



普通高等教育“十三五”汽车类规划教材

汽车后桥振动噪声 及案例分析

Case Analysis of Automobile
Rear Axle Vibration Noise

徐劲力 姚佐平 吴波◎编著



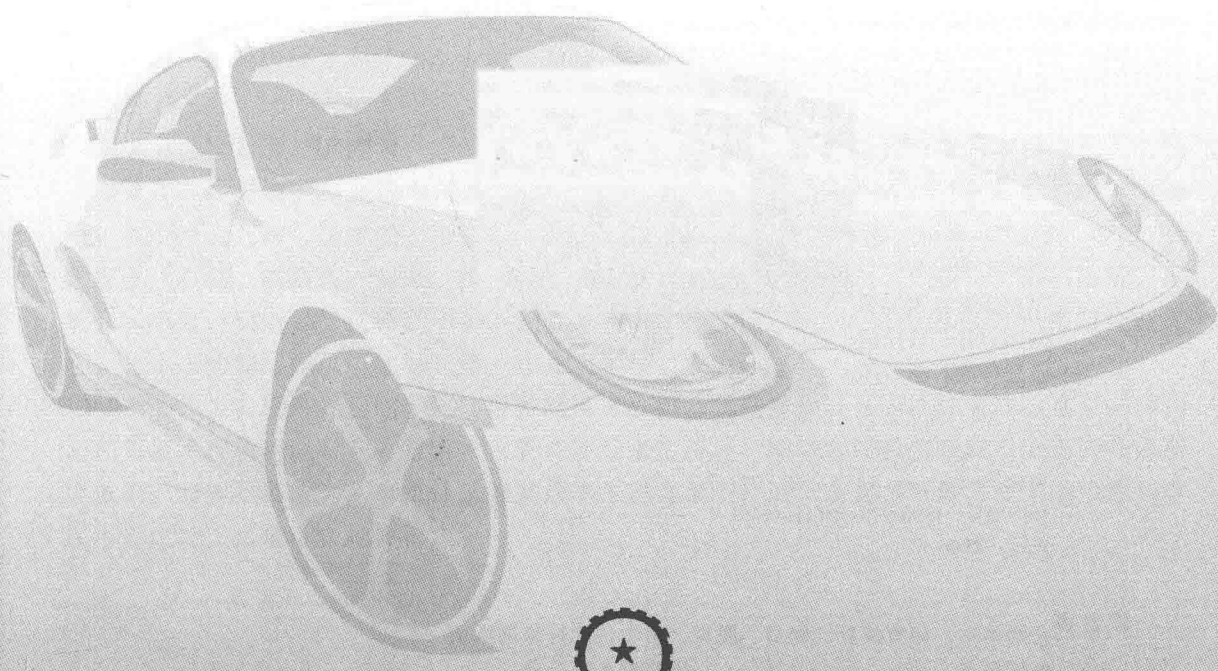
机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



普通高等教育“十三五”汽车类规划教材

汽车后桥振动噪声及 案例分析

徐劲力 姚佐平 吴波 编著



机械工业出版社

本书以跨界车驱动桥为研究对象,从理论到实践,突出工程应用。本书的主要内容有:跨界后驱车驱动桥振动与噪声分析理论基础、跨界后驱车驱动桥结构特点与工作原理、主减速器振动与噪声分析、差速器振动与噪声分析、驱动桥总成振动与噪声分析、跨界后驱车传动轴-驱动桥耦合振动分析以及跨界后驱车驱动桥轻量化设计与实例等。

本书可作为车辆工程专业研究生、本科生教材,也可作为有关技术人员参考读物。

图书在版编目(CIP)数据

汽车后桥振动噪声及案例分析/徐劲力,姚佐平,吴波编著. —北京:机械工业出版社,2017.6

普通高等教育“十三五”汽车类规划教材

ISBN 978-7-111-56457-7

I. ①汽… II. ①徐… ②姚… ③吴… III. ①汽车-后桥-车桥耦合振动-高等学校-教材 IV. ①U463.218

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑:宋学敏 责任编辑:宋学敏 李 然

封面设计:佟瑞鑫 责任校对:张 静

责任印制:李 昂

北京京师印务有限公司印刷

2017年8月第1版第1次印刷

184mm×260mm·13.75印张·321千字

标准书号:ISBN 978-7-111-56457-7

定价:45.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

服务咨询热线:010-88379833

读者购书热线:010-88379649

封面无防伪标均为盗版

网络服务

机工官网:www.cmpbook.com

机工官博:weibo.com/cmp1952

教育服务网:www.cmpedu.com

金书网:www.golden-book.com

前言

汽车在给人类带来极大方便的同时，也给生态环境造成了严重的影响。随着汽车产能的持续增长，汽车的排放、振动、噪声等对周围环境的不利影响更加显著。汽车行业的研究者、从业者一直致力于解决汽车发展过程中带来的不利问题，并已有所收获，但汽车排放、振动、噪声、NVH性能等问题一直是学者们研究的焦点。近年来，各国对这些问题的认识已提高到国家发展的战略层面。我国制定了一系列更加严格的汽车排放、振动、噪声、NVH性能等标准。编者也正在参与国家级“微车安全标准”等推荐标准的制定工作。

本书编著者针对汽车的振动与噪声，特别是汽车传动轴和后桥的振动与噪声，已做了长达十年之久的研究工作，在该领域取得了一定的理论与试验研究成果和经验，特将这些研究成果和经验收集、整理并融于本书，希望能对读者有所帮助。

本书以某跨界车驱动桥为研究对象，从理论到实践，重点突出工程应用，对振动与噪声理论基础和驱动桥结构特点与工作原理进行了介绍，通过理论分析、数值解析与仿真分析相结合的方法，探讨了主减速器、差速器、驱动桥总成、传动轴与后桥耦合等的振动与噪声的产生机理、影响因素及实际解决方法，同时也阐述了驱动桥轻量化的理论、方法，并引入案例分析。

