Pearson

国外优秀数学教材系列

简明数学史

第二卷

中世纪数学

A History of Mathematics

An Introduction (3rd Edition)

[美] 维克多·J.卡兹（Victor J.Katz） 著

董晓波 倪凤莲 廖大见 等译 李存华 韩萏 译校

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

国外优秀数学教材系列

简明数学史　第二卷　中世纪数学

［美］维克多·J. 卡兹（Victor J. Katz）　著

董晓波　倪凤莲　廖大见　薄丽玲　刘龙梅
张溹云　孙　岚　孙翠娟　於　遒　秦　涛　译
邓海荣　顾　琴　张　颖　高从燕

李存华　韩　莒　译校

机　械　工　业　出　版　社

本书按年代顺序编排，共分为四卷，每卷按照专题展开并在大部分章节中讨论了不同历史时期的重要的数学教科书。同时，本书具有全球化视角，整合了非西方的数学史，包括中国、印度和阿拉伯数学家的工作。书中部分专题会在不同的年代反复出现，使得对本书的使用能够非常灵活。书中不仅有许多习题供读者深入理解书中内容，还有一些小组讨论专题，可供各种教学活动使用。同时，本书给出了丰富的参考文献，供读者进一步学习和研究之用。

本书的第二卷主要内容有：古代和中世纪的中国数学、古代和中世纪的印度数学、阿拉伯数学、中世纪的欧洲数学、世界各地的数学。

本书可作为大学数学史类课程的教材，也可作为了解数学的入门读物，还可供相关科研人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

简明数学史. 第二卷，中世纪数学/（美）维克多·J. 卡兹（Victor J. Katz）著；董晓波等译. —北京：机械工业出版社，2016. 8
书名原文：History of Mathematics，A，3/E
国外优秀数学教材系列
ISBN 978-7-111-54526-2

Ⅰ. ①简… Ⅱ. ①维… ②董… Ⅲ. ①数学史-世界-中世纪-教材 Ⅳ. ①O11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 186988 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策划编辑：韩效杰 责任编辑：韩效杰 王 芳 任正一
责任校对：肖 琳 封面设计：路恩中 责任印制：李 洋
保定市中画美凯印刷有限公司印刷
2016 年 12 月第 1 版第 1 次印刷
190mm×215mm · 15. 25 印张 · 334 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-54526-2
定价：48. 00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
电话服务
服务咨询热线：010-88379833
读者购书热线：010-88379649

网络服务
机 工 官 网：www.cmpbook.com
机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
教育服务网：www.cmpedu.com
金 书 网：www.golden-book.com

译　者　序

《简明数学史》（A History of Mathematics　An Introduction）是由维克多 J. 卡兹（Victor J. Katz）所著。本书于 1993 年出版了第 1 版，并在 1995 年获得了美国科学史学会颁发的 Watson Davis 奖。5 年后，即 1998 年本书出版了第 2 版。现在翻译的是继第 2 版问世 11 年后 2009 年出版的第 3 版。

维克多 J. 卡兹教授出生于费城，是当今世界上最著名的数学史学家和教育家之一，1968 年在美国布兰代斯大学获得数学博士学位。很多年来，他一直在美国哥伦比亚特区大学数学与统计学系从事数学的教学工作。在将数学史实应用于数学教学方面，他获得过美国国家科学基金会的两个项目资助。他是 2000 年美国数学协会（MAA）组织各国数学教育专家们撰写的论文集《运用数学史讲授数学：基于国际视角》（Using History to Teach Mathematics—An International Perspective）的主编。

在诸多的数学史中，《简明数学史》是非常值得向读者推荐的数学史巨著。本书向读者展示了从古代到近代再到现代，时间从公元前 3000 年至公元 2000 年的数学发展历史。本书的前两版获得了广泛的关注，特别是受到广大数学爱好者的好评。第 3 版在第 2 版的基础上基本每小节都有变动；在内容及表述的清晰性方面做了一系列的改进和增补，并增添了一些新内容，而对中国、印度和阿拉伯的数学发展则给予了更多的关注；关于 19 世纪和 20 世纪的统计学，增补了新的材料。

本书以年代顺序与专题相结合的方式叙述了数学发展历史，非常适合数学史课程的教学及数学爱好者的学习与查阅。另外，本书在大部分章节中都讨论了那个时代重要的教科书，期望读者看到某些论题与当今教科书处理方法的异同，了解许多年前学生要解决的问题。同时本书也突出了数学的应用。读者通过各章后习题的计算与论证，可以对各章内容有更全面的了解。为方便读者参阅，一些特殊论题及数学家小传以加框文字的形式分布于全书的相关章节。书中丰富的史实内容为教师对数学史的内容进行取舍提供了极大的便利。相信本书可以加深读者对数学的理解，也能够在教学中起到通过讲述数学历史来吸引学生学习数学、提升数学能力的作用。

