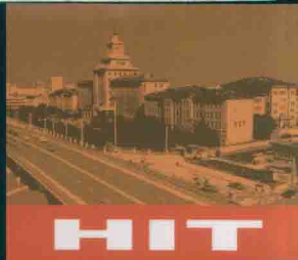


Questing for the Secrets of Inequalities



数学·统计学系列

不等式探秘

李世杰 李盛 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



数学·统计学系列

P₁

不等式探秘

Questing for the Secrets of Inequalities



李世杰 李盛 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书纵谈不等式的探索与发现,破解不等式的谜团,与读者共赏不等式的睿智美妙,领略不等式的博大精深.汇编了作者在代数不等式、几何不等式、凸函数不等式和函数元不等式等方面的一系列研究成果,新法迭现,应用独特.最后从“大不等式观”出发,介绍基于现代技术的不等式可视化研究,把部分不等式变成了美丽的几何图案,让人们能欣赏到不等式精美的一面.书中一些成果如:“函数元不等式”“区域与不等式思想”“不等式是刻画自然形态的重要模型”等具有较高的科学价值和教育价值.

本书对于数学工作者、数学爱好者,特别是高中生和大学生,有较高的参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

不等式探秘/李世杰,李盛著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2017.1

ISBN 978 - 7 - 5603 - 6228 - 1

I. ①不… II. ①李… ②李… III. ①不等式 - 研究
IV. ①O178

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 241281 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 李 欣

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451 - 86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂

开 本 787mm × 1092mm 1/16 印张 31.25 字数 593 千字

版 次 2017 年 1 月第 1 版 2017 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 6228 - 1

定 价 88.00

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎ 作者简介

李世杰,1960年12月生.高级教师,数学特级教师,长三角基础教育高中数学学科专家,浙江省基础教育课程改革专业指导委员会高中数学学科组成员,浙江省中小学教材学科审查委员,人民教育出版社和教育部课程教材研究所“课改优秀实验教研员”,浙江省优秀教研员,人民教育出版社A版教材培训讲师团成员,衢州市优秀115人才,杭州师范大学教育硕士专业学位研究生指导教师,“浙派名师名校长培养工程”高中数学名师培养班实践导师,浙江省数学会理事,全国不等式研究会常务理事,全国初等数学研究会常务理事(副秘书长),《上海中学数学》杂志和浙江《中学教研》杂志编委.

主要成果:参与国家多个自然科学基金项目和全国教育科学规划国家课题的研究,参与的课题两次获得浙江省基础教育教学优秀成果二等奖.在罗马尼亚国际数学杂志《Octagon Mathematical Magazine》《上海大学学报(英文版)》《数学通报》等刊物上发表论文300多篇,其中10多篇被《中国数学文摘》《中国初等数学研究文集》《中学数学教与学》等转载.编著出版《周期函数论》《不等式》《递推与递推方法》《函数元不等式理论及其应用》等书,参与人教A版新课程高中数学课标选修教材4-5《不等式选讲》编写工作.独立完成的论文获得浙江省自然科学优秀论文二等奖,全国初等数学研究会和中国职业技术教育学会优秀文章一等奖.

多次被浙江省教育厅聘为试题评价专家,并被聘为人民教育出版社A版课标教材培训专家,曾经到福建省、湖南省、内蒙古自治区、山西省、贵州省贵阳市、黑龙江省、河北省衡水市等实验区做

教师教材培训工作.

李盛,1988年生,浙江省衢州一中高中数学教师.2013年被评为人民教育出版社和教育部课程教材研究所优秀实验教师,2015年起连续两年被评为浙江省数学竞赛优秀教练员,2016年被中国数学会评为全国高中数学联合竞赛优秀教练员.2016年获得衢州市教师文化专业知识考试优胜奖(高中数学第一名),衢州市高中数学“一师一优课,一课一名师”评比一等奖(第一名),并被评为浙江省省级优课.现任衢州市张维忠专家工作站骨干成员,衢州市数学学会理事.

主要成果:参与多个国家级课题研究,教育部课程教材研究所重点课题“高中数学教材代数、微积分内容的研究(课题批准号:KC2014-015)”核心成员,主持市级课题被评为市二等奖,参与课题被评为市级优秀课题.

