实变函数习题
精选精解

张天德　路慧芹　刘树冬　编著

SHIBIANHANSHUXITIJINGXUANJINGJIE

山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

实变函数习题精选精解

张天德　路慧芹　刘树冬　编著

SHIBIANHANSHUXITIJINGXUANJINGJIE

山东科学技术出版社

图书在版编目(C I P)数据

实变函数习题精选精解/张天德，路慧芹，刘树冬编著.
—济南 ：山东科学技术出版社，2016.7
ISBN 978-7-5331-8286-1

Ⅰ. ①实… Ⅱ. ①张… ②路…③刘… Ⅲ. ①实变函数
—高等学校—解题 Ⅳ. O174.1—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 128752 号

实变函数习题精选精解

张天德　路慧芹　刘树冬　编著

主管单位：山东出版传媒股份有限公司
出 版 者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路 16 号
邮编：250002　电话：(0531) 82098088
网址：www.lkj.com.cn
电子邮件：sdkj@sdpress.com.cn
发 行 者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路 16 号
邮编：250002　电话：(0531) 82098071
印 刷 者：山东泰安新华印务有限责任公司
地址：泰安市灵山大街 39 号
邮编：271000　电话：(0538)6119313

开本：720mm×1020mm　1/16
印张：13.5
版次：2016 年 7 月第 1 版　2016 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5331-8286-1
定价：24.00 元

前 言

QIANYAN

《实变函数论》是数学专业最重要的基础课之一，是《数学分析》的后继课程。它对于数学、计算数学、控制理论等专业都是必需的工具。《实变函数论》较之《数学分析》，在观点和思想方法上都有所飞跃。为了帮助广大读者学好这门课程，我们编写了这本《实变函数习题精选精解》，以帮助读者加深对基本概念的理解，加强对基本解题方法与技巧的掌握，进而提高学习能力和应试水平。

本书共分六章，章节的划分参考了主流教材，每章除最后一节外，每节包括两大部分内容：

一、知识要点：简要对每节涉及的基本概念、基本定理和常用公式进行系统梳理，便于读者快速复习、高效掌握，形成稳固、扎实的知识网，为提高解题能力和数学思维水平夯实基础。

二、基本题型：对每节常见的基本题型进行归纳总结，精选丰富的例题，举一反三，深入讲解，便于读者理解和掌握基本知识，有利于提高读者的解题能力和数学思维水平。

每章最后一节是综合提高题型，这一节的题目综合性较强，难度较大。通过本节的学习，可以进一步培养读者的应变能力、思维能力和分析问题、解决问题的能力，使读者把握重点、提高应试水平。

本书注意博采众家之长，参考了多本同类书籍。在此向这些书籍的编著者表示感谢。限于编者水平，书中疏漏与不妥之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2016 年 7 月

目 录

MULU

第一章 集 合

§1. 集合·集合的运算

1. 集合

(1)一定范围内的所有个体事物，当把它们看作一个整体时，这个整体称为一个集合(或集)，而其中的每一个个体事物称为这个集合的元素(或元). 一个集合的各个元素必须具有确定性、互异性和无序性. 一般来说，常用大写字母 A,B,X,Y 等表示集合，用小写字母 a,b,x,y 等表示集合的元素. a 是集 A 的元素记作 $a\in A$，读作 a 属于 A；a 不是集 A 的元素记作 $a\notin A$，读作 a 不属于 A.

一个集合的表示方法通常有两种：列举法和描述法.

(2)设 A 与 B 为两个集合. 若 $x\in A$，则 $x\in B$，则称 A 是 B 的子集. 记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，也称 A 含于 B 或 B 包含 A.

若 $A\subset B$ 且存在 B 中的元素不属于 A，则称 A 是 B 的真子集. 设 A,B 为两个集合. 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$.

为了论述与运算的方便，我们还指定一种所谓空集，它是不包含任何元素的集合，记为 $\varnothing$. $\varnothing$ 是任一集合的子集.

(3)设 I 是给定的一个集合. 对于每一个 $\alpha\in I$，指定一个集合 A_α. 这样我们就得到一个集合族，记为 $\{A_\alpha:\alpha\in I\}$ 或 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$. 这里的 I 通常称为指标集，当 I 为正整数集 $\mathbb{N}$ 时，集合族也称为集合列，记为 $\{A_i\}$.