本书由徐劲力、姚佐平、吴波编著。黄丰云、卢杰、韩少军、张晓帆为本书的编写提供了部分资料，并做了相应内容的整理工作；罗文欣、苏星溢、严婷、任中亚、戴鹏，李晓雪、陈端滢、刘璐、杨再煜，彭波、曹兴盛、游鹏超、魏鹏、卢雷、杨乐、徐维、饶东杰、朱定军、石磊、赵金涛、刘康、张丙伟、何锡进、曾雪宁、李鹏凯、刘虎、吴挺，宋旺、冯积孔、魏珂、何强、马洪伟、田力，高北海等项目组团队参与了相关内容的研究与分析工作，为本书的编写提供了数据支持，在此表示衷心感谢。

本书作为介绍跨界后驱车驱动桥振动噪声分析及其轻量化设计方面的著作，在总结国内外相关技术现状的同时，着重融入作者长期以来在跨界后驱车驱动桥振动噪声方面的技术研究成果。希望本书能为从事机械工程及汽车工程方面工作的读者提供帮助。由于书中难免存在不妥之处，恳请读者批评指正。

编著者

目 录

前言

第 1 章 跨界后驱车驱动桥振动与噪声

分析理论基础 1

1.1 机械振动分析理论基础 1
1.1.1 离散振动系统分析 1
1.1.2 连续系统振动分析 5
1.1.3 随机振动分析理论基础 10
1.1.4 机械振动的检测方法基础 15
1.1.5 机械振动的评价与控制方法 16
1.2 机械噪声分析理论基础 18
1.2.1 声学理论基础 18
1.2.2 机械噪声的分析 21
1.2.3 机械噪声检测方法 22
1.2.4 机械噪声的评价与控制 24
1.3 机械振动与噪声分析方法 26
1.3.1 测试法 26
1.3.2 有限元分析法 27
1.3.3 统计能量分析法 28
1.3.4 边界元法 30
1.3.5 传递路径分析法 31
1.3.6 模态分析与综合 33
参考文献 37

第 2 章 跨界后驱车驱动桥结构特点与

工作原理 39

2.1 驱动桥概述 39
2.2 驱动桥结构与工作原理 40
2.2.1 主减速器 40
2.2.2 差速器 47
2.2.3 半轴 53
2.2.4 桥壳 55
参考文献 61

第 3 章 主减速器振动与噪声分析 62

3.1 主减速器振动噪声产生机理 62

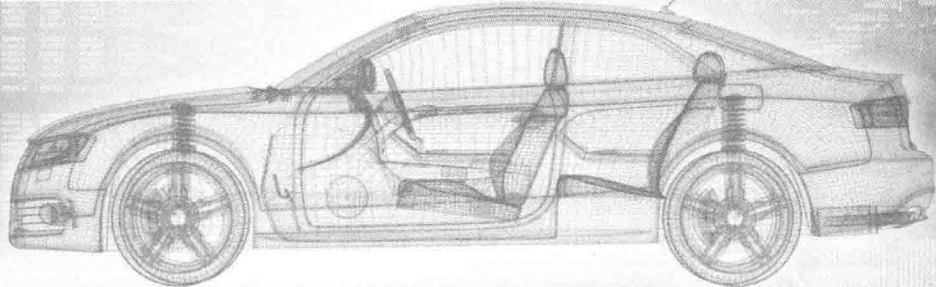
3.1.1 主、从动齿轮振动噪声产生机理 62
3.1.2 圆锥滚子轴承的振动噪声产生机理 64
3.2 主减速器的力学特性分析 65
3.2.1 准双曲面齿轮受力分析 65
3.2.2 主减速器壳体受力分析 66
3.3 主、从动齿轮振动特性分析 69
3.3.1 主、从动齿轮非线性动力学模型的建立 69
3.3.2 主要参数的确定 72
3.3.3 动力学微分方程的求解 74
3.4 主减速器齿轮参数对振动噪声的影响分析 79
3.4.1 齿轮时变啮合刚度对系统振动特性的影响 79
3.4.2 啮合间隙对齿轮系统振动特性的影响 85
3.5 准双曲面齿轮有限元与动力学仿真分析 89
3.5.1 有限元仿真分析 89
3.5.2 主减速器齿轮的动力学仿真分析 93
3.5.3 影响主减速器总成的传动误差的因素 97
3.6 主减速器轴承振动分析 97
3.6.1 圆锥滚子轴承的装配工艺分析 97
3.6.2 轴承预紧力对主减速器振动噪声的影响 99
3.6.3 主动锥齿轮轴承支承跨距对主减速器振动噪声的影响 99
参考文献 105