在罗马尼亚国际数学杂志《Octagon Mathematical Magazine》《中国数学教育(高中版)》《中国初等数学研究》《浙江外国语学院学报》《湖南理工学院学报(自然科学版)》《数学通讯》《上海中学数学》等刊物上发表过40多篇论文,参与编著出版《函数的性态及应用》《函数不等式》《函数元不等式理论及其应用》《不等式的结构及应用》等书,撰写论文获得浙江省高中数学优秀教研论文一等奖、二等奖和三等奖各一次,衢州市自然科学优秀论文一、二等奖(各三次)和全国初等数学研究优秀论文一、二、三等奖(共六次).

辅导学生数学竞赛成绩突出,“希望杯”全国数学邀请赛3人获得银牌,10人获得铜牌;浙江省数学竞赛9人获得一等奖,10人获得二等奖,12人获得三等奖;全国高中数学联合竞赛4人获得全国二等奖,7人获得省一等奖.

◎ 序

不等式是数学知识的一个重要组成部分,是刻画现实世界中不等关系的一个有效的数学模型,主要反映事物在量上的区别.在现代数学发展过程中,不等式理论起到了重要作用.尤其在分析学、偏微分方程、微分几何、解析数论、数学物理等学科的发展中有广泛的应用.

一方面,不等式的发现、论证和应用过程,是数学文化的精髓所在.数学思想方法是数学知识的精髓,不等式是数学思想的重要载体,证明不等式、解不等式以及应用不等式的方法灵活多样,丰富多彩、技巧性强,这对分析综合能力和正逆思维能力的培养,提高人们的思维品质将会起到很好的促进作用.

另一方面,不等式的许多性质对解决数学问题有很大的帮助,它可以渗透到几乎所有的数学领域中,与其他知识也有紧密的联系,在涉及量有关的内容中几乎都会用到它,是学习数学和其他学科的重要工具.不等式在现实生活中也具有广泛的应用,借助不等式可以处理并解决大量的现实生活中的实际问题.

因此,研究不等式的基础理论与应用,是一件很有意义的事.从全书来看,两位作者长期从事这方面的研究工作,在初等不等式的理论创新与应用方面的研究是卓有成效的.书中的一篇篇文章很好地反映了作者三十多年来的不等式探秘之旅程,正是在对不等式一系列专题研究的基础上,本书汇集了作者已发表的部分论文和出版专著中的一些重要成果,是不等式研究的一部力作.

本书内容非常丰富,从奥林匹克不等式研究出发,汇编了作者在代数不等式、几何不等式、凸函数不等式和函数元不等式等方面的研究文章,提出了证明不等式的若干重要思想方法,挖掘了不等

式的一些独特应用,最后给出了基于现代技术的初等不等式研究成果,反映了作者近几年最新的科研成果.书中一些成果是作者首次提出的独到见解,如:“函数元不等式”是不等式领域的一块处女地,“区域与不等式思想”“不等式是刻画自然形态的重要模型”“不等式的可视化研究”等都具有较高的科学价值和教育价值.

特别值得一提的是,基于现代技术的不等式研究,是数学领域中的一个有意义的方向,尤其是在数学的教学和研究中,要引起足够的重视.两位作者在这方面已做了初步研究,取得了一系列成果,如从“大不等式观”出发,提高不等式的亲和力,把不等式变成美丽的几何图案,可以改变以往人们对数学不等式艰难生涩的刻板印象,欣赏到不等式精美的一面,培养人们对数学的长期兴趣.但这方面的理论目前仍在探讨并需要逐步完善,继续深入加以研究是十分必要的.

《不等式探秘》一书纵谈许多不等式的探索与发现,破解不等式的谜团,与读者共赏不等式的睿智与美妙,领略不等式的博大精深.特别是在研究初等不等式方面品格独特,思想新锐,视角新颖,新法迭现.作者选材别致,不袭前人,许多内容简洁深刻,系统实用.这既是一本出色的不等式研究专著,又是一本优秀的初等不等式入门书.而且,对要进一步学习与研究现代数学中广泛使用的更高深、更复杂的不等式的读者,也有非常有益的帮助和启发.

书中文章在传授不等式知识的同时注意揭示其背后的哲理,在介绍成果时注意说明其秉持的思想方法,并阐发其间所包含的情趣,有益于数学工作者、数学爱好者特别是高中生、大学生启迪思维,开阔视野,丰富知识和科学研究方法,领略数学花园的旨趣.