命题 1 对任何集 A,B,C，均有

(ⅰ) $A\subset A$(反身性)；

(ⅱ)若 $A\subset B,B\subset A$，则 $A=B$(反对称性)；

(ⅲ)若 $A\subset B,B\subset C$，则 $A\subset C$(传递性).

2. 集合的运算

(1)并集 设 A,B 为两个集合，称集合 $\{x\,|\,x\in A$ 或 $x\in B\}$ 为 A 与 B 的并集，记为 $A\cup B$.

一般地，设 $\{A_\alpha:\alpha\in I\}$ 为一族集合，则它们的并集为

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x\mid \exists\,\alpha\in I,\ \text{s.t. } x\in A_\alpha\}.$$

(2)交集 设 A,B 为两个集合，称集合 $\{x\,|\,x\in A$ 且 $x\in B\}$ 为 A 与 B 的交集，记为 $A\cap B$.

一般地，设$\{A_\alpha:\alpha\in I\}$为一族集合，则它们的交集为

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x\mid \forall\,\alpha\in I,\ \text{s.t. } x\in A_\alpha\}.$$

(3)差集　设A,B为两个集合，称集合$\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}$为$A$与$B$的差集，记为$A\backslash B$或$A-B$. 特别地，若$B\subset A$，称$A\backslash B$为$B$相对于$A$的余集或补集，记为$C_AB$或$\mathscr{C}_AB$.

当集合A已明确时，集B对于A的余集可以简记为$\mathscr{C}B$，此时称A为基本集.

(4)集列的极限　设$\{A_n\}$为一集列，由属于集列中无限多个集合的元素所组成的集合称为这一集列的上限集(或上极限)，记为$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$(或$\limsup\limits_{n\to\infty}A_n$).

由那些除了有限个集合外，属于集列中每个集合的元素全体所组成的集合称为这一集列的下限集(或下极限)，记为$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$(或$\liminf\limits_{n\to\infty}A_n$). 显然，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\supset\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$且

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\left\{x\,\middle|\,\forall\,N,\exists\,n>N,\ \text{s.t. } x\in A_n\right\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\left\{x\,\middle|\,\exists\,N,\forall\,n>N,\ x\in A_n\right\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m.$$

若$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$，则称集列$\{A_n\}$收敛，并将此集合称为$\{A_n\}$的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$.

若集列$\{A_n\}$满足$A_n\subset A_{n+1}$，$n=1,2,\cdots$，则称$\{A_n\}$为递增集列或渐张集列. 若$A_n\supset A_{n+1}$，$n=1,2,\cdots$，则称$\{A_n\}$为递减集列或渐缩集列. 容易证明单调集列是收敛的.

若$\{A_n\}$递增，则$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. 若$\{A_n\}$递减，则$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

3. 集合的运算法则

定理 1　(ⅰ)$A\cup B=B\cup A$，　$A\cap B=B\cap A$.(交换律)

(ⅱ)$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$，　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$.(结合律)

(ⅲ)$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.(分配律)

(ⅳ)$A\cup A=A$，　$A\cap A=A$.(幂等律)

定理 2　(ⅰ)若相应于每个$\alpha\in I$均有$A_\alpha\subset B_\alpha$，则$\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\subset\bigcup\limits_{\alpha\in I}B_\alpha$，$\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\subset\bigcap\limits_{\alpha\in I}B_\alpha$.

(ⅱ)$\bigcup\limits_{\alpha\in I,\beta\in J}A_\alpha^\beta=\bigcup\limits_{\alpha\in I}\bigcup\limits_{\beta\in J}A_\alpha^\beta$；　$\bigcap\limits_{\alpha\in I,\beta\in J}A_\alpha^\beta=\bigcap\limits_{\alpha\in I}\bigcap\limits_{\beta\in J}A_\alpha^\beta$.

(ⅲ)$A\cap\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}B_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha)$；　$A\cup\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I}B_\alpha\right)=\bigcap\limits_{\alpha\in I}(A\cup B_\alpha)$.

注　$\bigcup\limits_{\alpha\in\mathbb{N},\beta\in\mathbb{N}}$通常写作$\bigcup\limits_{\alpha,\beta=1}^{\infty}$；$\bigcap\limits_{\alpha\in\mathbb{N},\beta\in\mathbb{N}}$通常写作$\bigcap\limits_{\alpha,\beta=1}^{\infty}$.