经过翻译团队成员三年多的工作，译著终于得以付梓。作为译者，心情既喜悦又复杂。卡兹的《简明数学史》涉及的时间跨度长，从公元前 3000 年一直到公元 2000 年；涉及的内容多，包括了数学研究分支的主要方面；涉及的地域广，涵盖了东方、西方几乎主要的研究数学的国家。数学的内容是庞杂的，数学发展的历史又是紧密联系实际的。翻译这样一部重要的科学著作，无论在能力、时间、精力、体力上都是极大的挑战。因此，将原著翻译准确、翻译出彩并不是一件轻松的事。有时，过程变得缓慢而艰难；有时，除了要查阅一些工具书外，还需请教相关学科的专家，并字斟句酌和反复推敲。翻译这样一部传世之作，译者既希望忠实于英文原著，又力求把留给读者的遗憾降至最低。

本书的翻译是团队成员协作的成果。先后参加本书翻译的人有：董晓波、倪凤莲、廖大见、薄丽玲、刘龙梅、张滦云、孙岚、孙翠娟、於遒、秦涛、邓海荣、顾琴、张颖、高从燕。全书由董晓波教授组织翻译并统稿，李存华、韩苕校译。

本书中译本的完成，除了译者们付出的辛勤劳动，当然离不开众多热心数学史的各方人士的帮助，在此要对他们表示深深的谢意！

要特别感谢研究国内外数学史以及卡兹的《简明数学史》的诸多学者（特别是李文林先生），他们的研究成果给了我们很大的帮助和启迪。

在翻译的过程中，淮海工学院为我们创造了相当宽松的科研工作环境，并给予了多方面的支持，在此深表谢意。

这里还要感谢赵炳起研究员、史金飞教授、刘永强教授、宁晓明研究员、舒小平教授、杜军教授、李纪明教授、李明教授、吴明忠研究员、徐其华教授、曹伟平教授、王维平教授、刘金禄教授、尹琦老师、庞徐荣老师、江萍老师、陈小燕老师、徐宁老师、岳勤教授、吴和成教授，以及众多朋友们的鼓励、支持和帮助；感谢印度友人江克利对部分梵文名字的翻译。另外，还要特别感谢我的学生——南京贝迪电子有限公司董事长刘勇对这个项目的资助。

李存华教授参加了本书的校译，他大多是在夜里十二点以后工作的，我要感谢他牺牲了很多休息时间，使得校译工作得以顺利完成，同时也感谢他常常在深夜能够陪我一起探讨翻译上存在的一些问题。感谢机械工业出版社的编辑团队成员，他们的鼓励、帮助以及朴实严谨的工作，是我们得以完成这项工作的动力和基础。

我还要感谢先后参与这项工作的韩苕、王晓花、郭秋贝、张焕焕、高红梅、尹娟、李敏仪、张思思、王俐、顾芳艳、武玥旸、王慧、刘蕾、汪沛漪、张琪、周宇婷、吴岑峰、宋媛、范鑫珠、朱茜、钱毓毓等，原谅我这里没有一一列举出来。他们的责任心和工作热情，着实让我感动。

最后，我要感谢团队成员的家人们对我工作的支持，他们时常深夜接到我的电话，却对我非常宽容；同时也要感谢我的妻子刘睿及女儿董壹，对我近三年无暇顾及其他事情而专注于翻译工作的支持。

由于译者水平有限，时间仓促，难免会有不少缺点和谬误，敬请各位专家和读者能够提出宝贵的意见和建议，我们非常希望能够加以改进，欢迎读者通过电子邮箱 dongxiaobo@ 126.com 联系我们。

董晓波

前　言

美国数学协会（MAA）下属教师数学教育委员会在其《呼唤变革：关于数学教师的数学修养的建议书》中，提议所有有望成为中小学数学教师的人们：

注意自身对各种文化在数学思想的成长与发展过程中所做贡献的鉴赏能力的培养，对来自不同文化的个人（无论男女）在古代、近代和现代数学论题的发展上的贡献有所研究，并对中小学数学中主要概念的历史发展有所认识。

根据 MAA 的观点，数学史方面的知识能向学生表明，数学是一项非常重要的人类活动。数学不是一产生就有像我们教科书中那样完美的形式，它常常是出于解决问题的需要，以一种直观的和实验性的形式发展出来的。数学思想的实际发展历程能有效地被用来激励和启迪今天的学生。

