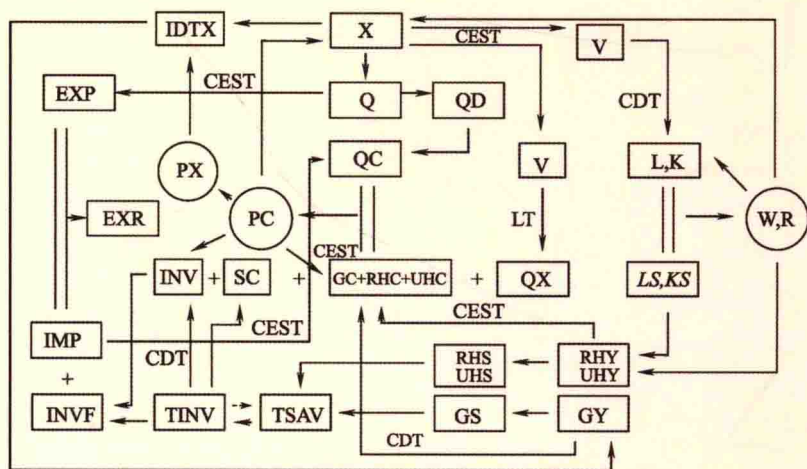


A PRIMER IN
COMPUTABLE GENERAL EQUILIBRIUM MODELLING

可计算一般均衡建模 初级教程

潘浩然 著



中国人口出版社
China Population Publishing House
全国百佳出版单位

可计算一般均衡建模 初级教程

潘浩然 著



中国人口出版社
China Population Publishing House
全国百佳出版单位

图书在版编目(CIP)数据

可计算一般均衡建模初级教程/潘浩然
著. —北京:中国人口出版社,2016. 11

ISBN 978 -7 -5101 -4788 -3

I. ①可… II. ①潘… III. ①可计算性 - 均衡模型 -
教材 IV. ①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 273846 号

可计算一般均衡建模初级教程

潘浩然 著

出版发行	中国人口出版社
印刷	北京中印联印务有限公司
开本	787 毫米 × 1092 毫米 1/16
印张	35.25
字数	600 千
版次	2016 年 11 月第 1 版
印次	2016 年 11 月第 1 次印刷
书号	ISBN 978 -7 -5101 -4788 -3
定价	120.00 元

出版人	邱立
网 址	www.rkchs.net
电子信箱	rkchs@126.com
总编室电话	(010)83519392
发行部电话	(010)83530809
传 真	(010)83519401
地 址	北京市西城区广安门南街 80 号中加大厦
邮 编	100054

版权所有 侵权必究 质量问题 随时退换

自从2010年回国任教以来,这些年评阅过的经管类学生论文累积起来已不下千篇,我的一个发现或者感慨是,这些论文,无论博士、硕士还是本科论文,几乎清一色都要套用一些数量方法来分析论证问题,却不见有任何一篇运用到可计算一般均衡模型这种方法。在与同行们的交流接触中,偶尔提到可计算一般均衡模型或CGE这些名词时,遇到的反应也基本都是一脸茫然。这让我回想起三十多年前在国内上学时的类似情景。那个时代的国内经济学界对数量经济学这一概念也是一片茫然,分不清什么是数理经济学、什么是计量经济学、什么是数量经济学。当然,今天也仍旧有很多人分不太清这三者间的异同,有人甚至以为计量经济学等同于数量经济学。然而,计量经济学固然已成长为数量经济分析的一个最重要学科,但它还不能是数量经济学的全部,它还有很多局限性,同时也还有许多其他数量经济方法发挥着不容忽视的作用。可计算一般均衡模型方法就是这其中的重要一支。

可计算一般均衡模型是基于一般均衡理论、宏观经济结构关系和国民经济核算数据而建立起来的一套全景描述经济系统运行的数量模拟系统,其英文原文是 Computable General Equilibrium models,简称CGE。CGE模型研究的是总体经济的长期、确定性行为及其对于外部冲击的变动反应。

