时,可以应用高斯定律求场强分布。这种方法一般包含两步:首先,根据电荷分布的对称性分析电场分布的对称性;然后,再应用高斯定律计算场强数值。这一方法的决定性的技巧是选取合适的封闭积分曲面(常叫高斯面)以便使积分 $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ 中的 \mathbf{E} 能以标量形式从积分号内提出来。下面举几个例子,它们都要求求出在场源电荷静止的参考系内自由空间中的电场分布。

例 10.5 点电荷。试由高斯定律求在点电荷 q 静止的参考系中自由空间内的静电场分布。

解 由于自由空间是均匀而且各向同性的,因此,点电荷的电场应具有以该电荷为中心的球对称性,即各点的场强方向应沿从点电荷引向各点的径矢方向,并且在距点电荷等远的所有各点上,场强的数值应该相等。据此,可以选择一个以点电荷所在点为球心,半径为 r 的球面为高斯面 S 。通过 S 面的电通量为

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S E dS = E \oint_S dS$$

最后的积分就是球面的总面积 $4\pi r^2$,所以

$$\Phi_e = E \cdot 4\pi r^2$$

S 面包围的电荷为 q 。高斯定律给出

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

由此得出

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

由于 \mathbf{E} 的方向沿径向,所以此结果又可以用矢量式

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

表示,这就是点电荷的场强公式。

若将另一电荷 q_0 放在距电荷 q 为 r 的一点上,则由场强定义可求出 q_0 受的力为

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}q_0 = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

此式正是库仑定律。这样,我们就由高斯定律导出了库仑定律。

例 10.6 均匀带电球面。求半径为 R ,均匀地带有总电量 q (设 $q > 0$)的球面的静电场分布。

解 先求球面外任一场点 P 处的场强。设 P 距球心为 r (图 10.11),并连接 OP 直线。由于自由空间的各向同性和电荷分布对于 O 点的球对称性,此带电球面的电场的分布也必然具有球对称性,即各点场强 \mathbf{E} 的方向都是沿着各自径矢的方向(如果不是这样,设 P 点 \mathbf{E} 的方向在图中偏离 OP ,例如,向下 30° ,那

么将带电球面连同它的电场以 OP 为轴转动 180° 后, 电场 E 的方向就将应偏离 OP 向上 30° 。由于电荷分布并未因此转动而发生变化, 所以电场方向的这种改变是不应该有的。带电球面转动时, P 点的电场方向只有在该方向沿 OP 径向时才能不变)。而且, 在以 O 为心的同一球面上各点的电场强度的大小都应该相等。因此, 可选球面 S 为高斯面, 通过它的电通量为

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S E dS = E \oint_S dS = E \cdot 4\pi r^2$$

此球面包围的电荷为 $\sum q_{in} = q$ 。高斯定律给出

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

由此得出

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R)$$

考虑 E 的方向, 可得电场强度的矢量式为

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad (r > R) \quad (10.23)$$

此结果说明, 均匀带电球面外的场强分布正像球面上的电荷都集中在球心时所形成的一个点电荷在该区的场强分布一样。

对球面内部任一点 P' , 上述关于场强的大小和方向的分析仍然适用。过 P' 点作半径为 r' 的同心球面为高斯面 S' 。通过它的电通量仍可表示为 $4\pi r'^2 E$, 但由于此 S' 面内没有电荷, 根据高斯定律, 应该有

$$E \cdot 4\pi r'^2 = 0$$

即

$$E = 0 \quad (r < R) \quad (10.24)$$

这表明: 均匀带电球面内部的场强处处为零。

根据上述结果, 可画出场强随距离的变化曲线—— $E-r$ 曲线(图 10.11)。从 $E-r$ 曲线中可看出, 场强值在球面($r=R$)上是不连续的。

例 10.7 均匀带电球体。 求半径为 R , 均匀地带有总电量 q 的球体的静电场分布。

铀核可视为带有 $92e$ 的均匀带电球体, 半径为 $7.4 \times 10^{-15} \text{ m}$, 求其表面的电场强度。

解 设想均匀带电球体是由一层层同心均匀带电球面组成。这样例 10.6 中关于场强方向和大小的分析在本例中也适用。因此, 可以直接得出: 在球体外部的场强分布和所有电荷都集中到球心时产生的电场一样, 即

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r \quad (r \geq R) \quad (10.25)$$