相信本书的出版,将会更进一步促进不等式领域中相关的研究和应用.

陆国震

2015年12月

于美国韦恩州立大学

前言

风起云涌,潮涨潮落,岁月之河缓慢而又湍急.转瞬之间,我们已舒适诗意地栖居在数学花园中探索研究了三十多年.我们倾情所有,每天都遨游在魂牵梦绕的数学花园中,用心观察,深入思考,刻苦钻研,发现潜藏其中的新奇和优美.每天因数学而兴奋,有数学而充实,努力将人生演绎成发现数学规律与开发数学智慧的探秘之旅程.数学教学与研究已成为我们的一种生活方式,数学写作则是对生命的庄严承诺.

在不等式知识相关领域,通过三十多年来不懈的探索 and 追求,我们取得了一些成果:已出版了五部不等式书籍,有 100 多篇不等式论文发表在罗马尼亚国际数学杂志《Octagon Mathematical Magazine》《上海大学学报(英文版)》《数学通报》《中国初等数学研究》《中学教研》(数学)、《中学数学教学》《上海中学数学》和《数学通讯》等杂志上,10 多篇文章被中国科学院《中国数学文摘》《中国初等数学研究文集》收录,1 篇不等式论文获得浙江省自然科学优秀论文二等奖,6 篇不等式论文获得衢州自然科学优秀论文一等奖,8 篇不等式论文分别获得全国初等数学研究学术交流会优秀论文一、二、三等奖,我们还参与了人民教育出版社普通高中课程标准实验教科书《数学》选修 4-5《不等式选讲》的编写及后续教材编写相关教育部重点课题的研究工作.

很早以前,就有将我们已发表的一些不等式重要成果结集出版的想法,这是一种重要的知识积累,会给我们的生命增添新的钙质,让我们前进的步伐更加坚定有力,在数学的天空中能飞得更高更远.一直到 2014 年 7 月,在安徽合肥参加全国第九届初等数学研究学术交流会期间,欣遇刘培杰先生,这一想法获得刘先生的大

力支持,我们终于开始付诸行动.

回望倾注我们深沉至爱的不等式研究之路,艰辛与欢乐同在,遗憾与收获并存,夜伴星星,孤灯寒窗是常态,不辞辛苦,长期坚持,到也忙中有乐,痴中有甜.我们一直在奋力探索数学不等式之奇景,试图理清不等式王国复杂之渊源,力图在自己能力范围内把不等式研究的平凡事情做好.星云法师认为,懂点禅道会增加人生的味道.我们特别羡慕故事中禅师对懵懂弟子的点化之功:眼望一轮明月让人尘俗尽消,手指一盆兰花让人馨香满怀,风过竹梢让人悟出玄机,雁过寒潭让人猜出天道……这般浪漫的场景在现实的数学研究生活中几乎没有,我们没那境界,也没那悟性.但我们珍惜每一个幸运地与之相遇的数学符号、数学公式和结论,希望能读懂它们,解读出隐藏着的内在的数学韵味,数学中的风花雪月.对灵光一闪的每一个想法,都进行充满个人智慧的探究,努力到无能为力,拼搏到感动自己.数海茫茫,岁月匆匆,每一个发现都是一种美丽的缘分,有时候明明知道无缘无果,可能是镜花水月,但迷茫中却依然不舍不悔,经过艰辛的探索 and 追求,期望在茫茫数海中有额外收获相遇,不断追求众里寻他千百度,蓦然回首,那人却在灯火阑珊处的境界,其间的喜悦和快慰也为人生留下了一份份多彩的深深回忆.

本书汇编的文章,主要反映我们在不等式研究方面的一些亮点工作,从下面几个方面展开:

(1) 研究内容从点到面.

从研究单一的代数不等式、几何不等式、三角不等式的发现、证明、加强或推广,到成系统的专题化系列化研究.

(2) 注重概念的源头创新.