CGE模型的发展历程其实并不短于计量经济学,辉煌程度也不逊于计量经济学。一般均衡模型方法的发展主要基于两个学科,一是一般均衡理论,二是国民经济核算方法。前者由Walras(1874)提出一般均衡假说,Arrow、Debreu(1954)给出一般均衡存在的严格数学证明。后者以Kuznets(1937)提出的国民收入账户以及Leontief(1941)提出的投入产出方法为基础,由Stone(1947)等人扩展构建国民经济核算体系及社会核算矩阵,为模型提供数据基础。可计算一般均衡模型的发展始于Johansen(1960)提出的要素替代模型及线性化解法。世界银行经济学家Adelman和Robinson(1978),Dervis,de Melo和Robinson(1982)等人沿这一方向开发出大规模模型并提出了可计算一般均衡模型即CGE的概念。与此同时,随着Scarf(1973)利用不动点算法证明出一般均衡价格解的存在性和可得性,Shoven和Whalley等(1977,1984,1992)基于Harberger(1962)的两部门税收和贸易模型开发出国际贸易应用一般均衡模型,简称AGE(Applied General Equilibrium models)。AGE与CGE相比,前者注重学术理论探讨,模型设计简单抽象;后者则面向实际应用,一般都规模较大,内容具体。

实践证明,CGE 今天已经成为一般均衡模型方法的绝对主流,AGE 的提法反而不太常见。

计量经济学方法体系庞大,适用范围广,既可以是宏观经济也可以是微观经济,而可计算一般均衡模型方法主要适用于宏观经济政策研究,尤其擅长于评价经济政策对于总体经济的影响情况,这方面恰恰是计量经济学的弱项。CGE 模型以微观经济学的消费者追求效用最大化和生产者追求利润最大化行为理论为基础,模拟自由竞争市场条件下的价格对于产品及要素市场平衡的调节机制,通过宏观经济结构关系完整地描述经济系统的运行,能够将各种各样的政策纳入数量分析框架中评价政策在总体经济范围内的实施和影响,近三十年来在税收政策、结构调整、国际贸易、经济增长、气候变化、资源环境政策等方面得到广泛的发展和运用,已成为政策研究的主流工具。

CGE 模型的特点和强项决定了它的研究对象通常聚焦于国民经济发展的重大战略或政策问题,因而其研究和应用工作在国内通常受到顶尖高等院校、科研机构或决策部门的青睐。计量经济学目前在我国已经相当普及,多数经管类院校都讲授至少初、中级水平的课程,各种应用也比比皆是,而可计算一般均衡模型的课程教学和应用研究却凤毛麟角,只见少数顶尖学术科研机构有所提及,仅为少数专家学者掌握和承担。另一方面,CGE 模型的实际应用领域却相当广泛,现实应用价值很高,是国际国内重大战略问题和政策研究不可或缺的工具。同时,CGE 模型也是经济学界普遍认可的一种规范研究工具,其成果在高质量国际学术期刊上占据不小的比例,被接纳率较高。

CGE 模型方法仅为顶尖学术科研和决策机构的少数专家学者所掌握的事实,一方面表明其稀缺性和高层次性,另一方面也说明掌握这种方法并非易事,是一项难度很大的挑战,往往令人望而却步。这有几个方面的原因。首先,CGE 模型要求较高的知识准备,这包括经济学、统计学、政策分析、数学和计算机等方面,缺一不可。其次,CGE 模型要求严格的现代经济理论基础、精细的系统结构安排、创新性的政策设计和分析技巧、系统完整的数据准备、有效的估计和计算方法以及正确的计算机编程,不能有任何差错,否则模型就无法运行。再次,关于 CGE 模型的正规教学或训练较少,初学者往往需要自学来掌握,而关于 CGE 模型的参考资料五花八门,介绍的内容和方式因人而异,没有统一的标准版本,自学起来往往事倍功半。最后,目前关于 CGE 建模的介绍文献基本都遵循一个类似的模式,即从基本原理出发,按照经济系统结构分别介绍或讨论各部分的建模过程,再依据一个完整的模型讲解建模、编程、运行和应用等过程。实践证明,这种方法并不能给初学者带来有效的帮助,学习者在学习过程中会遇到很多难以理解、发现和解决的具体问题,更不能形成自己独立设计和建造模型的能力。