第 4 章 差速器振动与噪声分析 108

4.1 差速器的运动学分析和动力学分析 108



4.2 差速器的动力学仿真分析	110	6.2.3 方程的求解	167
4.2.1 建立差速器模型	110	6.3 传动轴-后桥主减速器动力学仿真	
4.2.2 仿真分析前处理	110	分析	168
4.2.3 动力学仿真分析	111	6.3.1 传动轴-主减速器模型仿真前	
4.3 差速器的振动特性分析	116	处理	168
4.3.1 差速器的固有特性分析	116	6.3.2 轴间夹角对传动轴-主减速器动力	
4.3.2 差速器齿轮系统的传递误差		传动影响的分析	170
分析	121	6.3.3 传动轴支承刚度对传动轴-主减	
4.4 差速器其他参数对振动噪声的影响		速器动力传动影响的分析	173
分析	121	6.3.4 主动齿轮轴承支承刚度对驱动桥	
4.4.1 差速器齿轮噪声产生机理	122	总成的影响	175
4.4.2 差速器齿轮齿侧间隙对振动噪声		6.3.5 传动轴对驱动桥主减速器齿轮	
的影响分析	122	动态弯曲振动的影响	177
参考文献	130	参考文献	179
第5章 驱动桥总成振动与噪声分析 ...	132	第7章 跨界后驱车驱动桥轻量化设计与	
5.1 驱动桥总成的噪声与振动源	132	实例	181
5.1.1 结构噪声与结构振动的激励源 ...	132	7.1 轻量化设计方法	181
5.1.2 激励传递路径与系统噪声响应 ...	133	7.1.1 汽车的轻量化概念	181
5.2 驱动桥壳与壳腔内部气体振动耦合 ...	134	7.1.2 轻量化设计的关键技术	182
5.2.1 驱动桥壳频响特性分析	135	7.1.3 跨界后驱车驱动桥轻量化设计	
5.2.2 驱动桥壳声-固耦合分析实例	138	种类	188
参考文献	148	7.2 跨界后驱车驱动桥壳结构轻量化设计	
第6章 跨界后驱车传动轴-驱动桥		实例	190
耦合振动分析	150	7.2.1 现有跨界后驱车驱动桥壳轻量化	
6.1 万向传动轴的运动学与动力学分析 ...	150	优化论证	190
6.1.1 万向传动轴的运动学特性	150	7.2.2 跨界后驱车驱动桥壳结构轻量化	
6.1.2 十字轴万向传动轴的动力学		设计	193
特性	154	7.3 主减速器壳体轻量化设计实例	197
6.1.3 万向传动轴中间支承转矩	156	7.3.1 原主减速器壳体有限元分析	198
6.2 传动轴-驱动桥系统耦合振动理论		7.3.2 主减速器壳体拓扑优化设计	202
分析	157	7.3.3 主减速器壳体精细化设计	204
6.2.1 传动轴-驱动桥系统的非线性		7.4 未来跨界后驱车驱动桥轻量化介绍 ...	209
动力学模型	158	参考文献	210
6.2.2 模型参数的确定	164		



跨界后驱车驱动桥振动与噪声分析理论基础

1.1 机械振动分析理论基础

振动是一种运动形态，是指物体在平衡位置附近做往复运动。

振动属于动力学第二类问题——已知运动求力。

按系统的自由度，振动可分为：①单自由度振动，即一个自由度系统的振动；②多自由度振动，即两个或两个以上自由度系统的振动；③连续系统振动，即连续弹性体的振动，这种系统具有无穷多个自由度。

1.1.1 离散振动系统分析

1. 单自由度振动系统

单自由度振动系统是最简单、最基础的有限自由度集中参数系统，是在任意时刻由一个广义坐标完全确定其位置的系统，是只需一个坐标就能完整描述系统运动规律的振动系统。

在工程应用中，某些系统通常可以简化成单自由度振动系统。以汽车为例，在只考虑不平坦路面的激励作用，而不考虑其他激励因素的情况下，仅对汽车车身垂直方向的振动进行研究，该问题就可以简化为单自由度系统的研究，如图 1-1 所示。

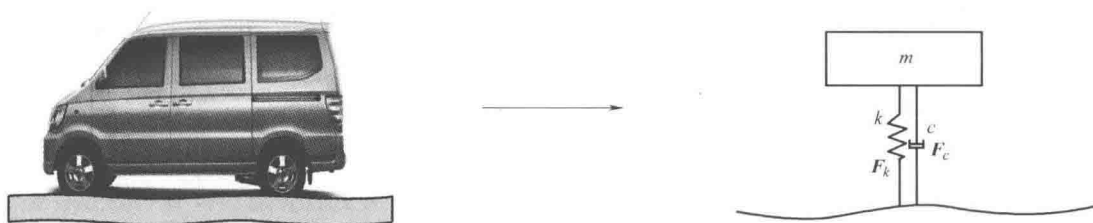


图 1-1 单自由度振动系统

在进行复杂系统特殊模态振动分析时，往往也需要构造该系统的单自由度模型。同时，对多自由度振动系统经解耦后也可以转化为单自由度振动系统问题。因此，单自由度振动系统是进行多自由度振动系统问题求解的分析基础。下面以汽车振动为例说明多自由度振动系



统转化为单自由度振动系统的问题。

在分析汽车振动问题时，一般把汽车车身质量看成是刚体的立体模型。汽车的簧上质量为 m_2 ，它由车身、车架及其上的零部件总成组成，通过减振器和悬架弹簧与车轴、车轮相连接。车轮和车轴构成的簧下质量为 m_1 ，车轮再经过具有一定弹性和阻尼的轮胎支承在不平路面上。在这个模型中，探讨运动过程中车身的平顺性时，主要考虑车身垂直地面、车身的俯仰及侧倾三个自由度，四个车轮质量有 4 个垂直自由度，共 7 个自由度。因此汽车振动模型是一个 7 自由度振动模型，如图 1-2 所示。

当汽车对称于其纵轴线时，汽车车身只有垂直振动 z 和俯仰振动 θ 对平顺性影响最大。这时，将汽车简化成图 1-3 所示的双轴汽车 4 自由度平面模型。由于轮胎阻尼较小，在此予以忽略。在这个模型中，车身质量 $m_{2c} = m_{2f} + m_{2r}$ ，主要考虑垂直和俯仰两个自由度，前、后车轴质量 m_{1f} 和 m_{1r} 有两个垂直自由度。因此可以将 7 自由度模型简化成 4 自由度模型。