定理 3　设X是基本集，则(ⅰ)$\mathscr{C}X=\varnothing$；$\mathscr{C}\varnothing=X$；(ⅱ)$\mathscr{C}(\mathscr{C}A)=A$；(ⅲ)当$A\subset B$时$\mathscr{C}A\supset\mathscr{C}B$.

定理 4(De Morgan 公式) 设 X 是基本集,则

(ⅰ)$\mathscr{C}(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcap\limits_{\alpha\in I}\mathscr{C}A_\alpha$;(ⅱ)$\mathscr{C}(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}\mathscr{C}A_\alpha$.

定理 5 (ⅰ)$A\backslash B=A\cap\mathscr{C}B$;(ⅱ)$A\cap(B\backslash C)=(A\cap B)\backslash(A\cap C)$.

定理 6 (ⅰ)$E\backslash\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(E\backslash A_n)$, $E\backslash\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(E\backslash A_n)$,

(ⅱ)$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(A_n\cup B_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\cup\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}B_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(A_n\cap B_n)=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\cap\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}B_n$.

基本题型

证明集合恒等式

【1】证明:$A\backslash B=A\backslash(A\cap B)=(A\cup B)\backslash B$.

证:$A\backslash(A\cap B)=A\cap C_X(A\cap B)=A\cap(C_XA\cup C_XB)$

$$=(A\cap C_XA)\cup(A\cap C_XB)=A\cap C_XB=A\backslash B.$$

$$(A\cup B)\backslash B=(A\cup B)\cap C_XB=(A\cap C_XB)\cup(B\cap C_XB)=A\backslash B.$$

【2】证明:$(A\backslash B)\cap(C\backslash D)=(A\cap C)\backslash(B\cup D)$.

证:$(A\backslash B)\cap(C\backslash D)=(A\cap C_XB)\cap(C\cap C_XD)=(A\cap C)\cap C_X(B\cup D)$

$$=(A\cap C)\backslash(B\cup D).$$

【3】证明:$(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)\backslash B=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha\backslash B)$.

证法一:(利用定义)

$\forall x\in(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)\backslash B$,则 $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$ 但 $x\notin B$,从而 $\exists\alpha\in\Lambda$,使得 $x\in A_\alpha$ 且 $x\notin B$,于是 $\exists\alpha\in\Lambda$,使得 $x\in A_\alpha\backslash B$,进而有 $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha\backslash B)$,这样证明了

$$(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)\backslash B\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha\backslash B).$$

反过来,$\forall x\in\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha\backslash B)$,则 $\exists\alpha\in\Lambda$,使得 $x\in A_\alpha\backslash B$,从而 $x\in A_\alpha$ 且 $x\notin B$,于是 $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$ 且 $x\notin B$,这说明 $x\in(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)\backslash B$,于是$\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha\backslash B)\subset(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)\backslash B$. 从而

$$(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)\backslash B=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha\backslash B).$$

证法二:(利用运算法则)

$(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)\backslash B=(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)\cap C_XB=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha\cap C_XB)=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha\backslash B)$.

【4】设$\{A_i\}$是一列集,作$\hat{A}_1=A_1$,$\hat{A}_i=A_i\backslash\bigcup\limits_{k=1}^{i-1}A_k$,$i=2,3,\cdots$,则

(ⅰ)$\hat{A}_i\cap\hat{A}_j=\varnothing(i\neq j)$;(ⅱ)$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\hat{A}_i(n=1,2,\cdots)$;(ⅲ)$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\hat{A}_i$.

证:(ⅰ)不妨设 $i>j$,此时$\hat{A}_j\subset A_j\subset\bigcup\limits_{k=1}^{i-1}A_k$,而$\hat{A}_i=A_i\backslash\bigcup\limits_{k=1}^{i-1}A_k$,所以$\hat{A}_i\cap\hat{A}_j=\varnothing$

$(i\neq j)$.

（ⅱ）设 $x\in\bigcup_{i=1}^{n}A_i$，若 $x\in A_1$，则 $x\in\hat{A}_1$；若 $x\notin A_1$，则必存在自然数 $i_0>1$ 使 $x\in A_{i_0}$ 且 $x\notin A_i(i=1,2,\cdots,i_0-1)$，于是 $x\in\hat{A}_{i_0}\subset\bigcup_{i=1}^{n}\hat{A}_i$，可见，$\bigcup_{i=1}^{n}A_i\subset\bigcup_{i=1}^{n}\hat{A}_i$.