本书就是针对初学者学习 CGE 过程中可能遇到的难关难点而设计,尝试通过一些简单实用的方法帮助初学者既能尽快入门,又能打下坚实的基础。为此,

本书尽量简化理论内容的介绍，力图通过大量简单的模型范例由简至繁地一步步将初学者领入 CGE 建模的门槛。具体来说，与其他 CGE 参考资料相比，本书具有如下几个特色。第一，本书的各模型范例首先按照单一技术建模，由最简单的 Leontief 技术开始，依次过渡到较为复杂的 Cobb-Douglas 技术和更为复杂的 CES 技术，其次才考虑最为复杂、实际应用的多种技术混合情形。而其他文献一般都是直接从混合技术模型开始介绍，容易给初学者带来混乱。第二，每一套假定技术情形下的模型范例均包含几种模型类型，从最简单的基本情形模型开始，逐渐增加内容，及至复杂情形模型。每一种模型均基于相应的社会核算矩阵表建立。第三，本书对于每一个模型范例均尽可能详尽地给出各个方程的完全推导过程以及其他可选择的推导方式。这种循序善诱的叙述最方便初学者深入理解和掌握。而其他文献一般都是省略掉大量的中间环节或过程，让读者摸不着头脑。第四，本书的所有模型范例均附带能正常运行的 GAMS 程序，供读者学习、验证、练习和发展。

最后，需要声明的是，本书为了阅读方便对于英文人名一般直接给出原名，不用中文译名。也是为了阅读方便，本书对于相同结构不同技术的模型的叙述有意保留一些重复。总而言之，精练并不是本书的第一要义，本书追求的是自简及繁、举例示范、不厌其烦。

作者

2016 年 10 月于北师大

第一章 总论	1
第一节 可计算一般均衡模型的特色优势.....	1
第二节 可计算一般均衡模型基本原理.....	3
第三节 投入产出表与社会核算矩阵.....	14
第四节 可计算一般均衡模型基本结构.....	23
第五节 可计算一般均衡模型建模程序.....	25
第六节 可计算一般均衡模型建模疑难.....	26
第七节 GAMS 软件及建模程序.....	31
第八节 本书其他章节的安排.....	32
本章作业.....	33
第二章 Leontief 技术模型系列	34
第一节 LT1 模型.....	34
第二节 LT2 模型.....	42
第三节 LT3 模型.....	51
第四节 LT4 模型.....	62
本章作业.....	79
第三章 Cobb-Douglas 技术模型系列	80
第一节 CDT1 模型.....	80
第二节 CDT2 模型.....	91
第三节 CDT3 模型.....	102
第四节 CDT4 模型.....	117
本章作业.....	138

第四章 CES 技术模型系列	139
第一节 CEST1 模型.....	139
第二节 CEST2 模型.....	157
第三节 CEST3 模型.....	171
第四节 CEST4 模型.....	188
本章作业.....	211
第五章 混合技术模型系列	212
第一节 MT1 模型.....	212
第二节 MT2 模型.....	232
第三节 MT3 模型.....	253
第四节 MT4 模型.....	276
本章作业.....	300
第六章 递推动态模型系列	301
第一节 RD1 模型.....	301
第二节 RD2 模型.....	329
第三节 RD3 模型.....	360
第四节 RD4 模型.....	393
本章作业.....	429
第七章 跨期动态模型系列	430
第一节 ID1 模型.....	431
第二节 ID2 模型.....	467
第三节 ID3 模型.....	496
第四节 ID4 模型.....	524
本章作业.....	552
参考文献	553

第一章

总论

第一节 可计算一般均衡模型的特色优势

现代经济学已经发展成为一门技术性很强的学科，关键之一在于其通过与其他科学的交叉和渗透吸纳进大量的实证思想和数量分析技术。经济研究中运用的数量方法有的是从统计学、数学、物理学、生物学等其他学科拿来直接利用，有的经过与经济理论和实践相结合而发展起来，如计量经济学、经济统计学、投入产出分析和CGE模型等方法。我们可以将前者统称为非数量经济方法，而将后者统称为数量经济方法。很显然，数量经济方法以经济理论为基础，根据经济运行规律和特点而建立，具有明确的经济含义，最适合经济问题的研究。

CGE模型是一种典型的数量经济方法。它基于严格的微观经济学理论，构建自由竞争的市场环境，模拟宏观经济系统运行及价格调节机制，适合考察各种各样的政策工具在总体经济范围的效应和影响。正是因为这一特色，CGE模型近三十年来流行于国际应用经济学界，逐渐成为主流规范的数量经济分析工具，在经济增长、结构调整、国际贸易、公共财政、收入分配、农业、气候变化、资源环境等政策分析领域得到广泛应用。