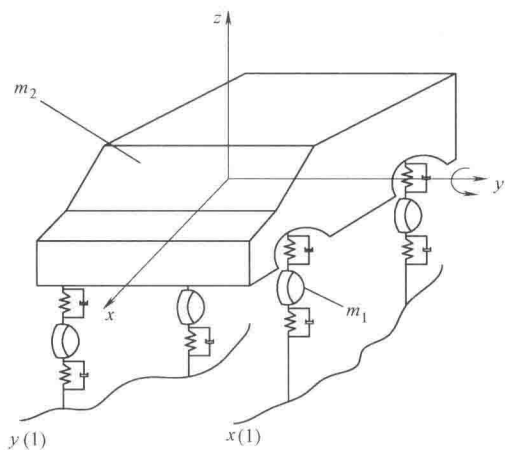


图 1-2 整车 7 自由度振动模型

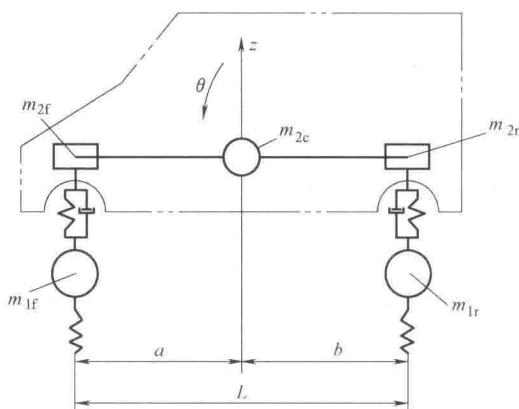


图 1-3 双轴汽车 4 自由度平面模型

当汽车前、后轴悬架质量分配达到一定值时，即满足以下关系：

$$m_2 = m_{2c} = m_{2f} + m_{2r}$$

$$m_2 \rho_y^2 = m_{2f} a^2 + m_{2r} b^2$$

$$a + b = L$$

$$m_{2f} = m_2 \frac{b}{L}$$

$$m_{2r} = m_2 \frac{a}{L}$$

$$\rho_y^2 = ab$$

即质心位置 c 到前、后悬架的距离 a 和 b 的乘积 ab 等于或接近于车身绕 y 轴的回转半径的平方 ρ_y^2 ，则前、后悬架系统的垂直振动几乎是独立的。因此，可以将汽车振动系统进一步简化为图 1-4 所示的车身和车轮二自由度振动系统模型。图 1-4 中， m_2 为簧上质量； m_1 为簧下质量，且有 $m_1 = m_{1f} + m_{1r}$ 。所以，在分析平顺性时，只考虑两个质量的垂直自由度。

在远离车轮部分，其固有频率在较低激振频率范围内轮胎变形很小，忽略其弹性和轮



胎质量, 就得到图 1-5 所示的最简单的单自由度振动模型。

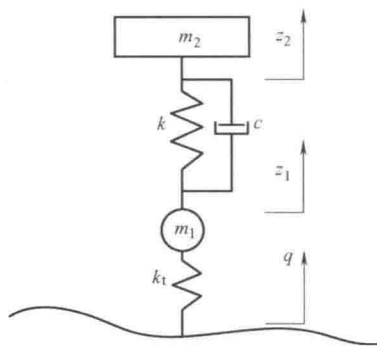


图 1-4 车身和车轮二自由度振动系统模型

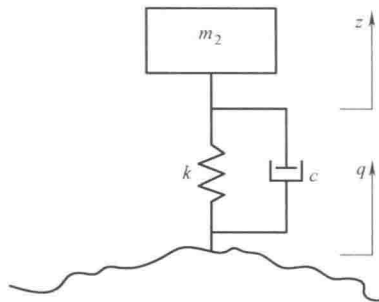


图 1-5 单自由度振动模型

单自由度振动系统力学模型主要由质量、弹簧、阻尼和激励四大要素组成。这四个要素是通过对振动系统的简化, 反映其物理过程的物理量。在力学模型中, 质量一般被抽象为只有质量的质点, 用 m 表示; 弹簧被抽象为无质量的、只有刚度的弹簧, 刚度用 k 表示, 在线性振动范围内, 刚度 k 大小保持不变; 阻尼表示了系统振动中因各种阻力, 如流体、固体的摩擦阻力等产生的机械能耗散机制, 阻尼系数用 c 表示。图 1-6 所示为几种典型单自由度振动系统, 图 1-6a 所示为垂直振动系统模型, 质量 m 只有垂直方向振动, 坐标 $x(t)$ 可以确定其几何位置; 图 1-6b 所示为扭转摆振系统模型, 坐标 $\psi(t)$ 可以确定其几何位置; 图 1-6c 所示为单摆系统模型, 其几何位置由 $\theta(t)$ 确定。由此可知, 只要确定了单自由度振动系统的质量、刚度和阻尼参数, 并按照一定的方法就可以研究其在不同激励下的振动规律。

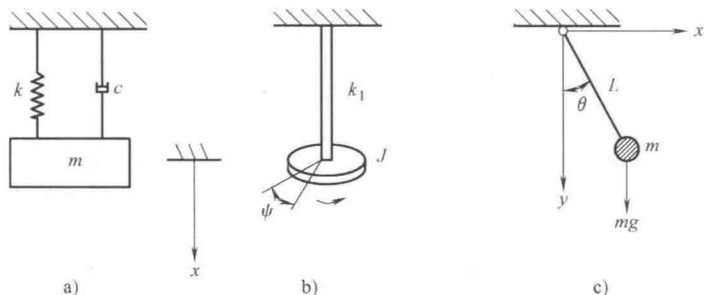


图 1-6 典型单自由度振动系统模型

a) 垂直振动系统模型 b) 扭转摆振系统模型 c) 单摆系统模型

研究单自由度振动系统在不同激励下的振动规律, 通过建立单自由度振动系统运动的振动微分方程, 并对问题进行求解。

单自由度振动系统运动微分方程一般可通过牛顿第二定律或达朗贝尔原理来建立。例如, 图 1-5 所示的汽车车身单自由度振动系统模型, 是典型的简谐支承激励单自由度振动系统, 由车身质量 m (即图中 m_2)、弹簧刚度 k 和减振器阻尼系数为 c 的悬架系统组成, q 是路面不平度输入函数。设车身垂直位移坐标 z 的原点为静力平衡位置, 根据牛顿第二定律, 其系统运动微分方程为