这本新的数学史教科书是基于这样一种认识产生的，就是：不只是未来的中小学数学教师，即便是未来的大学数学教师，为了更有效地给学生教好数学课，也需要对历史背景有所了解。因此，这本书是为那些主修数学，今后打算在大学或高中任教的低年级或高年级的学生设计的，内容集中于中小学或大学本科教学计划中通常包含的那些数学课程的历史。因为一门数学课程的历史会为讲解这一课程提供非常好的思路，为了使未来的数学教师能在历史的基础上开展课堂教学，我们会对每一个新概念做充分细致的解说。实际上，许多习题就是要求读者去讲一堂课。我希望这些学生以及未来的教师能从本书获得一种关于数学的来龙去脉的知识，一种可令大家对数学中许多重要的概念有更深入的理解的知识。

本书主要特色

材料组织灵活

尽管本书主要是按年代顺序划分成若干时期来进行组织的，但在每一时期内则是按专题来进行组织的。通过查阅详尽的细节标题，读者可以选择某一特定的专题，对其历史的全程进行跟踪。例如，想研究方程求解时，就可以研究古代埃及人和巴比伦人的方法，希腊人的几何解法，中国人的数值解法，阿拉伯人用圆锥截线求解三次方程的方法，意大利人所发现的求解三次方程和四次方程的一套算法，拉格朗日为解高次多项式方程而研究出来的一套判据，高斯在求解割圆方程方面所做的工作，以及伽罗瓦用置换来讨论求解方程的工作，这一工作我们今天称之为伽罗瓦理论。

关注教科书

从事数学研究，发现新的定理和技巧是一回事，以一种使其他人也能掌握的方式来阐述这些定理

和技巧则是另一回事。因此，在大部分章中都会讨论一种或几种那个时代的重要的教科书。学生们能通过这些著作来学习那些伟大的数学家们的思想。今天的学生将能够看到某些论题在过去是怎样被处理的，并能将这些处理方法与当今教科书中的方法加以比较，而且还能看到许多年前的学生想要解决的是什么样的问题。

数学的应用

有两章是完全用来讲数学方法的，也就是讲数学是怎样用于解决人类其他活动领域内的问题的。这两章，一章是关于希腊时期的，另一章则涉及文艺复兴时期，它们相当大的部分是讲述天文学的。事实上，在古代，数学家常常也是天文学家。要想了解希腊数学的主要内容，关键是要了解希腊人关于天体的模型，以及怎样借助这个模型用数学来得出预言。类似地，我们讨论了哥白尼-开普勒的天体模型以及文艺复兴时期的数学家们是怎样用数学来研究它的。我们还将考察在这两个时期数学在地理学中的应用。

非西方数学

我们还下了特别大的功夫来讨论数学在世界上除欧洲以外一些地区的发展。于是，有相当多的材料是有关中国、印度和阿拉伯的数学的。此外，第 11 章还讨论了世界其他地方的数学。读者会看到，有些数学概念在很多地方出现过，尽管也许并不是在我们西方称为“数学”的背景中出现。

按专题分类的习题

每一章均含有许多习题，为了便于选取，这些习题都是按专题分类汇集的。有些习题只需要简单的计算，有些则需要填补正文中数学论证的空白。讨论题是一种无明确答案的开放式问题，其中有些可能要做些研究才能回答。很多这类问题要求学生动脑筋去思考怎样利用在课堂上学到的历史材料。有许多习题即使读者不打算做，也至少应该阅读一下，以便对该章的内容有更全面的了解。（奇数序号计算题和部分奇数序号证明题的答案可在书末的答案中找到。）

焦点论坛

小传　为了便于参阅，对许多我们介绍过他们工作的数学家，其小传被放在独立于正文的栏框中。特别是，尽管由于种种原因参与数学研究的妇女为数不多，我们还是写了几位重要的女数学家的小传。她们通常都是在克服了重重困难后才能成功地对数学事业做出贡献。

专题　还有一些特殊论题以加框文字的专题形式散见于全书。其中有这样一些专题，如埃及人对

希腊数学影响问题的讨论、托勒密著作中函数概念的讨论、各种连续概念的比较。还有一些专题，它们把重要的定义汇集在一起以便于查阅参考。

补充资料

每一章的开始有一段相关引语和对一个重要数学“事件”的描述。每章还有一份附加了注释的参考文献，学生们从这些文献中可以获得更多的信息。考虑到本书的读者主要是那些未来的中学或大专院校数学教师，我在书末加了一个附录，对如何在数学教学中使用本书提供了一些建议。附录包括：一张中学和大专院校数学课程中各专题的历史与本书相应章节的明细对照列表；关于如何组织这类材料以适合课堂教学的一些建议；一张详细的大事年表，以帮助读者了解数学发现与世界史上发生的其他事件的联系。书末有一张本书中出现的大多数数学家的编年名录。