一个标准的CGE模型应具有这么一些主要特征：

1. 基于社会核算矩阵呈现的现实数据建立，并可复制出实际情形；
2. 通过相对价格调节商品及要素市场平衡，描述实体经济系统的调整和动态；
3. 假定同质主体、异质部门、自由竞争市场、规模收益不变技术、同类偏好，并遵从瓦尔拉斯法则；
4. 允许特定部门、产品或生产要素在不同层次水平进行替代；
5. 受相对价格变动的影晌，生产技术灵活变动。

CGE模型基于一般均衡理论和社会核算矩阵的结构关系构建，似乎简单规

范，便于建立标准的模型范式，但实际上却并不如此。CGE 模型几乎有无穷多种变化，总的来说大致分为这么几种类型：

1. 按照研究目的划分，CGE 模型可分为规范模型和实证模型，或者理论模型和实验模型。具体来说，AGE 属于前者，而 CGE 属于后者。

2. 按照研究时间划分，CGE 模型可分为静态模型和动态模型。前者适用于静态比较分析，后者则适用于动态分析或外推预测。动态模型又可进一步分为递推动态模型和跨期动态模型。前者注重眼前当期行为，而后者则注重长远预期行为。

3. 按照基于的经济理论，CGE 模型可分为新古典主义模型、凯恩斯或 Johansen 模型等。前者注重要素完全就业、价格的调节作用和储蓄驱动等经济特征，后者则主张不完全就业、价格粘性或刚性和投资驱动等经济特征。

4. 按照研究区域划分，CGE 模型可分为单区域模型和多区域模型，或一个国家模型和全球模型。多地区模型由于需要考虑地区间的关联关系，比单地区模型要复杂。

5. 根据不同的模型设计，CGE 模型可以有不计其数的变异。从结构内容上看，CGE 模型不外乎包含产业部门、商品、要素、收入、消费、投资、贸易、居民、企业和政府等几个方面，但这些方面的搭配组合却有千变万化种形式，能形成各种各样的不同模型。

6. 从用途上看，CGE 模型可根据不同用途分别构建成公共财政模型、收入分配模型、劳动力转移模型、结构调整模型、国际贸易模型、经济增长模型、区域经济发展模型、环境资源政策模型、可持续发展模型，等等。一个 CGE 模型可以用于一种用途或多种用途，用途越多，模型就变得越复杂。

第二节 可计算一般均衡模型基本原理

一、一般均衡理论

一般均衡理论的核心可简化为由一对经济主体、一对主体行为和一对市场构成（见图 1-1）。这一对经济主体即是生产者和消费者，如图 1-1 左侧长方块所示；他们的经济行为分别为生产者追求利润最大化和消费者追求效用最大化，如图 1-1 右侧长方块所示。在主体及主体行为之间存在一对市场，即是要素市场和商品市场。生产者与消费者间对于要素的需求和供给必须平衡，这种平衡需要要素价格的调节来实现。类似地，在利润最大化和效用最大化行为驱动下，生产者和消费者共同作用形成商品的总供给和总需求，其中消费者是商品的最终需求者，生产者既是中间消耗商品的需求者又是供给者（如图 1-1 中折线所示）。商品市场的总供给和总需求也必须平衡，这种平衡需要商品价格的调节来实现。

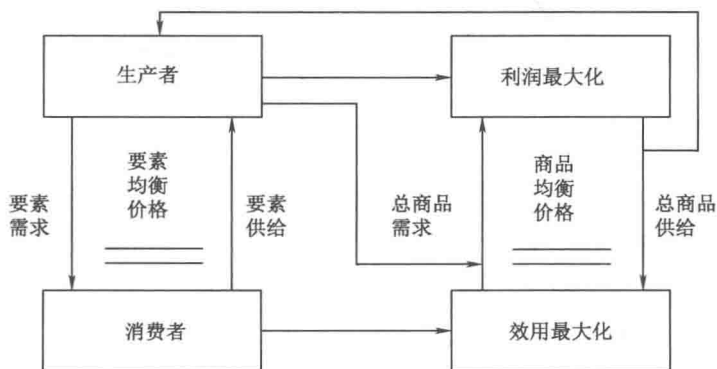


图 1-1 一般均衡理论的核心经济关系

二、瓦尔拉斯法则与相对价格变动

一般均衡假说最早由 Walras (1874) 正式提出，因此也叫瓦尔拉斯均衡 (Walras equilibrium)。一般均衡理论的一个重要原理是瓦尔拉斯法则 (Walras' Law)，它指一个经济体的所有市场如果除一个市场之外其他各个市场的供需均达到平衡，那么这最后一个市场也一定达到了供需平衡，因为整个经济体的总供需是天然平衡的。该原理的逻辑简单，不难用数学推演出来。