从追踪性研究到自主创新,发现并提出一些不等式研究的新方向和新课题.如:概念创新提出并研究了 α 凸函数, T 凸函数, T_{ϕ} 凸函数,高调函数,Gauss型函数方程等,从源头开始构建,巧挖源头活水,取得一系列原创性的理论研究成果.记得2005年8月在广东教育学院参加全国第三届不等式学术年会期间,突然有一个想法,试图在初等不等式领域,寻找一块未曾有人开垦过的“处女地”进行研究.最后发现不等式的函数解就是这样一个未曾解决的问题.我们将“含有自变量和未知函数,且两端的表示式是由有限个(已知的和未知的)函数与变数的有限次迭加所构成的不等式,称为函数元不等式”,多年的思索结出了丰硕的果实,关于函数元不等式研究的系列论文发表在《Octagon Mathematical Magazine》《上海大学学报(英文版)》和《数学通报》等杂志上,多篇文章被中国科学院《中国数学文摘》收录.

(3)“大不等式观”的建构.

在我們的大量研究中,发现不等式与等式具有很多相同的性质.2013年6月,我们在家中讨论时,十分偶然地发现了在实数范围内,不等式与等式的“等价性”,创新了不等式的内涵要素,建构起一个“大不等式”的知识结构:

①等式可以看作不等式 $f(x,y) \geq 0$ 等号成立的特例.这样在实数范围内,不等式的组成就包括方程、函数、数列等,而函数方程 $f(x,y) = 0$ 可以看作是函数元不等式 $f(x,y) \geq 0$ 等号成立的特例.

②等式(方程,函数)具有的一些性质,可以平推到不等式中,从而使得不等式具备了“等式”的一些功能,我们还挖掘出了不等式的一些独特性态.

③更新理念.从“大不等式观”出发,重新审视不等式的作用,可以放大对不等式的认知半径:函数与方程一般用细“线”(曲线或直线)刻画自然之美,而不等式大多数时候借用粗“线条”精雕细刻自然形态.通过开设不等式实验,可以让数学变成“实验”课程,利用3D打印技术还可以直接打印出不等式刻画的实物图案,这弥补了一个空白,有助于让数学重新回归创造本位.

(4)不等式的功能开发.

深入挖掘不等式的内在魅力,重点拓展不等式的育人价值.

①欣赏不等式的形式美,拓展美育价值.不等式(或方程式)不仅能够帮助人们解决知识上的问题,同时,从某种角度来看,某些不等式(或方程式)它们本身也是非常美丽的,那种简约而不简单、形式如诗句般优雅的美感,能充分展现数学的魅力与力量.

②欣赏不等式证明中的风景,收获数学思维训练价值.在证明不等式定理或命题时,很多人会认为不等式艰涩难懂、高深厚重,只是一个个枯燥的数学符号堆砌和深奥的推导过程.其实,这是一个误解,因为不等式的证明在数学中有着举足轻重的作用和地位,它包含的美丽与精巧就是一道亮丽的风景线,而这种亮丽其中包含的逻辑性、深刻性等甚至不需要用语言来描述就让我们为之震撼,能充分体现不等式是数学思维训练的重要载体.经过灵动演绎,研究不等式的数学课堂也会变成一个简单明快的诗意道场,让人心旷神怡,诗情画意,让人激情澎湃,在数学的世界里驰骋遨游.

③利用不等式的几何结构,拓展不等式的应用价值.用现实图案来展示不等式与方程的解的几何结构,意味着什么?意味着我们在实际中可以看到它,把玩它,感觉它,触摸它,用细线与条块编织美丽的数学梦.细线与区域条块,是描述数学中方程与不等式的解集的主要手段.用细线与区域条块编织美丽的数学之梦,是很有趣的一个话题.从2012年3月起我们开始做这项工作,取得的一批数学艺术图案,初步成果在几次数学教师培训会上进行展示与分享,受到

教师们的广泛好评,这也增强了我们继续研究的信心.

我们把这项工作当作是“玩数学”,通过编程、作图,确定方程与不等式的解是否存在?如存在,看看其解集的几何结构如何?如果制作出来的图案精美有特色,我们兴高采烈,欢天喜地;如果无解或图案无特色,我们懊恼、不甘心,从头再来,修改部分参数再探索;如果部分有价值,我们提炼,利用对称设计等方法拓展应用.

真人不露相,这用在不等式身上再合适不过了.在研究不等式的时候,我们常常会在最深的绝望中,遇见最美的风景.线条的表现力很强!一些图案,形状结构很特别,线条或直,或曲,或硬,或柔,或深,或浅,或僵,或软,每一种,都能体现不同味道的数学之美.很多不等式的解集图案似婀娜多姿的美女身影,让人心花怒放.