又对任意的 $i\in N$，$\hat{A}_i\subset A_i$，故 $\bigcup_{i=1}^{n}\hat{A}_i\subset\bigcup_{i=1}^{n}A_i$，所以（ⅱ）成立.

（ⅲ）设 $x\in\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$，则 $\exists n\in N$ 使 $x\in A_n$，从而 $x\in\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\bigcup_{i=1}^{n}\hat{A}_i\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}\hat{A}_i$，所以 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}\hat{A}_i$，又因为 $\hat{A}_i\subset A_i$，$i=1,2,\cdots$，所以 $\bigcup_{i=1}^{\infty}\hat{A}_i\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$. 故（ⅲ）成立.

【5】设 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$，$B_1\subset B_2\subset\cdots\subset B_n\subset\cdots$，则

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B_n).$$

证：$\forall x\in\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)$，则 $\exists n_1,n_2$，使得 $x\in A_{n_1}\cap B_{n_2}$.

不妨设 $n_1\leqslant n_2$，则 $x\in A_{n_2}\cap B_{n_2}\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B_n)$，从而

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B_n).$$

反过来，若 $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B_n)$，则 $\exists n_0$，使得 $x\in A_{n_0}\cap B_{n_0}$，则

$$x\in\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right),$$

从而
$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B_n)\subset\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right),$$

所以，
$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cap B_n).$$

求集列的上、下限集

【6】设 $A_{2n}=A$，$A_{2n+1}=B$，求 $\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n$，$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n$.

解：$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m=\bigcap_{n=1}^{\infty}(A\cup B)=A\cup B$,

$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\cap B)=A\cap B$.

【7】设 $A_{2n}=(0,n)$，$A_{2n-1}=\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$，$n=1,2,\cdots$. 求 $\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n$ 与 $\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n$.

解：注意到 $A_{2n-1}\subset A_{2m}$，$m,n=1,2,\cdots$，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}(0,m)=\bigcap_{n=1}^{\infty}(0,+\infty)=(0,+\infty),$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}(0,\frac{1}{m})=\bigcup_{n=1}^{\infty}\varnothing=\varnothing.$$

【8】 设 $A_n=\left\{\frac{k}{n}\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$，$n=1,2,\cdots$，求 $\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n$ 与 $\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n$.

解：令 $B_n=\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m$，$C_n=\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m$，则易见 $B_n\subset Q$，$\mathbb{Z}\subset C_n$.

$\forall x=\frac{q}{p}\in Q$，其中 $p\in\mathbb{N}$，$q\in\mathbb{Z}$，则 $x=\frac{nq}{np}\in B_n$，从而 $Q\subset B_n$，于是 $B_n=Q$.

$\forall x\in C_n$，则对任一 $m\geqslant n$，存在 $k_m\in\mathbb{Z}$，使得 $x=\frac{k_m}{m}$，则有 $\frac{k_m}{m}=\frac{k_{m+1}}{m+1}$，即

$$(m+1)k_m=mk_{m+1}.$$

由于 m 与 $m+1$ 互素，则 $m\,|\,k_m$，从而 $x\in\mathbb{Z}$，于是 $C_n=\mathbb{Z}$.

则 $\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n=Q$，$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n=\mathbb{Z}$.

【9】 设 $A_n=\left(0,1+\frac{1}{n}\right)$，求 $\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n$ 与 $\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n$.

解：由于 $\{A_n\}$ 单调递减，从而 $\{A_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=(0,1]$. 所以，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=(0,1].$$

§2. 映射·集合的对等

1. 映射

定义 1 设 A,B 是两个集合，A 非空. 若依照规则 f，对于 A 中的每个元 x，在 B 中都有唯一确定的元 y 与之对应，就称 f 是 A 到 B 的映射，记作 $f:A\to B$ 或 $A\xrightarrow{f}B$，而与 x 对应的元 y 称为 x(在映射 f 下)的象，记作 $f(x)$. 集合 A 称为映射 f 的定义域，集合 $\left\{f(x)\middle|x\in A\right\}$ 称为映射 f 的值域. 若 E 是 A 的子集，则 $\left\{f(x)\middle|x\in E\right\}$ 称为 E(在映射 f 下)的象集，记作 $f(E)$.

定义 2 若映射 $f:A\to B$ 的值域 $f(A)$ 恰等于 B，就称 f 是满射.