假设在一个无生产、纯交换的经济中，存在 N 种不同的商品 ($i = 1, 2, 3, \dots, N$)， H 个不同的消费者或交换者 ($h = 1, 2, 3, \dots, H$)； N 种商品的数量和价格分别为， $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ 和 $p = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ ，每个交换者的财富为 w_h ，拥有的各种商品的数量为 e_{ih} 。

假定需求服从关于价格零阶齐次的连续非负函数， $d_{ih}(p, w_h)$ ，即：

$$d_{ih}(\lambda p, \lambda w_h) = \lambda^0 d_{ih}(p, w_h) = d_{ih}(p, w_h)$$

该条件意味着需求不随价格及财富的等比例变化而改变，如美元变为人民币。

对于每个交换者来说，全部消费的价值（方程的左边）要等于其全部财富的价值（方程的右边），即：

$$\sum_{i=1}^N p_i \cdot d_{ih}(p, w_h) = w_h = \sum_{i=1}^N p_i \cdot e_{ih}$$

对于整个经济体来说，全部消费的价值也要等于其全部财富的价值，即：

$$\sum_{h=1}^H \sum_{i=1}^N p_i \cdot d_{ih}(p, w_h) = \sum_{h=1}^H w_h = \sum_{h=1}^H \sum_{i=1}^N p_i \cdot e_{ih}$$

将上面两方程合并变换，即得出瓦尔拉斯法则（Walras' Law），即：

$$\sum_{i=1}^N p_i \sum_{h=1}^H (d_{ih}(p, w_h) - e_{ih}) = \sum_{i=1}^N p_i \left(\sum_{h=1}^H d_{ih}(p, w_h) - \sum_{h=1}^H e_{ih} \right) = \sum_{i=1}^N p_i \cdot (d_i(p) - e_i) = 0$$

瓦尔拉斯法则意味着在所有价格条件下全部市场过度需求之和的值为 0。这是瓦尔拉斯均衡的必要但不充分条件，即在一般均衡状态下总过度需求一定为零。

瓦尔拉斯均衡的充分条件是：

$$d_i(p^*) - e_i = 0$$

该条件说，在 N 个商品市场中，如果给定 N 个正的均衡价格，则每种商品市场的供需一定相等，每个市场只存在一个均衡价格。

一个稍弱些的要求条件是：

$$d_i(p^*) - e_i < 0$$

即在 N 个商品市场中，如果存在 N 个等于 0 的均衡价格，则每种商品市场的需求不会超过供给。

因此，根据瓦尔拉斯法则，我们可以推出，如果 $N-1$ 个商品市场达到供需平衡，则剩下的一个市场也一定是平衡的。证明如下。

假定剩下的一个未知是否平衡的市场是市场 N ，根据瓦尔拉斯法则，我们有：

$$p_N (d_N(p^*) - e_N) = 0$$

既然 $p_N > 0$ ，则

$$d_N(p^*) - e_N = 0$$

因而瓦尔拉斯法则使得第 N 个市场的平衡条件成为冗余条件，也就是说只存在 $N-1$ 个独立的条件。我们实际只需要 $N-1$ 个独立的条件方程来求解 $N-1$ 个价格，剩余的一个价格无法求解。不被求解的那个价格需要作为被求解的 $N-1$

个价格的基准价格外生给定，最终导致被求解的 $N-1$ 个价格其实只是相对于基准价格的相对价格。

尽管 Walras 提出一般均衡假说，其存在性的严格数学证明得益于 Arrow 和 Debreu (1954) 的工作，Scarf (1973) 运用不动点算法证明了一般均衡价格解的存在性和可得性。另一方面，理论上证明一般均衡解存在的唯一性却因模型而异，难度较大。实践中，一般通过测试给定不同初始值的情况下模型解的异同来判断模型解的唯一性。Kehoe 和 Whalley (1985) 从实验的角度出发研究了大量的应用一般均衡模型，均没有发现多重解的存在。