我们在电脑上的每一次操作,都可能生成一幅美图,姹紫嫣红,千姿百态,随心所欲,寄托着我们的无限期望.各种各样的数学定理、公式、概念、原理、不等式,都能画在图案上,这些图片能够传递和表达那种强烈的数学的张力,使大家领略通过理解、思考后马上被震撼、被吸引、为美妙所折服的感受.这些图案充分表明了具体直观地表达出知识的重要性和价值.

(5) 研究方式和手段的创新.

①研究方式创新.这些年,我们追求的明明是研究成功的幸福,但不经意间却得到彩虹的眷顾:不等式的可视化发现.习惯上不等式是证出来的,但借助信息技术,把不等式变成美丽的几何图案,使不等式直观可视化,我们就可以从图中把不等式看出来.

②研究手段创新.从早期的“纸+笔”形式的传统研究,过渡到利用信息技术辅助研究,在很多情况下,让沉闷的不等式证明辅以电脑模拟,是如此简单、美丽以至于瞬间就可以看到不等式的几何结构,开创出不等式研究的一片新天地.

初期制作不等式解集图案时,电脑创造一幅图大约要40多分钟,由于运算量大,需要相当耐心等待电脑中图案的生成.为此,常常误了吃饭,忘了休息,用废寝忘食形容,一点都不过分.长话短说,一年以后,我们积累的不等式图案出现了“指数爆炸”式增长,总数就达到3000多幅了.

生活中处处有数学,也处处有不等式.我们从数学上简单完美的不等式结构开始做,赋予数学新的生命力.当我们偏离了那一整套特定的数学法则,以简单的运算法则为基础的数学法则,并用自己的方式做一些修饰之后,图案就变得自然丰富起来.由此,我们拥有了一系列不断演化的图案设计的生命之树,就好比地球上的生命,从未曾停止进化,只要对DNA编码稍微修饰和复杂化,就

导致新物种的出现. 同样地, 对不等关系式中参数一点点的改变, 就导致更完美的或别具一格的新图案的出现. 所以, 我们的研究具有它本身内在的有机的生命力, 这是我们个人的观点, 也是基于我们对这些数学图案的理解.

这样我们从研究单纯的具体不等式, 到解析欣赏不等式的几何结构. 而一个表面显得复杂的图形, 令人惊讶的可能是一个简单不等式解集的几何结构. 而一个简单的不等式, 也可能拥有漂亮的几何结构. 我们希望不等式艺术图案的研究成果能广泛传播, 也希望有成百上千的爱好者能参与进来, 共同寻找、探索、发现更多更美的不等式数学图案. 我们抛砖引玉, 希望进一步推动不等式可视化的研究工作.

③从个人单打独斗, 到与一些志同道合的朋友联合研究, 再到我们父子接力共同研究, 时间跨度长达 40 多年. 路不通时选择拐弯, 心不快时选择看淡. 一路上遇到的朋友为我们指点迷津, 让我们少走了很多弯路.

数学研究是一个缓慢的过程, 需要长期积累. 若快了, 我们思维的节奏就会跟不上. 犹如一朵云推动另一朵云, 一棵树摇动另一棵树, 一粒种子随风撒落, 一场春雨润物催耕, 我们不一定了解, 结论是哪一朵云, 规律是哪一棵树, 种子会在哪里生根?

数学研究是苦行僧角色, 一路磨砺, 一路禅修, 沿途有那么多多情的目光温暖着我们, 鼓舞着我们. 一路行来, 从“山重水复”到“柳暗花明”, 从“孤灯一盏”到“霞光十里”, 目光所及, 心儿所向, 都有好心人儿借我们东风, 助我们前行.

数学中隐藏着很多的诗意空间, 黔驴技穷时, 一切困难都是线索, 所有陷阱都是路径, 我们且思且行, 从“春暖花开”到“冰雪无情”, 头顶的大雁会记住我们的探寻; 夜雨中, 当思绪独自盘桓, 那阑珊如梦的气氛悄悄涌近时, 数学灵感会似一只惊鸿翩然而至, 轻轻敛翅于如浮萍般的思维扁舟上, 将我们带进雨夜的长廊, 发现其间不少暖心惬意的风景和“琴棋书画诗酒花”的浪漫.