预备知识

学过一年微积分，具备了可资运用的知识，就足以理解本书的前 16 章，以后的几章要求更多一些数学上的准备。各节的标题已清楚地表明了需要哪些数学知识。例如，要想充分理解第 19 章和第 21 章，就要求学生学过抽象代数。

课程内容的弹性

本书包括的内容远远超出了普通一学期的数学史课程所能讲授的内容。实际上，它的内容适合一学年的课程。前半部分内容是讲述公元前直到 17 世纪末微积分发明为止的这一时期的。后半部分内容则是讲述 18 世纪至 20 世纪数学的。然而对于那些只有一个学期学时的教师来说，有几种使用本书的方式：第一种方式是可以选前 12 章中的绝大部分内容，然后就以微积分作为结束；第二种方式是选讲一到两个专题的全部历史。以下是可供选择的专题：方程求解，微积分思想，几何学概念，三角学及其在天文和测量方面的应用，组合学、概率论和统计学，抽象代数和数论。（附录中的列表将帮助读者找到与所选专题相对应的章节。）对于专题选讲，我建议要尽量包括 20 世纪的内容，以使读者认识到数学是在不断创新和发展的。最后，可以将前两种方式结合起来，即按年代顺序讲授古代数学的内容，然后再选讲某个近现代数学的专题。

本版更新之处

本书前两版获得了广泛的接受，这鼓励我保持它的基本体系和内容。然而，我仍力图在本书的内

容及表述的清晰性两方面做出一系列的改进。改进的根据是许多使用过本书第 1、2 版的人们所提出的意见，以及在新近文献中所刊载的有关数学史中的一些新发现。为使本书使用更方便，我将某些内容改组使其独立成章。实际上每一小节都有一些小小的改动，而自第 2 版以来较重大的改动则有：通过分析《方法论》羊皮书而发现的关于阿基米德的新材料；新增一节关于托勒密《地理学》的内容；更多关于中国、印度和阿拉伯，以及古代埃及和巴比伦数学的介绍，这些介绍是以我的新作《数学原著选》中涉及这几种文明的数学原始资料为基础的；关于 19、20 世纪统计学的新材料；关于 18 世纪将牛顿《自然哲学的数学原理》中的某些结果翻译成微分学语言的说明。全书以解决克莱数学研究所的第一个问题——庞加莱猜想的简短介绍作为结束。我力求改正老版本中史实上的全部错误，并杜绝新的错误。如果读者能够指出本书遗留的错误，我将深表感谢。每章还增加了一些新的问题，其中有些比较简单。参考文献方面也尽可能做了更新。此外，本书还增加了一些新的、印有相关人物画像的邮票作为插图。不过应当注意到，任何这种试图表现 16 世纪前数学家的邮票上的画像——别处的画像实际上也一样——都是想象的。至今还没有哪一张这类人物的画像是有可靠证据的。

致谢

和任何一本书一样，要不是有许多人的帮助，本书是不可能写成的。下面各位曾应我的请求阅读了本书大部分章节并提出了宝贵的建议：Mancia Asher（伊萨卡学院），J. Lennart Berggren（西蒙弗雷泽大学），Robert Kreiser（美国大学教授联合会），Robert Rosenfeld（纳苏社区学院），John Milcetich（哥伦比亚特区大学），Eleanor Robson（剑桥大学）和 Kim Plofker（布朗大学）。此外，很多人对本书的第 2 版和第 3 版提供了详尽的建议，尽管我没有全部采纳，但我真诚地感谢他们为改进本书所提出的想法。这些人中有 Ivor Grattan Guinness，Richard Askey，William Anglin，Claudia Zaslavsky，Rebekka Struik，William Ramaley，Joseph Albree，Calvin Jongsma，David Fowler，John Stillwell，Christian Thybo，Jim Tattersall，Judith Grabiner，Tony Gardiner，Ubi D'Ambrosio，Dirk Struik 和 David Rowe。我衷心地感谢所有这些人。

审阅书稿的很多人也以他们细致深入的评论给了我很大的帮助，使本书增色不少，没有他们的帮助，本书就不会是现在这个样子。第 1 版的审稿人有 Duane Blumberg（西南路易斯安那大学），Walter Czarnec（弗雷明汉州立大学），Joseph Dauben（纽约市立大学莱曼学院），Harvey Davis（密执安州立大学），Joy Easton（西弗吉尼亚大学），Carl FitzGerald（加利福尼亚大学圣地亚哥分校），Basil Gordon