若映射 $f:A\to B$ 使每个 $y\in f(A)$ 仅有唯一的 $x\in A$ 满足 $f(x)=y$，就说 f 是单射.

若映射 $f:A\to B$ 既是满射又是单射，就称 f 是 A 到 B 的一一映射(或一一对应)，记作 $f:A\xrightarrow[1-1]{}B$ 或 $A\xrightarrow[1-1]{f}B$.

设 f 是 A 到 B 的一一映射，则对每个 $y\in B$ 有唯一 $x\in A$ 使 $f(x)=y$，定义

$g(y)=x$,则 g 是 B 到 A 的一一映射,称 g 是 f 的逆映射,记作 f^{-1}.

定义 3 设 f,g 分别是 F,G 到 B 的映射,若 $F\subset G$ 且对每个 $x\in F$ 都有 $f(x)=g(x)$,即映射 g 在 F 上与映射 f 一致,就称映射 g 是 f 在 G 上的一个扩张,而称映射 f 是 g 在 F 上的限制,记作 $f=g|_F$.

2. 集合的对等

定义 4 设 A,B 是两个集,若存在 A 到 B 的某个一一映射,就称 A 与 B 对等,记作 $A\sim B$. 规定空集 $\varnothing$ 与空集 $\varnothing$ 对等.

命题 1 对等关系有如下性质:

(ⅰ)$A\sim A$(反身性);

(ⅱ)若 $A\sim B$,则 $B\sim A$(对称性);

(ⅲ)若 $A\sim B,B\sim C$,则 $A\sim C$(传递性).

命题 2 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$是两两无交的一列集,$B_1,B_2,\cdots,B_n,\cdots$是两两无交的一列集. 若 $A_n\sim B_n(n=1,2,\cdots)$,则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\sim\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$,$\bigcup\limits_{n=1}^{m}A_n\sim\bigcup\limits_{n=1}^{m}B_n(m=1,2,\cdots)$.

定理 1(Bernstein 定理) 设 A 与 B 的子集 B_o 对等,且 B 与 A 的子集 A_o 对等,则 A 与 B 对等.

系 1 若 $A\supset B\supset C,A\sim C$,则 $A\sim B\sim C$.

基 本 题 型

集合的映射问题

【10】 设 $f:X\to Y,g:Y\to X$,若 $g\big(f(x)\big)=x,x\in X$,则 f 是单射,g 是满射.

证:对任一 $x\in X$,令 $y=f(x)\in Y$,由假设知,$x=g\big(f(x)\big)=g(y)$,从而 g 为满射.

设 $x_1,x_2\in X$. 若 $f(x_1)=f(x_2)$,则 $x_1=g\big(f(x_1)\big)=g\big(f(x_2)\big)=x_2$,从而$f$ 为单射.

【11】 设 $f:X\to Y$,则 f 为一一对应当且仅当存在 $g:Y\to X$ 使得 $g\big(f(x)\big)=x$ 且$f\big(g(y)\big)=y,\forall x\in X,y\in Y$.

证:必要性. 设 $f:X\to Y$ 为一一对应,则 f 的逆映射 f^{-1}满足条件.

充分性. 若存在 $g:Y\to X$ 满足假设条件,由上题的结论可知 f 既单又满,从而f 为一一对应.

【12】 试建立以下各集合间的一一对应.

(1)$(0,1)\sim(a,b)$,　　(2)$(0,1]\to[0,1)$,

(3)$(0,1)\to[0,1]$.　　(4)$(0,1)\sim(0,+\infty)$.

解:(1) $f(t)=(b-a)t+a,\ t\in(0,1)$.

(2) $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1\\ 0, & x=1\end{cases}$.

(3)设(0,1)中的有理数全体为$\{r_1,r_2,\cdots\}$,令

$$f(t)=\begin{cases}0, & t=r_1\\ 1, & t=r_2\\ r_{n-2}, & t=r_n,\ n=3,4,\cdots\\ t, & t\neq r_i,\ i=1,2,\cdots\end{cases}$$

则 f 为$(0,1)$与$[0,1]$间的一个一一对应.

(4) $f(t)=\tan\left(\frac{\pi}{2}t\right),\ t\in(0,1)$.

利用对等的定义证明两集合对等

【13】 设 $a,b\in R^1$, $a<b$,证明$[a,b]\sim(-\infty,+\infty)$.