三毛说过: 心若没有栖息的地方, 到哪里都是在流浪. 在数学的世界里, 我们的心会很安静. 我们利用信息技术用心为不等式涂上透明色, 辨认出其隐藏在余光里的风景, 收获一个个“小确幸”(微小而确定的幸福). 电脑给出的图案, 有的如长江东流, 水落石出, 伫立月下, 月凉如水; 有的如青山绿水春意盎然且多彩多娇, 让人心驰神往; 有的如海市蜃楼, 令人怅然若失; 有的如喷薄而来夜雨的意韵, 兴之所至, 愈来愈浓酽, 愈来愈弥漫; 有的像纯白的夜来香, 暗香浮动, 显现出琵琶遮面的娇嫩柔姿. 而在此之际, 最怡然最惬意的莫过于浅款轻衫, 踱步于窗前, 顿坐于藤椅之中, 收获一份如夜雨般空灵俊逸的心境足矣.

不等式研究对我们的影响真的深远, 我们研究的价值和意义, 就在于真的能改变世界的某些风景. 不去问付出值不值得, 未来世界的回声会告诉我们答

案.我们隔着光阴看一朵朵水花起舞,看无数潮浪回头,静静地享受着作为数学工作者的无限幸福.

考虑到主要读者是数学研究人员、大学数学系师生、中学数学教师和爱好数学的高中、中专学生,为此,本书特意收编了大量的可作为数学竞赛试题来源的不等式文章.实际上我们对不等式研究的许多成果,与数学竞赛密切相关,有些不等式直接被采用作为竞赛试题,有的作为数学竞赛原创性试题的一个重要来源改编使用,对准备参加各级各类数学竞赛的学生也会有所帮助.

在我们的研究过程中,曾得到中国科学院计算数学所胡星标研究员、上海大学博士生导师冷岗松教授、全国不等式研究会副理事长北京联合大学石焕南教授、全国不等式研究会副理事长中国计量学院赵长健教授的帮助和指导.浙江海宁电大张小明教授、杭州电子科技大学俞武扬副教授、南京晓庄学院赵灵芝老师等参与了我们的一些研究工作;哈尔滨工业大学出版社在审稿过程中提出了许多有价值的修改意见;国际著名调和分析学家、美国韦恩州立大学终身教授、北京师范大学“京师学者”、国家特聘讲座教授、“2010年中组部千人计划”的陆国震博士在百忙之中赐写序言,为本书增添了光彩,我们在这里一并表示诚挚的谢意!

限于水平,书中如有不当之处,敬请读者不吝指正!

作 者

2016年1月

第1章 奥林匹克不等式研究 //1

- 1.1 一道集训题的巧证及加权推广 //1
- 1.2 一道全国竞赛题的多种解法 //3
- 1.3 一道全国联赛试题的再思考 //6
- 1.4 2004 美国数学奥林匹克第5题探源 //9
- 1.5 一道全国高中数学联赛题引起的思索 //12
- 1.6 一道国际数学奥林匹克竞赛题的推广 //17
- 1.7 若干不等式问题集锦研究 //19
- 1.8 世界数学团体锦标赛一个试题的多向开发 //27
- 1.9 一道竞赛附加题的别证与推广 //32
- 1.10 一道2014年全国联赛加试题的推广 //34

第2章 代数不等式 //37

- 2.1 关联平均值的几个新不等式 //37
- 2.2 一个不等式的证明、应用及推广 //39
- 2.3 在实数范围内求解一类特殊方程和不等式的一种方法 //44
- 2.4 $f_n(x) \wedge x$ 的同解定理及其应用 //48
- 2.5 一个分数和不等式的妙用 //50
- 2.6 推广的柯西不等式及其应用 //53
- 2.7 均比函数的递增性 //55
- 2.8 一个基本母不等式 //56

- 2.9 关于可导函数的一个不等式 //58
- 2.10 关于高斯函数的几个不等式 //60
- 2.11 加权幂平均值不等式应用功能的开拓及推广 //61
- 2.12 异幂平均值不等式及其应用 //69
- 2.13 轮换平均不等式及其应用 //72
- 2.14 切比雪夫总和不等式的加权推广及优美的积分形式 //77
- 2.15 两个函数不等式及其应用 //85
- 2.16 谈一个优美不等式的推广 //89
- 2.17 一个猜想不等式的推广 //92
- 2.18 控制不等式定义的扩展 //95