三、生产技术

尽管生产技术和效用偏好的式样很多，CGE 模型最常用的只有少数几种。特别地，通常只采用三种生产技术，即 Leontief、Cobb-Douglas 和 CES 生产技术。Varian (1992) 对这三种技术的形式和特性做了详细的介绍和讨论。

(一) Leontief 生产技术

Leontief 生产技术描述生产的完全无替代或完全互补情形，即生产按照固定投入比例相互搭配进行，不存在各项投入间相互替代的可能。一个典型的 Leontief 生产技术函数有如下形式：

$$X = \min\{\alpha Q, \beta V\}$$

式中， X 表示产出， Q 和 V 分别表示两种生产投入， α 和 β 分别表示单位投入的产出系数。由于该式不可微分，无法直接代数求解，但从图形看出其最优解。如图 1-2 所示，只有在 L 形等产量曲线的拐点处，即 $Q^*(X) = \frac{X}{\alpha}$ 及 $V^*(X) = \frac{X}{\beta}$ 时，两种投入才都能以最小的投入生产出同样产量的产出。否则，在曲线上任何其他点都会有一种投入出现过度使用的情况，因而不是最优选择。这也说明不仅仅在最优解情形时不能出现替代，即使在出现投入过度使用的情况时也不会发生替代。

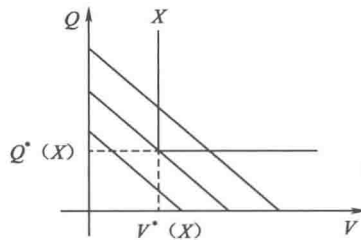


图 1-2 Leontief 生产技术函数图

令 C 和 P 分别代表生产成本和投入品的价格，则 Leontief 成本函数有如下的形式：

$$C(X) = P_Q \cdot Q^*(X) + P_V \cdot V^*(X) = P_Q \cdot \frac{X}{\alpha} + P_V \cdot \frac{X}{\beta} = X \cdot \left(\frac{P_Q}{\alpha} + \frac{P_V}{\beta} \right)$$

(二) Cobb-Douglas 生产技术

Cobb-Douglas 生产技术描述生产投入的一种可部分替代情形，即生产的各项投入间存在一定程度的相互替代的可能。在规模收益不变假设条件下，一个典型的 Cobb-Douglas 生产技术函数有如下形式：

$$X = A \cdot Q^\alpha \cdot V^{1-\alpha}$$

式中， A 代表技术效率系数， α 表示替代系数。该生产函数中各项投入之间的替代比率，亦即图 1-3 中的等产量曲线的曲率，由技术替代率 TRS 表示，即：

$$TRS = -\frac{\frac{dX}{dQ}}{\frac{dX}{dV}} = -\frac{dV}{dQ} = -\frac{A \cdot \alpha \cdot Q^{\alpha-1} \cdot V^{1-\alpha}}{A \cdot (1-\alpha) \cdot Q^\alpha \cdot V^{-\alpha}} = -\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{V}{Q}$$

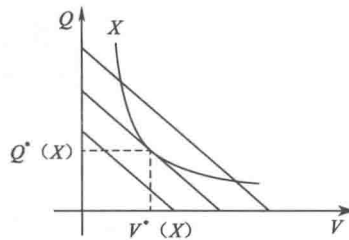


图 1-3 Cobb-Douglas 生产技术函数图

进一步地，根据替代弹性的定义并用 σ 表示替代弹性，则有：

$$\sigma = \frac{\frac{\frac{\Delta V}{V}}{\frac{\Delta Q}{Q}}}{\frac{\Delta TRS}{TRS}} = \frac{\frac{\frac{\Delta V}{V}}{\frac{\Delta Q}{Q}}}{\frac{-\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{\Delta V}{Q}}{-\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{V}{Q}}} = \frac{\frac{\Delta V}{V}}{\frac{\Delta V}{V}} = 1$$

因此，Cobb-Douglas 生产技术的替代弹性为 1，亦即一种投入变动一个百分比则另一种投入也变动同样的百分比。

令 PX 表示生产价格或单位生产成本，Cobb-Douglas 生产技术的解可以从利润最大化问题求出：

$$\begin{aligned} \text{Max } \pi &= PX \cdot X - PQ \cdot Q - PV \cdot V \\ \text{Subject to } X &= A \cdot Q^\alpha \cdot V^{(1-\alpha)} \end{aligned}$$