（加利福尼亚大学洛杉矶分校），Mary Gray（美国大学），Branko Grunbaum（华盛顿大学），William Hintzman（圣地亚哥州立大学），Barnabas Hughes（加利福尼亚州立大学北岭分校），Israel Kleiner（约克大学），David E. Kullmam（迈阿密大学），Robert L. Hall（威斯康星大学密尔沃基分校），Richard Marshall（东密执安大学），Jerold Mathews（艾奥瓦州立大学），Willard Parker（堪萨斯州立大学），Clinton M. Petty（密苏里大学哥伦比亚校区），Howard Prouse（明尼苏达州立大学曼卡托分校），Helmut Rohrl（加利福尼亚大学圣地亚哥分校），David Wilson（佛罗里达大学），以及 Frederick Wright（北卡罗来纳大学教堂山分校）。

第 2 版的审稿人有：Salvatore Anastasio（纽约州立大学，新帕尔兹分校），Bruce Crauder（俄克拉何马州立大学），Walter Czarnec（弗雷明汉州立大学），William England（密西西比州立大学），David Jabon（东华盛顿大学），Charles Jones（鲍尔州立大学），Michael Lacey（印地安那大学），Harold Martin（北密执安大学），James Murdock（艾奥瓦州立大学），Ken Shaw（佛罗里达州立大学），Svere Smalo（加利福尼亚大学圣塔芭芭拉分校），Domina Eberle Spencer（康涅狄格大学），Jimmy Woods（北乔治亚学院）。

第 3 版的审稿人有：Edward Boamah（布莱克博恩学院），Douglas Cashing（圣文德大学）；Morley Davidson（肯特州立大学）；Martin J. Erickson（杜鲁门大学）；Jian-Guo Liu（马里兰大学）；War-ren William McGovern（博林格林州立大学）；Daniel E. Otero（塞维尔大学）；Talmage James Reid（密西西比大学）；Angelo Segalla（加利福尼亚州立大学长滩分校）；Lawrence Shirley（陶森大学）；Agnes Tuska（加利福尼亚州立大学弗雷斯诺分校）；Jeffrey X. Watt（印地安纳州大学-普渡大学印第安纳波利斯分校）。

我还在各种论坛上（包括美国数学协会和美国数学会联合举办的历次年会的数学史分组会）与许多数学史学家们交谈过，从中获益匪浅。这些在不同时期帮助过我（而我在前面未能提及）的人有 V. Frederick Rickey（美国军事科学院），Florence Fasanelli（美国科学发展协会），Israel Kleiner（约克大学），Abe Shenitzer（约克大学），Frank Swetz（宾夕法尼亚州立大学），以及 Janet Beery（雷德兰兹大学）。同时，我要感谢兰利学校的 Karen Dee Michalowicz，他向我介绍了如何与在职的和未来的高中教师交流，他在 2006 年的意外离世真是一个悲剧。此外，我还从数学史及其在教学中的应用研究所的各种会议的与会者和 2007 年亚洲数学 PREP 研讨会的参加者那里学到了不少东西。我在哥伦比亚特区大

学数学史（及其他）班上的学生在阐明我的诸多看法上也给了我不少帮助。自然，我欢迎任何地方的学生和同事为进一步改进本书而提出的任何意见和来信。

感谢 Harper Collins 出版社的前编辑 Steve Quigley，Don Gecewicz 和 George Duda，他们帮助我完成了本书的第 1 版。感谢第 2 版的编辑 Jennifer Albanese。我还特别感谢本书的新编辑 Bill Hoffman，无论是在本书第 3 版还是在缩减本的编辑出版过程中，他都提出了许多建议并给予了大力支持。Pearson Addison-Wesley 出版社的 Elizabeth Bernadi 为确保本书如期出版付出了很大辛劳，Jean-Marie Magnier 帮助发现了习题答案中的一些错误。生产管理员 Paul C. Anagnostopoulos，Jennifer McClain，Laurel Muller，Yonie Overton 和 Joe Snowden 等也出色地完成了他们的任务，使本书能够顺利面世。我谨向以上各位表示感谢。