第3章 几何不等式研究 //100

- 3.1 关联五个三角形面积的一个不等式 //100
- 3.2 关于三角形中线和面积的一个不等式 //103
- 3.3 涉及角平分线和面积的一个不等式 //106
- 3.4 一个几何定理及应用 //107
- 3.5 从函数角度估算三角形的面积 //109
- 3.6 关联三角形面积的几个新定理 //115
- 3.7 涉及两个三角形的又一不等式 //122
- 3.8 外森比克不等式与 Klamkin 不等式的联合推广 //129
- 3.9 关联 $n + m$ 个三角形的两个新的不等式 //132
- 3.10 关联 n 个三角形的几个新不等式 //135
- 3.11 三角形的几个边角变换 //144
- 3.12 加权斯坦勒尔极值的显式表示 //147
- 3.13 涉及两个三角形不等式的加权推广 //149
- 3.14 三角形构形的一个定理及应用 //152
- 3.15 一个几何不等式的应用 //155
- 3.16 欧拉不等式一般推广的隔离 //157
- 3.17 一个新的几何不等式及应用 //159
- 3.18 关于四面体的一个不等式及应用 //163

3.19 关于凸 n 边形的一个不等式 //165

3.20 完美不等式初论 //166

第4章 凸函数不等式研究 //173

4.1 凸函数琴生不等式的一个推广及其应用 //173

4.2 广义凸函数定义和性质之我见 //180

4.3 几何凸函数的若干性质 //185

4.4 α 凸函数 //191

4.5 一元二次和三次函数几何凸性的判别 //198

4.6 对函数几何凸性若干问题的理论研究 //202

4.7 关于连续函数的 T 几何凸性问题 //212

4.8 关于连续函数的 T 凸性问题 //217

4.9 $\langle l, t \rangle$ 凸函数初探 //221

4.10 $\langle l, t \rangle$ 凸函数再探 //231

4.11 中点 $\langle l, t \rangle$ 几何凸函数初探 //241

4.12 $\langle l, t \rangle$ 几何凸函数及应用研究 //244

4.13 关于二元凸函数的几个不等式 //250

4.14 关于 β 凸函数的一个不等式 //256

4.15 关于 $\langle l, t \rangle$ 对数性凸函数的几个不等式 //258

4.16 Inequalities for T_ϕ -Convex Functions //266

4.17 若干凸函数不等式在几何凸函数中的移植 //276

4.18 两个与初等对称函数有关的 S -几何凸函数 //282

第5章 函数元不等式研究 //287

5.1 世界名题“斐波那契兔子问题”的推广 //287

5.2 几个 N 维函数元不等式组的可微解 //291

5.3 不等式 $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ 解函数的探求 //295

5.4 已知递推不等式求解析式 //304

5.5 一个重要的“母”函数不等式 //308

5.6 一个加权的“母”函数不等式 //312

5.7 四个经典不等式的函数化推广 //316

5.8	几类具有特殊结构的函数元不等式	//324
5.9	High-Monotony Function and Its Applications	//335
5.10	一个“母”函数不等式的高维推广	//342
5.11	琴生不等式的高维推广	//347
5.12	N 维函数元不等式的三个等价定理	//350
第6章 证明不等式的思想方法 //355		
6.1	数学归纳法应用功能的拓广	//355
6.2	把证明不等式的一般方法教给学生	//356
6.3	推证不等式的数学变换方法	//362
6.4	翻转研究,批量发现——谈基于软件的数学发现与证明	//368
第7章 不等式应用 //377		
7.1	关于函数最值的两个似是而非问题	//377
7.2	自然数分拆的一个性质	//379
7.3	整点三角形的最小面积	//379
7.4	关于 $a \left \prod_{i=1}^n \cos \alpha_i \right + b \left \prod_{i=1}^n \sin \alpha_i \right $ 的最值	//380
7.5	从点到直线距离公式的简单推导谈起	//382
7.6	区域图形的对称性	//386
7.7	一个数学问题的推广	//396
7.8	一个乘积集合的极值元	//398
第8章 基于现代技术的不等式研究 //401		
8.1	“等”与“不等”的辩证关系	//401
8.2	区域与不等式思想	//407
8.3	不等式是刻画自然形态的重要模型	//416
8.4	由勾股定理引出的优美图案探析	//425
8.5	创造美丽图案的数学方法赏析	//431
8.6	不等式的可视化发现与应用价值新探	//437
8.7	把不等式变成美丽的几何图案	//445
参考文献 //456		