$$m \ddot{z} + c(\dot{z} - \dot{q}) + k(z - q) = 0 \quad (1-1)$$



式 (1-1) 的解由自由振动齐次方程的解与非齐次方程特解之和组成。

一般汽车车身单自由度振动系统中的阻尼比 ζ 的取值通常为 0.25 左右, 属于小阻尼。

令 $2n = \frac{c}{m}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 为系统固有频率, $\zeta = \frac{n}{\omega_0} = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$ 。此时, 式 (1-1) 中齐次方程的通解为

$$z = Ae^{-nt} \sin(\sqrt{\omega_0^2 - n^2}t + \varphi) \quad (1-2)$$

式中, A 是由初始条件所决定的常数, 即

$$A = \frac{z_0^2 + 2\zeta\omega_0 \dot{z}_0 z_0 + \omega_0^2 z_0^2}{(1 - \zeta^2)\omega_0^2}$$

φ 是由初始条件决定的初相位角, 即

$$\varphi = \arctan \frac{z_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_0}{\dot{z}_0 + \zeta\omega_0 z_0}$$

其中, $z_0 = z(t=0)$, $\dot{z}_0 = \dot{z}(t=0)$ 。

对汽车车身单自由度振动的有阻尼自由振动, 质量 m 以有阻尼固有频率 $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - n^2}$ 振动, 其振幅以 e^{-nt} 函数衰减。一般, ζ 越大, ω_r 下降越大, 当取汽车车身单自由度振动系统阻尼比 ζ 为 0.25 时, ω_r 比 ω_0 下降较小, 在工程上近似认为 $\omega_r = \omega_0$ 。

2. 二自由度振动系统

在工程应用中, 当振动问题不能简化为单自由度问题时, 则需进行两个或两个以上的自由度振动问题的研究。两个自由度以上的问题属多自由度问题。二自由度振动系统的状态及研究方法不同于单自由度系统, 要复杂得多。但二自由度振动系统的研究是多自由度振动系统研究的基础。

二自由度振动系统是指用两个独立坐标来完全描述其质量在空间位置的系统。几种典型的二自由度振动系统模型如图 1-7 所示。图 1-7a 所示为由两质量两弹簧组成的系统, 质量被限制在垂直方向移动, 用两个独立坐标 x_1 和 x_2 可以完全描述其空间位置; 图 1-7b 所示为双摆系统, 其两个质量在图示的平面内摆动, 用两个独立坐标 θ_1 和 θ_2 可以完全描述其位

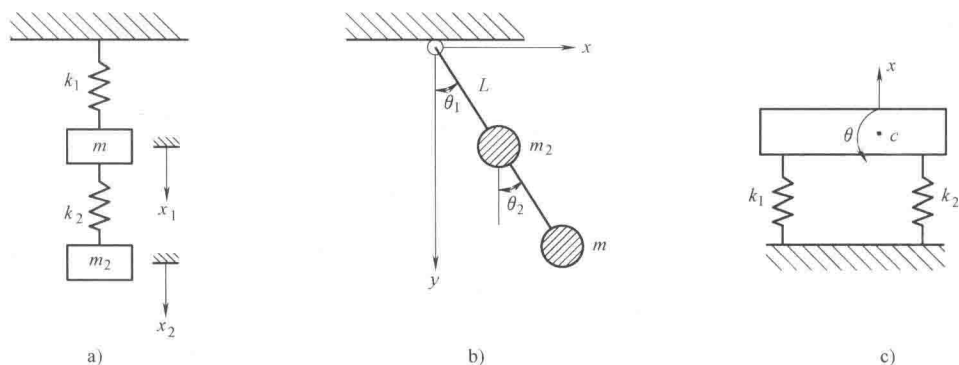


图 1-7 典型二自由度振动系统模型

a) 两质量两弹簧组成的系统 b) 双摆系统 c) 刚性杆在平面内的移动和转动系统



置；图 1-7c 所示为一刚性杆在平面内进行坐标 x 方向平动和坐标 θ 方向转动。

二自由度振动系统微分方程的一般表达式为

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \quad (1-3)$$

式中， $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ 分别为质量矩阵、阻力矩阵和刚度矩阵； $\{F\}$ 是力向量。

二自由度振动系统问题的研究主要包含四个方面，分别是：①将实际结构简化成二自由度振动系统模型；②建立系统运动微分方程；③求解运动微分方程；④分析响应特性。

3. 多自由度振动系统

多自由度振动系统是指通过两个以上独立广义坐标才能描述系统运动特性的规律。在工程上有很多工程振动问题都可以用多自由度动力学模型来描述，因此，多自由度振动系统理论具有广泛的工程应用价值，如汽车驱动桥中的很多振动问题都可以简化为多自由度振动系统问题。

自由度的增加，相应于描述振动系统微分方程的数量就会大大增加。一般对多自由度振动系统振动问题的微分方程采用矩阵来表达。在求解问题时，一般采用解析法、数值解法和模态分析法直接求解。