最后我要感谢我的妻子菲丽丝，为了她多年来给我的全部的爱和支持，无论是在我为本书工作的时刻，还是其他的时光。

V. J. 卡兹

银泉，马里兰

2008 年 5 月

目　录

译者序
前　言
第 7 章　古代和中世纪的中国数学 …… 241
7.1　中国数学简介 …… 241
7.2　计算 …… 243
7.3　几何 …… 247
7.4　解方程 …… 254
7.5　不定分析 …… 266
7.6　来自中国的传播 …… 271
习题 …… 272
参考文献与注释 …… 274
第 8 章　古代和中世纪的印度数学 …… 276
8.1　印度数学的简介 …… 276
8.2　计算 …… 279
8.3　几何 …… 284
8.4　求解方程式 …… 288
8.5　不确定性分析 …… 291
8.6　组合数学 …… 299
8.7　三角函数 …… 301
8.8　流传到印度和从印度向外流传 …… 310
习题 …… 311
参考文献与注释 …… 314
第 9 章　阿拉伯数学 …… 316
9.1　阿拉伯数学导论 …… 316
9.2　十进制算术 …… 318
9.3　代数 …… 323
9.4　组合学 …… 346
9.5　几何学 …… 352
9.6　三角学 …… 361
9.7　阿拉伯数学的传播 …… 371
习题 …… 372
参考文献与注释 …… 376
第 10 章　中世纪的欧洲数学 …… 379
10.1　中世纪欧洲数学的介绍 …… 379
10.2　几何学和三角学 …… 384
10.3　组合数学 …… 393
10.4　中世纪的代数 …… 400
10.5　运动学数学 …… 411
习题 …… 419
参考文献与注释 …… 422
第 11 章　世界各地的数学 …… 425
11.1　14 世纪转折时期的数学 …… 425
11.2　美洲、非洲以及太平洋地区的数学 …… 430
习题 …… 440
参考文献与注释 …… 441
附录 …… 443
附录 A　如何在数学教学中使用本书 …… 443
附录 B　数学史综合参考文献 …… 455
附录 C　部分习题答案 …… 457
数学家编年名录 …… 459

第 7 章 古代和中世纪的中国数学

数学被认为是一门非常重要的学科。朱世杰的《四元玉鉴》对于世界数学的发展起到了非常巨大的作用，充分利用这本书，就可以更好地研究知识、开发智力、控制和统治国家乃至整个世界。难道不应该仔细研究并从中学到些什么吗？

——朱世杰《四元玉鉴》的介绍，1303[1]

初唐时期的天文学家王思辩早在 7 世纪就上表皇上指出《算经十书》㊀中有很多不足之处。因此，后来李淳风与国子监算学博士梁述、太学助教王真儒受诏注释《算经十书》，消除缺点。《算经十书》编订完成后，唐高宗下令将其作为国子监算学馆的数学教材。[2]

在前 6 章中，我们不但讨论了希腊数学，而且还研究了两个影响希腊数学的美索不达米亚文明和埃及文明。但是实际上在古代，世界的其他地方也有数学思想的产生。在本章中，我们看到一些数学思想诞生在古代和中世纪的中国，其中有一些可能已经传到欧洲，但是传播途径到目前为止还没有被发现。

7.1 中国数学简介

中华文明有 5000 年的历史甚至更久远，在靠近黄河边的安阳发掘出的“甲骨文”证明了中华文明可以追溯到公元前 1600 年的商朝。“甲骨文”是王室用于占卜记事而在龟甲或兽骨上刻的文字，是早期中国计数系统的起源。后来大约公元前 1000 年，周朝取代商朝，继而进入了春秋战国时期，于公元前 600 年出现了一个百家争鸣，百花齐放的伟大时期，其中的代表性人物就是孔子。当时有部分诸侯国建立了诸子书院，还有些诸侯国主为了富国强兵也雇用了一些学者。

后来一些实力较弱的诸侯国逐渐被强国吞并，直到公元前 221 年秦始皇才最终统一了中国，从而结束了战国时代。在他的领导下，中国变为一个高度中央集权的官僚国家。他执行严酷的法律法规，均衡征税，并要求统一重量、量具、货币，尤其是统一了文字。秦始皇曾经下令焚

㊀ 包括《九章算术》《孙子算经》等十部中国古代重要的数学著作。

烧秦朝之前的所有史书以排斥异议，虽然“焚书坑儒”一直是个传说，但是确实有一些证据能证明其发生过。后来秦始皇死于公元前 210 年，他建立的秦王朝很快就被推翻，取而代之的是汉朝，存在了 400 多年。