证:先建立$[a,b]$与(a,b)之间的一一对应:设

$$A=\left(a+\frac{b-a}{2^n},n=1,2,\cdots\right),\quad B=\{a,b\}\cup A,$$

作 B 到 A 的映射 φ_1,使

$$\varphi_1(a)=a+\frac{b-a}{2},\quad \varphi_1(b)=a+\frac{b-a}{2^2},$$

$$\varphi_1\left(a+\frac{b-a}{2^n}\right)=a+\frac{b-a}{2^{n+2}},\ n=1,2,\cdots.$$

显然 $B\xrightarrow[1-1]{\varphi_1}A$. 又$[a,b]\setminus B=(a,b)\setminus A$,于是作$[a,b]$到$(a,b)$的映射:

$$f(x)=\begin{cases}\varphi_1(x), & x\in B,\\ x, & x\in[a,b]\setminus B.\end{cases}\quad 则\quad [a,b]\xrightarrow[1-1]{f}(a,b).$$

再作(a,b)到$(-\infty,+\infty)$的映射:$g(x)=\tan\left(\frac{x-b}{b-a}+\frac{1}{2}\right)\pi,x\in(a,b)$.

显然,$[a,b]\xrightarrow[1-1]{g\circ f}(-\infty,+\infty)$,由对等的定义知$[a,b]\sim(-\infty,+\infty)$.

【14】 证明平面 $R^2=\left\{(x,y)\,\middle|\,-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty\right\}$与正方形内的点集 $I=\left\{(x,y)\,\middle|\,0<x<1,0<y<1\right\}$对等.

证:定义 $f:R^2\rightarrow I$,使 $f(x,y)=\left(\frac{1}{\pi}\arctan x+\frac{1}{2},\frac{1}{\pi}\arctan y+\frac{1}{2}\right)$.

显然,f 是R^2 到 I 的一一映射. 故 $R^2\sim I$.

利用 Bernstein 定理证明集合对等

【15】 若 $A\subset B$,且 $A\sim(A\cup C)$,则 $B\sim(B\cup C)$.

证:由条件易知:$B=A\cup(B-A)$,$B\cup C=[A\cup(C-B)]\cup(B-A)$.

由于 $A\cap(B-A)=\varnothing$,$[A\cup(C-B)]\cap(B-A)=\varnothing$,

又 $A\subset A\cup(C-B)\subset A\cup C$,且 $A\sim(A\cup C)$,由 Bernstein 定理知 $A\sim A\cup(C-B)$.又 $(B-A)\sim(B-A)$,故 $B\sim(B\cup C)$.

【16】 证明半径相同、圆心也相同的闭圆与开圆对等.

证:用 A 表示半径为 γ 的闭圆,用 B 表示具同圆心同半径的开圆,用 C 表示同圆心半径为 $\frac{\gamma}{2}$ 的闭圆,那么 $A\supset B\supset C$,$A\sim C$(它们之间的一一对应可借助于相似变换来实现,而相似变换中心为公共的圆心),从而由 Bernstein 定理知 $A\sim B$,即半径相同、圆心也相同的闭圆与开圆对等.

§3. 可列集与不可列集·集合的基数

1. 可列集与不可列集

定义 1 与自然数集 $\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$ 对等的集称为可列集或可数集.

显然,一个集是可列集当且仅当它的所有元素可排成一个无穷序列.

定理 1 实数集 R^1 不是可列集.

定义 2 不是可列集的无限集称为不可列集或不可数集.

命题 1 任何无限集均包含一个可列子集.

命题 2 无限集必与它的一个真子集对等.

2. 集合的基数

集合分类的原则:对每个集合 A,把与 A 对等的所有集合作为一类(不与 A 对等的集合不属于这一类).这样便得到许许多多不同的类,由对等关系的反身性、对称性及传递性容易看出,任何一个集合必然属于某一类,并且任何一个集合决不会同时属于不同的两类.

对于上述分类,同一类中的各集合我们认为具有同样多个元素,而不属于同一类的两集合则认为不具有同样多个元素,对每一类集合我们规定一个专用符号(不同的两类集合规定不同的符号),我们说这一类的每个集合都具有"此符号所表示的那么多"个元素,并且称此符号是这一类中每个集合的基数.集合的基数有时也称为集合的势或集合的蕴度.