图 1-8 所示为典型三自由度振动系统模型，需要采用三坐标 x_1 、 x_2 和 x_3 来描述其系统运动特性。

多自由度振动系统的研究可参照二自由度振动系统的研究方法进行。多自由度振动系统问题的研究主要包括四个方面，分别是：①建立多自由度振动系统微分方程；②计算固有频率和主振型；③多自由度振动系统模态分析；④多自由度振动系统响应分析。

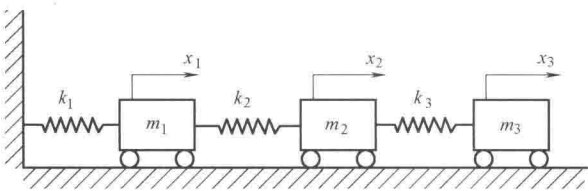


图 1-8 典型三自由度振动系统模型

1.1.2 连续系统振动分析

连续系统是指系统中的质量、弹性和阻尼都呈连续分布，自由度为无限自由度的振动系统。连续系统的描述主要采用时间和空间两坐标，求解时必须考虑其弹性和支承方式，因此分析问题过程和方法复杂，只有在简单的特殊情况下才能求解。但连续振动系统通过离散化后，都可转化为较简单的自由度系统进行分析研究，如弦、杆、轴、梁、薄板的振动问题均属于连续系统振动问题。

连续系统与离散系统具有相同的动力特性。因此，连续系统的振动理论方法与分析计算过程与离散系统相似。

1. 弦的振动

设一根细弦张紧于两固定点之间，弦长为 L 。两固定点连线方向为 x 轴， y 轴与 x 轴垂直。其振动模型如图 1-9 所示。

设弦单位长度质量为 $\rho(x)$ ，在横向分布力 $f(x, t)$ 作用下做横向振动，张力为 $T(x, t)$ ，弦在 x 方向的位移函数为 $y=y(x, t)$ 。

如图 1-10 所示，取微弦线单元体 dx 。假设弦做微小横向振动，忽略由于横向微变形引

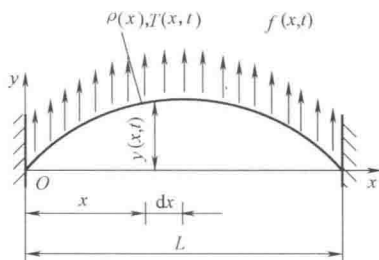


图 1-9 弦的横向振动模型

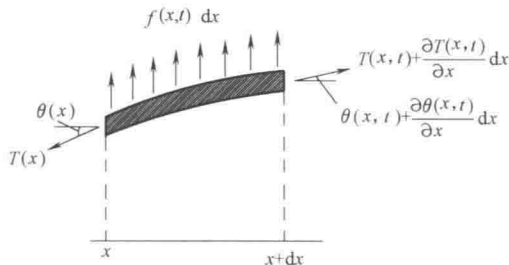


图 1-10 微弦线单元体 dx

起的 T 的变化, 张力 $T(x, t)$ 为常量 T 。

取 $\theta \approx \sin\theta \approx \tan\theta = \frac{\partial y}{\partial x}$, 则弦的横向振动偏微分方程为

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (1-4)$$

由图 1-9 可知, 弦的横向振动边界条件为两端固定位移为零, 即

$$y(0, t) = y(L, t) = 0$$

从而, 弦横向振动数学模型为

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(x, t) \\ y(0, t) = y(L, t) = 0 \end{cases} \quad (1-5)$$

令 $f(x, t) = 0$, 则弦的自由振动微分方程变为波动方程, 即

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (1-6)$$

式中, $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, 表示弹性波沿弦向的传递速度。

2. 杆的振动

图 1-11a 所示为一长杆, 令 $u(x, t)$ 为杆的微单元 dx 的轴向位移, 如图 1-11b 所示。

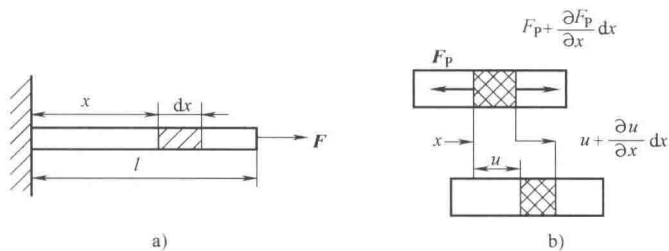


图 1-11 杆的纵向振动

由胡克定律可知, 其应力-应变关系式为

$$\frac{F_P}{A} = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1-7)$$



式中, F_p 为微元 dx 处的作用力; A 为杆的横截面面积; E 为弹性模量。

由牛顿第二定律可知, $dm = \rho A dx$ 是微元 dx 的质量, 而 ρ 则为单位体积的质量。联立求解并简化得到杆纵向振动的运动微分方程为

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(AE \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (1-8)$$

若 AE 为常数, 则有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1-9)$$

式中, $C^2 = \frac{E}{\rho}$ 。

式 (1-9) 为等截面杆纵向自由振动运动微分方程。常数 C 为纵波在杆内的传递速度。杆的纵向振动典型边界条件见表 1-1。

表 1-1 杆的纵向振动典型边界条件

端部条件	左边界条件	右边界条件
固结	$u(0, t) = 0$	$u(l, t) = 0$
自由	$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$
弹性载荷	$ku = EA \frac{\partial u}{\partial x}$	$ku = -EA \frac{\partial u}{\partial x}$
惯性载荷	$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = EA \frac{\partial u}{\partial x}$	$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -EA \frac{\partial u}{\partial x}$