在湖北省张家山附近发现了西汉早期一位官员的墓和一些陪葬的汉简。1984 年初荆州博物馆组织发掘了该汉墓，发现了一部近 200 片竹简的数学著作。这部被称为《算数书》（数字和计算之书）的著作是中国现存最早的数学文本。像后来的许多数学著作一样，它是由问题和解法构成的，我们将在下面考虑其中少数几个问题。有两部我们熟悉的编辑于汉代的数学著作，有可能被用作当时文职人员的教科书。它们是《周髀算经》（关于（日晷的）指时针和天文周期的数学名著）和《九章算术》（关于数学技艺的）。前者曾有赵爽（3 世纪）、甄鸾（6 世纪）和李淳风（7 世纪）等人留下的评注。后者是中国几世纪以来数学应用的核心，现今流传的是刘徽（3 世纪）所注的版本，他主要的数学工作是评注了《九章算术》，甚至他还增加了一个第 10 章，这个第 10 章现在成为一部独立的数学著作，名为《海岛算经》。李淳风也曾全面地评注过《九章算术》，并详细给出了解题步骤，给初学者打开了方便之门。在下文中，我们会考虑到上面这些人关于这两本著作的评注。

公元 3 世纪汉朝（指东汉）灭亡，中国分裂成几个相互交战的国家。这种战乱情况一直持续到 581 年，隋朝建立，37 年后唐朝建立。唐朝持续了大约 300 年。虽然又开始了分裂的局面，但是这种局面只持续了很短的一段时间，就由宋朝（960—1279）统一了中国的大部分领土，后来又被成吉思汗领导的蒙古人推翻，建立了元朝，一百年后汉人建立了明朝。

尽管其间经历无数战乱和朝代的更替，但在东亚的这部分地区，共同的语言和共同的价值观使得中国文化一直在不断发展。汉朝已经建立起了科举制度，这种文官考试制度持续至 20 世纪初。中间曾有几次短期的中断。虽然考试内容主要是中国文学经典，但是为了满足国家行政事务，诸如测量、征税和编制历法的需要，还要求官员们具有胜任某些领域的数学才能。因此如前所述，在唐朝李淳风领头编订和注释了著名的《算经十书》，主要包括《周髀算经》《九章算术》，刘徽的《海岛算经》，《孙子算经》（4 世纪），《张丘建算经》（5 世纪后期）等。1213 年宋朝发行了《算经十书》，而到了明朝却几乎失传。通常，《算经十书》被用来作为数学教育和考试的教科书，集中了中国古代数学各种经典问题和解法。科举考试通常要求考生默写这些数学著作中的相关

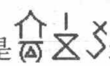
内容，并使用与书中相同的解题模式去解题，很少鼓励使用创新的解法。因此，尽管朝廷鼓励应用数学的研究，例如开市价的制订，但是并不特别鼓励数学创造力开发。

即使如此，在中国还是出现了创造性数学家，他们不仅改进了解决实际问题的老办法，而且还拓展出了远远超越实际需要的新方法。他们的成就主要涉及四个领域：数值计算，几何，方程解法和线性同余式组。特别地，到了 13 世纪关于方程解法和一次同余式组问题的一些新解法被编辑出版了。除秦九韶的著作之外，还有李冶、杨辉和朱世杰的。

7.2 计算

根据最早的记载，中国古代最初采用的就是十进位位值制记数法。但随着时间的推移数字的形状和表示方式在逐渐改变。

7.2.1 数字符号和分数

中国的商朝就已经使用以十为基数的乘法累数制数系。也就是说，他们发明了从 1 到 9 的数字符号，同时列出了 10 的不同幂的符号。例如数字 659 就可以被表示成 6 用（）表示连接着 100 ，然后 5 用（）表示连接着 10（丨），和 9 用表示，最后是组合在一起。有记录表明公元前 4 世纪中国古代就利用一种大约 10cm 长的竹制小棒做成的算筹来计数。中国古代的这种计数板由许多列组成，每列表示 10 的不同幂。算筹计数法以纵横两种排列方式来代表比十小的整数

1	2	3	4	5	6	7	8	9
𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

当表示比 10 大的数时，最右边的一列被个位占用，接下来是十位，然后是百位，依此类推。而空白列则表示零。为了有助于人们更容易地读取数字，算筹的这两种放置方式交替使用。垂直放置方式用在个位、百位和万位等，而水平放置方式被用在其他数位上。因此，1156 用

𝍩 𝍠 𝍬 𝍥表示，6083用𝍮　𝍰 𝍢表示。这些表示方式也出现在了计数的书籍里。虽然有资料记载早在8世纪中国就已经使用点来表示空列（中间的零），但是直到12世纪才有确凿证据证明那些小圆圈是用来表示零的。因此，直到那时我们才可以说中国计数出现了十进制分数。中国有关分数最早的记载就是简分数，用词组“分之”表示。例如，2/3被写作三分之二，可以翻译为“把一个整体平均分成三份，从中取出两份”。然而，到了中世纪中国开始在许多情况下使用十进制小数。