具有 n(n 为自然数)个元素的集的基数记作 n.空集 $\varnothing$ 的基数记作 0.可列集的基数通常记作 $\aleph_0$,还往往用 a 表示.与实数集 R^1 对等的集的基数又称为连续基数或连续势,通常记作 $\aleph$,还往往用 c 表示."A 的基数"常简记为"$\overline{\overline{A}}$".

命题 3 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$ 的充要条件是 A 与 B 对等.

3. 基数的大小

定义 3 设 A,B 是两个集，若 A 与 B 不对等而 A 与 B 的某个子集对等，就称 A 的基数小于 B 的基数，记作 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$，或称 B 的基数大于 A 的基数，记作 $\overline{\overline{B}}>\overline{\overline{A}}$.

命题 4 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$ 的充要条件是 A 与 B 的某个子集对等.

定理 2 设 A,B 是任意两个集，则下列三式 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}},\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}},\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$

(ⅰ)至少有一式成立； (ⅱ)至多有一式成立.

定理 3 若 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}},\overline{\overline{B}}<\overline{\overline{C}}$，则 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{C}}$.

基本题型

有关可数集、不可数集与无限集间对等关系的证明

【17】 设 E 为无限集，则存在 E 的可数子集 A，使得 $E\backslash A\sim E$.

证：由于 E 为无限集，则 E 中必存在可数真子集，记为 $\{x_n\}$.

令 $A=\{x_{2n}:n=1,2,\cdots\}$，则 A 为可数集，而

$$E\backslash A=(E\backslash\{x_n\})\cup\{x_{2n-1}\}\sim(E\backslash\{x_n\})\cup\{x_n\}=E.$$

【18】（无限集的特征）. A 为无限集当且仅当 A 与其某真子集对等.

证：($\Leftarrow$) 设 A 与其某真子集对等，则 A 为无限集，否则，若 A 为有限集，则 A 的任一真子集所含元素个数都小于 A，从而不可能与 A 对等.

($\Rightarrow$) 设 A 为无限集，则 A 中必有可数真子集，设 $A_1=\{x_1,x_2,\cdots\}$ 为 A 的可数真子集，则

$$A=(A\backslash\{x_n\})\cup\{x_n\}\sim(A\backslash\{x_n\})\cup\{x_2,x_3,\cdots\}=A\backslash\{x_1\},$$

即 A 与其真子集 $A\backslash\{x_1\}$ 对等.

【19】（不可数集的特征）. A 为不可数集的充分必要条件是 A 为无限集，并且对 A 的任一可数子集 B，有 $A\sim A\backslash B$.

证：($\Leftarrow$) 反证. 假设 A 不是不可数集，由于 A 为无限集，则 A 为可数集，由假设知 $A\sim A\backslash B=\varnothing$. 矛盾.

($\Rightarrow$) 设 A 为不可数集，B 为 A 的任一可数子集，则 $A\backslash B$ 仍为不可数集，设 B_1 为 $A\backslash B$ 的可数子集，则有

$$A=\big(A\backslash(B\cup B_1)\big)\cup(B\cup B_1)\sim\big(A\backslash(B\cup B_1)\big)\cup B_1=A\backslash B.$$

【20】 试用闭区间套定理证明 $[0,1]$ 不可数.

证：反证. 假设 $[0,1]$ 可数，设 $[0,1]=\{x_1,x_2,\cdots\}$.

将 $[0,1]$ 三等分，则三个小区间中至少有一个不含 x_1，任取一个，记为 $[a_1,b_1]$，则 $x_1\notin[a_1,b_1]$，且 $b_1-a_1=\dfrac{1}{3}$.

再将$[a_1,b_1]$三等分，则三个小区间中至少有一个不含x_2，任取其中一个，记为$[a_2,b_2]$，则$x_2\notin[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$，且$b_2-a_2=\frac{1}{3^2}$.

依次下去，得闭区间列$\{[a_n,b_n]:n=1,2,\cdots\}$满足

$$(1)\ [a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}],\quad n=1,2,\cdots,$$

$$(2)\ b_n-a_n=\frac{1}{3^n}\to 0,\quad n\to\infty,$$

$$(3)\ x_n\notin[a_n,b_n],\quad n=1,2,\cdots,$$

由闭区间套定理，存在唯一的点$\xi\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$；则$\xi\in[0,1]$. 但对$\forall n$，由于$x_n\notin[a_n,b_n]$，则$\xi\neq x_n$. 从而$\xi\notin\{x_1,x_2,\cdots\}=[0,1]$. 此为矛盾. 故$[0,1]$不可数.