为了求出球体内任一点的场强, 可以通过球内 P 点做一个半径为 r ($r < R$) 的同心球面 S 作为高斯面(图 10.12), 通过此面的电通量仍为 $E \cdot 4\pi r^2$ 。此球面包围的电荷为

$$\sum q_{in} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{q r^3}{R^3}$$

由此利用高斯定律可得

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \quad (r \leq R)$$

这表明, 在均匀带电球体内部各点场强的大小与径矢大小成

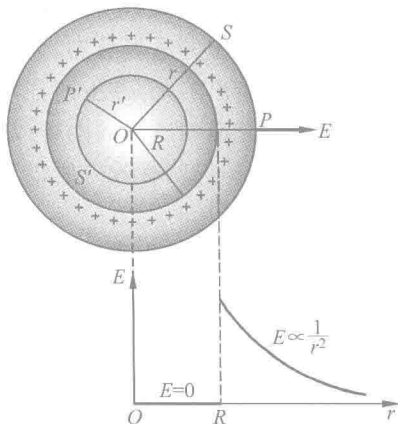


图 10.11 均匀带电球面的电场分析

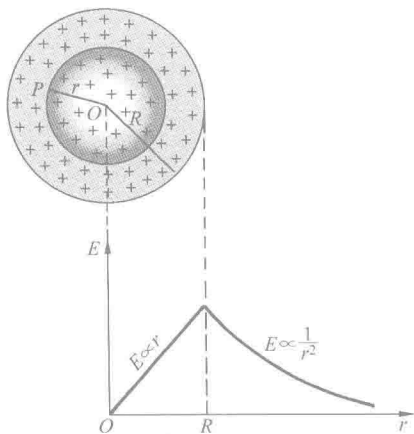


图 10.12 均匀带电球体的电场分析

正比。考虑到 E 的方向, 球内电场强度也可以用矢量式表示为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \quad (r \leq R) \quad (10.26)$$

以 ρ 表示体电荷密度, 则式(10.26)又可写成

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \quad (10.27)$$

均匀带电球体的 $E-r$ 曲线绘于图 10.13 中。注意, 在球体表面上, 场强的大小是连续的。

由式(10.26)可得轴核表面的电场强度为

$$\begin{aligned} E &= \frac{92e}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{92 \times 1.6 \times 10^{-19}}{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times (7.4 \times 10^{-15})^2} \\ &= 2.4 \times 10^{21} \text{ (N/C)} \end{aligned}$$

这一数值比现今实验室内获得的最大电场强度(约 10^6 N/C)大得多!

例 10.8 无限长均匀带电直线。 求线电荷密度为 λ 的无限长均匀带电直线的静电场分布。

输电线上均匀带电, 线电荷密度为 4.2 nC/m , 求距电线 0.50 m 处的电场强度。

解 带电直线的电场分布应具有轴对称性, 考虑离直线距离为 r 的一点 P 处的场强 E (图 10.13)。由于空间各向同性而带电直线为无限长, 且均匀带电, 所以电场分布具有轴对称性, 因而 P 点的电场方向唯一的可能是垂直于带电直线而沿径向, 并且和 P 点在同一圆柱面(以带电直线为轴)上的各点的场强大小也都相等, 而且方向都沿径向。

作一个通过 P 点, 以带电直线为轴, 高为 l 的圆筒形封闭面为高斯面 S , 通过 S 面的电通量为

$$\begin{aligned} \Phi_e &= \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

在 S 面的上、下底面(S_1 和 S_2)上, 场强方向与底面平行, 因此, 上式第 2 个等号右侧后面两项等于零。而在侧面(S_3)上各点 \mathbf{E} 的方向与各该点的法线方向相同, 所以有

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_3} E dS = E \int_{S_3} dS = E \cdot 2\pi r l$$

此封闭面内包围的电荷 $\sum q_{in} = \lambda l$ 。由高斯定律得

$$E \cdot 2\pi r l = \lambda l / \epsilon_0$$

由此得

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (10.28)$$

这一结果与 10.3 节中例 10.2 的结果式(10.15)相同。由此可见, 当条件允许时, 利用高斯定律计算场强分布要简便得多。

题中所述输电线周围 0.50 m 处的电场强度为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{4.2 \times 10^{-9}}{2\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 0.50} = 1.5 \times 10^2 \text{ (N/C)}$$

例 10.9 无限大均匀带电平面。 求面电荷密度为 σ 的无限大均匀带电平面的静电场分布。

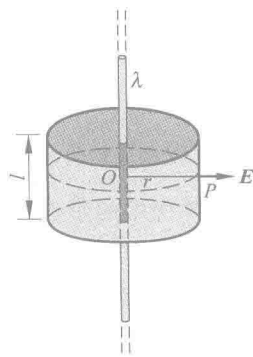


图 10.13 无限长均匀带电直线的场强分析