该问题的最优解分别是:

$$Q = \alpha \cdot \frac{PX \cdot X}{PQ}$$

和

$$V = (1-\alpha) \cdot \frac{PX \cdot X}{PV}$$

将这些解代入原生产函数方程中得:

$$\begin{aligned} X &= A \cdot Q^\alpha \cdot V^{1-\alpha} = A \cdot \left(\alpha \cdot \frac{PX \cdot X}{PQ} \right)^\alpha \cdot \left((1-\alpha) \cdot \frac{PX \cdot X}{PV} \right)^{1-\alpha} \\ &= A \cdot PX \cdot X \cdot \alpha^\alpha \cdot PQ^{-\alpha} \cdot (1-\alpha)^{1-\alpha} \cdot PV^{\alpha-1} \end{aligned}$$

则 Cobb-Douglas 单位成本函数有如下的形式:

$$PX = \frac{(1-\alpha)^{\alpha-1}}{\alpha^\alpha} \cdot A^{-1} \cdot PQ^\alpha \cdot PV^{1-\alpha}$$

或者 Cobb-Douglas 成本函数为:

$$C(X) = PX \cdot X = \frac{(1-\alpha)^{\alpha-1}}{\alpha^\alpha} \cdot A^{-1} \cdot PQ^\alpha \cdot PV^{1-\alpha} \cdot X$$

(三) CES 生产技术

CES 生产技术描述生产投入的可替代的一般情形, 即生产的各项投入间可以有不同程度的相互替代可能。在规模收益不变假设条件下, 一个典型的 CES 生产技术函数有如下形式:

$$X = A \cdot (\alpha_Q \cdot Q^\rho + \alpha_V \cdot V^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$$

式中, A 代表技术效率系数, ρ 表示替代系数, α 表示每一项生产投入占产出价值的比重。该生产函数中各项投入之间的替代比率, 亦即图 1-4 中的等产量曲线的曲率, 由技术替代率 TRS 表示, 即:

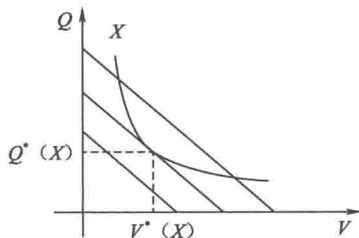


图 1-4 CES 生产技术函数图

$$TRS = -\frac{dV}{dQ} = -\frac{A \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \alpha_Q \cdot \rho \cdot Q^{\rho-1} \cdot (\alpha_Q \cdot Q^\rho + \alpha_V \cdot V^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1}}{A \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \alpha_V \cdot \rho \cdot V^{\rho-1} \cdot (\alpha_Q \cdot Q^\rho + \alpha_V \cdot V^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1}} = -\frac{\alpha_Q}{\alpha_V} \cdot \left(\frac{Q}{V}\right)^{\rho-1} = -\frac{\alpha_Q}{\alpha_V} \cdot \left(\frac{V}{Q}\right)^{1-\rho}$$

或者

$$\frac{V}{Q} = \left(\frac{\alpha_V \cdot TRS}{\alpha_Q} \right)^{\frac{1}{1-\rho}}$$

两边取对数得：

$$\ln\left(\frac{V}{Q}\right) = \frac{1}{1-\rho} \cdot \left(\ln \frac{\alpha_V}{\alpha_Q} + \ln |TRS| \right)$$

进一步地，根据替代弹性的定义并用 σ 表示替代弹性，则有：

$$\sigma = \frac{\frac{\Delta \frac{V}{Q}}{\frac{V}{Q}}}{\frac{\Delta TRS}{TRS}} = \frac{\frac{d \ln\left(\frac{V}{Q}\right)}{d \ln |TRS|}}{\frac{d \ln |TRS|}{d \ln |TRS|}} = \frac{1}{1-\rho} \cdot \frac{d \ln |TRS|}{d \ln |TRS|} = \frac{1}{1-\rho}$$

上式显示，当 $\rho \rightarrow -\infty$ 时， $\sigma = 0$ ，表示无替代情形，即 Leontief 生产技术；当 $\rho = 1$ 时， $\sigma \rightarrow +\infty$ ，表示完全替代情形，即线性生产技术；当 $\rho = 0$ 时， $\sigma = 1$ ，表示 Cobb-Douglas 替代情形；当 ρ 取任何其他值时，即为一般情形的 CES 生产技术。