利用两集合基数相等的充要条件证明两集合基数相等

【21】 设A为无限集，B为可数集，则$\overline{\overline{A\cup B}}=\overline{\overline{A}}$.

证：不妨设$A\cap B=\varnothing$. 由于A为无限集，则A中存在可数子集A_1，而B可数，故$A_1\cup B$亦可数. 从而

$$A=(A\backslash A_1)\cup A_1\sim(A\backslash A_1)\cup(A_1\cup B)=A\cup B.$$

【22】 证明R^1上无理数全体所成的集合的基数为c.

证：设$A=R^1\backslash Q$为无理数全体. 设$Q=\{r_1,r_2,\cdots\}$.

令$B=\{n\sqrt{2},n=1,2,\cdots\}$为可数集，则

$$A=(A\backslash B)\cup B\sim(A\backslash B)\cup(B\cup Q)=A\cup Q=R^1.$$

从而$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{R^1}}=c$.

【23】 设A为不可数集，B为A的可数子集，则$\overline{\overline{A\backslash B}}=\overline{\overline{A}}$.

证：设A_1为$A\backslash B$的可数子集，则有

$$A=\big(A\backslash(A_1\cup B)\big)\cup(A_1\cup B)\sim\big(A\backslash(A_1\cup B)\big)\cup A_1=A\backslash B.$$

从而$\overline{\overline{A\backslash B}}=\overline{\overline{A}}$.

§4. 可列集的判定

定理1 可列集的子集是有限集或可列集.

定理2 设$A_i(i=1,2,\cdots)$是可列集，则$\bigcup_{i=1}^{n}A_i$与$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$均是可列集.

系1 设$B_i(i=1,2,\cdots)$是有限集或可列集，则$\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$是有限集或可列集.

命题1 有理数的全体(即有理数集)是一个可列集.

定理 3 设$\mathbb{N}^n$是n个分量都是自然数的有序n数组的全体，即

$$\mathbb{N}^n=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\middle|\,x_1,x_2,\cdots,x_n\text{ 均为自然数}\right\}\text{，则}\mathbb{N}^n\text{是可列集.}$$

推论 若$B_1,B_2,\cdots,B_n$都是可列集，$A=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\middle|\,x_1\in B_1,x_2\in B_2,\cdots,x_n\in B_n\right\}$，则$A$是可列集.

定理 4 设集合M的所有元素已经用有序数组标号，每个元素有唯一确定的标号并且不同的元素有不同的标号，若这些作为标号的有序数组都具有有限个分量(但未必都具有同样多个分量)并且分量都是自然数，则M是有限集或可列集.

命题 2 有理系数多项式的全体是一个可列集.

定义 1 有理系数多项式的实数根称为代数数，不是代数数的实数称为超越数. 由命题 2 及系 1 可知代数数的全体是一个可列集，再由 §1.3 定理 1 可知超越数的全体是一个不可列集.

基本题型

通过将集合分解为有限个或可列个可列集之并来判断其可列

【24】证明有理数集是可列集.

证：设$Q_i=\left\{\frac{1}{i},\frac{2}{i},\frac{3}{i},\cdots\right\}(i=1,2,\cdots)$，则$Q_i$可列. 记正有理数的全体为$Q^+$，则$Q^+=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}Q_i$，由本节定理 2 知$Q^+$可列. 记负有理数的全体为$Q^-$，显然$Q^-$也可列. 又有理数集$Q=Q^+\cup Q^-\cup\{0\}$，从而为可列集.

【25】设M是由直线R^1中若干两两无交的非空开区间所组成之集，则M为有限集或可列集.

证：R^1中的任何非空开区间总含有有理数，对M中的每个开区间，使此开区间所含的某个有理数与此开区间对应. 由于M中诸开区间两两无交，所说的对应必为M与有理数集的某子集间的一一对应，由**【24】**题及本节定理 1 知M为有限集或可列集.

注：若集合A是有限集或可列集，又常称A为至多可列集.

【26】平面R^2中有理点(即两个坐标均为有理数的点)的全体所成之集E是一个可列集.

证：将$(-\infty,+\infty)$中的有理数全体排成一个序列$\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$. 记横坐标为$a_n$，纵坐标为有理数的点的全体为集合$A_n(n=1,2,\cdots)$，易知$A_n(n=1,2,\cdots)$均为可列集且$E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，从而$E$为可列集.