3. 梁的振动

细长杆做垂直于轴线方向的振动时, 即为横向振动。梁在平面内的横向振动如图 1-12a 所示。

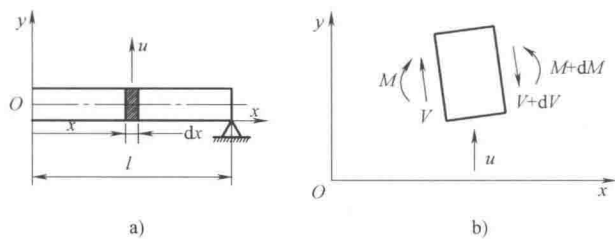


图 1-12 梁的横向振动

在此, 仅讨论由弯矩引起的横向变形 $u(x, t)$ 情况。取梁上的一微元 dx 的隔离体, 如图 1-12b 所示。根据牛顿第二定律, 其横向动态力为

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = - \left(V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) + V, \quad \text{即} \quad m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{\partial V}{\partial x} \quad (1-10)$$

式中, m 为单位长度的质量; V 为剪力。从而得到微元 dx 右侧处的总弯矩为

$$\frac{\partial M}{\partial x} dx - V dx \approx 0, \quad \text{即} \quad \frac{\partial M}{\partial x} = V \quad (1-11)$$



由材料力学可知，梁的曲率与弯矩的关系为

$$EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = M \quad (1-12)$$

式中， EI 为梁的弯曲刚度。联立求解式 (1-10)、式 (1-11) 和式 (1-12) 可得梁的横向振动运动微分方程为

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (1-13)$$

令 EI 为常量，则上述运动方程式 (1-13) 可简化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad (1-14)$$

式中， $a^2 = EI/m$ 。常见的梁的横向振动边界条件见表 1-2。

表 1-2 常见的梁的横向振动边界条

端部条件	变形 u	转角 $\theta = \frac{\partial u}{\partial x}$	弯矩 $M = EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	剪力 $V = EI \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$
固结	$u = 0$	$\theta = 0$	—	—
自由	—	—	$M = 0$	$V = 0$
铰接	$u = 0$	—	$M = 0$	—
弹性载荷	—	—	$M = -k_t \frac{\partial u}{\partial x}$	$V = k_u$
惯性载荷	—	—	$M = 0$	$V = m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

4. 薄板的振动

薄板是指其厚度比长、宽尺寸小得多的板件。在工程中，薄板的振动是常见的振动问题。在此，为了建立薄板的应力、应变和位移之间的关系，通过薄板上下的对中面，建立图 1-13 所示的空间直角坐标系 $Oxyz$ 。

在建立薄板振动的微分方程时，对薄板进行如下假设：①组成薄板的材料各向同性；②振动中薄板的挠度比其厚度小；③自由面上的应力为零；④与中面正交的横截面在变形后始终保持正交不变，即薄板在变形前后中面的法线保持不变。

根据假设前提条件，薄板上任意一点 a (x, y, z) 沿 x 、 y 、 z 三个方向的位移分量 u_a 、 v_a 、 w_a 分别为

$$u_a = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1-15)$$

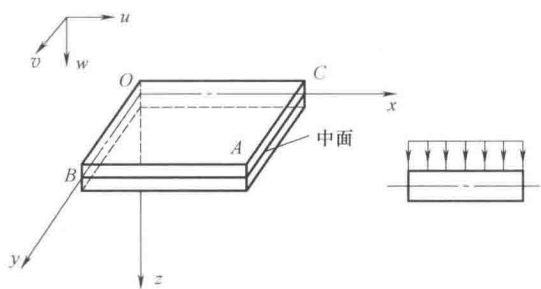


图 1-13 薄板变形前的空间直角坐标



$$v_a = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1-16)$$

$$w_a = w + \dots \quad (\dots \text{为高阶小量}) \quad (1-17)$$

式中, w 为中面上各点的横向位移。

根据弹性力学中应变和位移的几何关系可以求出各点三个主要应变分量分别为

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_a}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (1-18)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_a}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (1-19)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_a}{\partial y} + \frac{\partial v_a}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1-20)$$

根据胡克定律, 其相对应的三个应力分量分别为

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (1-21)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (1-22)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1-23)$$

式中, G 为剪切模量。

薄板的微单元受力图如图 1-14 所示。

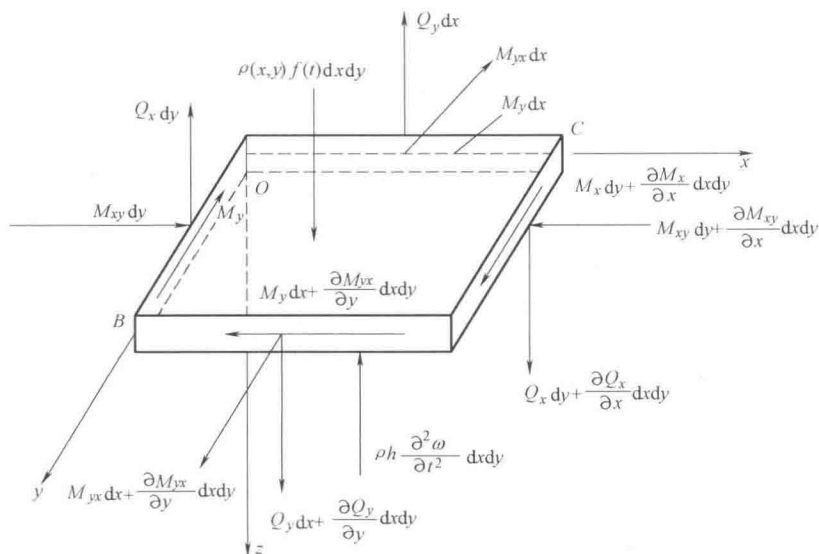


图 1-14 薄板的微单元受力图

由图 1-14 中可知, M_x 、 M_y 是 OB 面、 OC 面所受到的单位长度的弯矩; M_{xy} 、 M_{yx} 是 OB 面、 OC 面所受到的单位长度的扭矩; Q_x 、 Q_y 是 OB 面、 OC 面上所受到的单位长度的横剪切力, 各弯矩、扭矩、横剪切力均沿轴的箭头表示。