负数至少在公元前的中国就开始使用了，中国古代数学家在计数板上用某些方法来区分“正”数和“负”数。其中之一就是用红色算筹表示正数，黑色算筹表示负数。在算筹数字记号法里，书面记录时也曾用画穿过数字的斜杆的方式来表示负数。

《算数书》在开始部分就介绍了分数的运算法则。例如，化最简分数的法则如下

选分子和分母中的较小数去减较大数，并将此过程辗转反复，直到最后余数和减数相等，则此时余数就是所求的最大公因子。另一个化简分数的法则是：如果分子和分母都是偶数，则用2约简；如果分子和分母可以连续被某个固定的整数整除，就用该整数约简。还有一个分数化简的法则是：分母连续减去分子的n倍，所得余数用作新的分母，然后再从分子中连续减去新的分母；直到分子和分母相等，此时所得的数就是原分子和原分母的最大公因子；如果不能继续相减，但是为偶数，则分子和分母都用2去整除。例如162/2016可化简为9/112。[3]

在这个例子中，我们注意到2016可以被162减去12次，剩下余数72。然后162可以被72减去2次，余数为18。因为72是18的倍数，那么18就是要求的最大公因子，2016和162可以用18去除，化简得到分数9/112。注意到，这个过程和欧几里得算法是一样的。

分数的加法运算法则内容如下

如果分母相同，则分子直接相加；如果分母不同，那么某些分数可以扩大两倍使分母都相同，那么就扩大两倍；某些分数可以扩大三倍使分母相同，那么就扩大三倍，以此类推。同样地，分子也应该扩大两

倍，因此扩大两倍；或者和分母一样扩大三倍、四倍或者五倍等，直到所有分数的分母都相同时，就把分子直接相加。如果分母仍然不同，那么就把所有分数的分母乘在一起作为最小公倍数，同时分子与相应的分母交叉相乘后，加在一起作为被除数，然后再化简。[4]

在这几种方法中阐明的基本思想是用原来除数乘积的公因式作为一个公共的除数。因此，2/5、3/6、8/10、7/12 和 2/3 的和是 2 又 57/60。也可以给出分数的其他算术运算。例如，7+1/2+1/3 再除以 5 的商是 1 又 17/30。

《算数书》是基本方法集的形式，应用方法去解许多有趣的问题。“女织”问题就是其中之一：

邻家有个女子对自己很不满意，但高兴的是每天的织布量都是前一天的两倍，她五天共织布五尺（=50 寸）。问第一天织了多少布？后来每天各织了多少布？这个问题的答案是她第一天织了 1 又 38/62 寸布；第二天织了 3 又 14/62 寸布；第三天织了 6 又 28/62 寸布；第四天织了 12 又 56/62 寸布；第五天织了 25 又 50/62 寸布。这道题的解法是把第一天到第五天织布的比率 2，4，8，16，32 加在一起作为除数，用五天织的分子与比率（2，4，8，16，32）各自相乘作为被除数，被除数能被整除的部分以尺为单位。不够一尺的，乘以十化为寸。不够一寸的，用分数表示剩余的部分。[5]

7.2.2　根

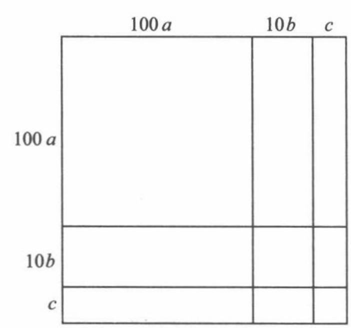


图 7.1　平方根算法示意图

《九章算术》的第 4 章详细介绍了另一种计算，即平方根和立方根的计算。平方根算法是基于代数式 $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$，但作者很可能考虑了如图 7.1 所示的解法。我们在本章的第 12 题举例说明了这种算法，求面积为 55225 的正方形的边长。解题思路就是求出整数 a，b，c，以便可以将答案写为 $100a+10b+c$。首先，求出最大的整数 a 以满足 $(100a)^2<55225$。得到 $a=2$。其次，大正方形的面积（55225）和边长为 $100a$ 的正方形的面积（40000）的区别就是图中大的磬折形。如果忽略外面的小磬折形，显然整数 b 必须满足 $55225-40000>2(100a)(10b)$ 或 $15225>4000b$。得到 $b<4$。接着检查 $b=3$ 是否满足，也就是，包括边