与 Cobb-Douglas 生产技术的情形类似，CES 生产函数的解也可以从利润最大化问题求出：

$$\text{Max } \pi = PX \cdot X - PQ \cdot Q - PV \cdot V$$

$$\text{Subject to } X = A \cdot (\alpha_Q \cdot Q^\rho + \alpha_V \cdot V^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$$

该问题的最优解分别是：

$$Q = \left(A \cdot \alpha_Q \cdot \frac{PX}{PQ} \right)^{\frac{1}{1-\rho}} \cdot \left(\frac{X}{A} \right)$$

和

$$V = \left(A \cdot \alpha_V \cdot \frac{PX}{PV} \right)^{\frac{1}{1-\rho}} \cdot \left(\frac{X}{A} \right)$$

将这些解代入原生产函数方程中得：

$$\begin{aligned} X &= A \cdot (\alpha_Q \cdot Q^\rho + \alpha_V \cdot V^\rho)^{\frac{1}{\rho}} \\ &= A \cdot \left(\alpha_U \cdot \left(A \cdot \alpha_U \cdot \frac{PX}{PU} \right)^{\frac{1}{1-\rho}} \cdot \left(\frac{X}{A} \right)^\rho + \alpha_V \cdot \left(A \cdot \alpha_V \cdot \frac{PX}{PV} \right)^{\frac{1}{1-\rho}} \cdot \left(\frac{X}{A} \right)^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}} \\ &= A^{\frac{1}{1-\rho}} \cdot PX^{\frac{1}{1-\rho}} \cdot X \cdot \left(\alpha_U^{\frac{1}{1-\rho}} \cdot PU^{-\frac{\rho}{1-\rho}} + \alpha_V^{\frac{1}{1-\rho}} \cdot PV^{-\frac{\rho}{1-\rho}} \right)^{\frac{1}{\rho}} \end{aligned}$$

从 $\sigma = \frac{1}{1-\rho}$ 知， $1-\sigma = \frac{-\rho}{1-\rho} = \frac{\rho}{\rho-1}$ 且 $\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma}{\sigma-1}$ ，于是上式可变成：

$$PX = A^{-1} \cdot (\alpha_Q^\sigma \cdot PQ^{1-\sigma} + \alpha_V^\sigma \cdot PV^{1-\sigma})^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

即 CES 单位成本函数。而 CES 成本函数为：

$$C(X) = PX \cdot X = A^{-1} \cdot (\alpha_Q^\sigma \cdot PQ^{1-\sigma} + \alpha_V^\sigma \cdot PV^{1-\sigma})^{\frac{1}{1-\sigma}} \cdot X$$

四、效用偏好

CGE 模型中使用的效用函数形式很多，但常用的基本就是 Cobb-Douglas、CES 和 Stone-Geary 这三种，也有 Leontief 和其他线性效用函数等，但不常用。由于本书没有用到 Stone-Geary 效用函数，这里仅介绍 Cobb-Douglas 和 CES 两种效用函数。此外，对于动态模型来说，还有 CEIS (Constant Elasticity of Intertemporal Substitution)，即不变跨期替代弹性效用函数。

(一) Cobb-Douglas 效用函数

Cobb-Douglas 效用函数描述效用偏好的一种可部分替代情形，即消费需求间存在一定程度的相互替代的可能。在规模效用不变假设条件下，一个典型的 Cobb-Douglas 效用函数有如下形式：

$$U = A \cdot FD_1^\alpha \cdot FD_2^{1-\alpha}$$

式中， A 代表效用度量系数，可以设置为 1，否则可以将效用的价格设置为 1， α 表示替代系数。令 Y 表示总收入水平，Cobb-Douglas 效用函数的解可以从效用最大化问题求出：

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & U = A \cdot FD_1^\alpha \cdot FD_2^{1-\alpha} \\ \text{Subject to} \quad & Y = P_1 \cdot FD_1 + P_2 \cdot FD_2 \end{aligned}$$

该问题求解得马歇尔 (Marshallian) 需求方程，表示在既定的价格和收入水平下为实现最大效用所需要的商品需求水平：

$$FD_1 = \alpha \cdot \frac{Y}{P_1}$$