M_x 、 M_y 是由正应力 σ_x 、 σ_y 引起的合力矩。扭矩是由剪切力 τ_{xy} 引起的合力矩。 $P(x, y, t) = P(x, y)f(t)$ 为具有变量分离形式的外载荷集度，沿 z 轴方向。

根据薄板的微单元受力图（图 1-14），并应用受力平衡方程即可推导得到薄板微单元的运动微分方程（推导过程略），即

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P(x, y)f(t) \quad (1-24)$$

式中， D 是薄板的抗弯刚度。

5. 连续系统模态分析法

连续系统的无阻尼强迫振动的偏微分方程的一般形式为

$$M(\ddot{u}) + L(u) = F(x, t) \quad (1-25)$$

式中， M 和 L 为线性微分算子； $F(x, t)$ 为时间—空间激励力。

将系统的响应 $u(x, t)$ 表示成各阶响应的叠加，即

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) q_i(t) \quad (1-26)$$

对式（1-26）过振型函数的正交性解耦得

$$m_{ii} \ddot{q}_i + k_{ii} q_i = \int_0^1 F(x, t) \Phi_i(x) dx = Q_i(t), \quad i = 1, 2, \dots \quad (1-27)$$

将 $q_i(t)$ 解析出后再代入式（1-26）中即得到系统的强迫振动响应表达式。

1.1.3 随机振动分析理论基础

前面所述的系统振动问题，激励和响应都是时间的确定性函数，但工程中机械振动现象大多情况下是不确定的。如汽车行驶过程中所受到的路面干扰，船舶行驶过程中所受的海浪拍击作用等，都是随机的。本书研究的汽车后桥也是由诸多因素引起的随机振动问题。

1. 随机振动的基本概念

系统的激励和响应无法用确定性函数来描述，但又有一定的规律称为随机振动，一般用随机过程进行描述。虽然随机振动具有不确定性，但可采用统计分析方法对其进行统计性规律研究。

图 1-15 所示为汽车后桥某一特定点的加速度随机振动测试样本，其随机振动过程是以时间 t 为过程参变量的函数，它记录了汽车后桥上某一特定点的加速度时间历程 $x_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$)，若将每一次的记录作为一个样本函数，而随机过程就是所有样本函数的集合，记作 $X(t)$ 。在理论上这种各不相同的样本函数有无穷个，在任意一个采样时刻 t_i ，随机过程的各个样本函数值都是不同的，从而构成了随机变量 $X(t_i)$ 。之所以各个随机变量 $X(t_i)$ 都存在差别是由于路面激励等的不确定因素影响所造成的。研究随机过程在于研究随机过程的总体统计特性。

根据随机过程理论，随机过程 $X(t)$ 在时刻 t_1 的随机变量 $X(t_1)$ 的集合平均为

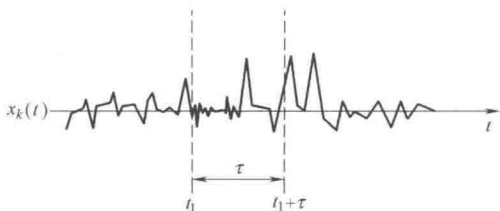


图 1-15 加速度随机振动测试样本



$$\mu_x(t_1) = E(X(t_1)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t_1) \quad (1-28)$$

集合平均 $\mu_x(t_1)$ 一般与采样时刻 t_1 有关。随机过程 $X(t)$ 在时刻 t_1 和 $t_1 + \tau$ 的两个随机变量 $X(t_1)$ 和 $X(t_1 + \tau)$ ，对于各个样本的 $x_k(t_1)$ 和 $x_k(t_1 + \tau)$ 的乘积的集合平均为

$$R_x(t_1, t_1 + \tau) = E(X(t_1)X(t_1 + \tau)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t_1)x_k(t_1 + \tau) \quad (1-29)$$

集合平均 $R_x(t_1, t_1 + \tau)$ 称为随机过程 $X(t)$ 在时刻 t_1 到 $t_1 + \tau$ 的自相关函数，它不仅是时刻 t_1 的函数，也是 τ 的函数。

若随机过程的均值和自相关函数与采样时刻 t_1 无关，则该随机过程称为平稳随机过程。对于平稳随机过程，其均值为常数，即

$$\mu_x(t) = \mu_x \quad (1-30)$$

一般自相关函数只是时间差 τ 的函数，即

$$R_x(t_1, t_1 + \tau) = R_x(\tau) \quad (1-31)$$

若平稳随机过程的均值和自相关函数可以用任意一个足够长的样本函数的时间平均值来计算，则

$$\begin{cases} \mu_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_k(t) dt \\ R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_k(t)x_k(t + \tau) dt \end{cases} \quad (1-32)$$

该平稳随机过程称为各态历经随机过程。随机过程各态历经性在工程实际中具有非常重要的意义，为在工程应用中采用少量实测样本函数估计整个随机过程的统计特性提供了理论依据。

2. 随机振动的统计特性

随机振动的统计特性主要包括时域特性、相关域特性和频域特性等，下面讨论的随机过程都是平稳各态历经随机过程。

(1) 时域特性 随机过程的时域特性主要包含其均值、方差和均方值的计算问题。

1) 均值。均值描述了随机过程的均值位置，其计算公式如下：

对连续随机过程有

$$\mu_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dx \quad (1-33)$$

对离散随机过程有

$$\mu_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (1-34)$$

2) 方差和标准差。方差用于描述随机过程在其均值附近的波动程度，其计算公式如下：

对连续随机过程有

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - \mu_x)^2 dx \quad (1-35)$$