Chinese Research on Elementary Mathematics No. 8 2017

中国初等数学研究

Chinese Research on Elementary Mathematics

主编 杨学枝

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

hinese Research on Elementary Mathematics No. 8 2017

中国初等数学研究

Chinese Research on Elementary Mathematics

主编 杨学枝

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书为《中国初等数学研究》的第八辑，旨在汇聚交流大、中、小学数学教育教学和初等数学研究最新成果，提高我国初等数学研究水平，促进我国初等数学研究事业的发展.

本书适合大、中学师生阅读，也可供数学爱好者参考研读.

图书在版编目(CIP)数据

中国初等数学研究. 第八辑/杨学枝主编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2017.1

ISBN 978-7-5603-6378-3

Ⅰ.①中… Ⅱ.①杨… Ⅲ.①初等数学-文集
Ⅳ.①O12-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 303009 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　王勇钢
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　880mm×1230mm　1/16　印张 10.5　字数 340 千字
版　　次　2017 年 1 月第 1 版　2017 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-6378-3
定　　价　98.00 元

中国初等數學研究

陳省身

1995年5月20日

已故国际著名数学大师陈省身先生生前为本文集所题写的书名

《中国初等数学研究》第三届编辑委员会

目　录

· 专题研究

· 问题探究

· 初数小课题研究

· 数学教育

· 初数研究新成果

· **高等数学在初等数学中的应用**

大定理中的小技巧
——从一道全国及各省市数学竞赛试题谈起

刘培杰　陈　明

(1.哈尔滨工业大学出版社　黑龙江哈尔滨　150006;
2.哈尔滨市第四中学　黑龙江哈尔滨　150000)

§0　引　言

1978 年举办的全国及各省市中学生数学竞赛堪称中国历史上最隆重、最豪华的一次数学竞赛盛事,其影响之深远令人难忘.据当年官方媒体介绍:

1978 年 4 月中旬,国务院批准全国和北京、上海、天津、陕西、安徽、四川、辽宁、广东八省市举办中学数学竞赛(以下简称"竞赛"),由前中共中央政治局委员、国务院副总理、全国数学竞赛委员会名誉主任方毅同志担任全国数学竞赛委员会名誉主任,中国科学院副院长、中国数学会理事长华罗庚同志担任主任.4 月 25 日召开了全国数学竞赛委员会第一次会议,确定了命题原则、竞赛方法和推荐成绩优异的学生免试进入大学的办法.在各级领导的重视和关怀下,科技界、教育界协同努力,八个省市普遍自下而上举行地区、省、市预、复赛.二十万以上的在校青少年参加竞赛.按照计划,京、沪、川各遴选 50 名,其他五省市各 40 名,共 350 名代表参加全国的竞赛.全国竞赛的题目,是由中国数学会、中国科学院数学所、应用数学办公室的数学家,各省市经验丰富的中老年教师共 13 人组成的命题组拟定的.他们从 5 月 8 日起,集中于北京香山,在华罗庚同志亲自参与下,用 10 天的时间,紧张认真地提出了近 100 百个题目,从其中选定了 16 道题,第一试 10 题,第二试 6 题.这些题目既不超过学生学过的范围,又有一定的水平,难而不怪不偏,高而可攀.5 月 21 日八省市在同一时间,分别进行 2 场共 5 小时的竞赛.第一场试题主要考察学生掌握数学基础知识的情况,第二场试题主要考察学生灵活运用数学知识解题的能力.

参加决赛的青少年,年龄最大的 19 岁,最小的只有 14 岁,多数是高中学生,但也有少数学习成绩优异、预赛入选的初中学生.参加决赛的选手,大多数是三好学生.他们中有的不仅很好地完成了学校的课程,还在课余攻读了不少数学基础理论书籍.

"竞赛"的答卷,由全国数学竞赛委员会认真负责地反复审阅.最后评定,得一等奖共 5 名.他们是:李骏(上海鲁迅中学)、严勇(北京四十二中)、胡波(北京北大附中)、王丰(广州九十五中)和曹孟麟(广东广州五十七中).

主持这次数学竞赛的教育部和全国科协于 1978 年 6 月 19 日在北京举行了全国中学数学竞赛优胜者发奖大会.前中共中央政治局委员、国务院副总理、全国数学竞赛委员会名誉主任方毅同志参加了这个大会,并给 57 名优胜者颁发奖品,会后接见了前五名优胜者.

参加大会的有于光远、童第周、严济慈、华罗庚、周培源、茅以升、黄家驷、裴丽生、高士其、雍文涛、李琦、刘仲候、孙俊人和白介夫等国家科委、中国科学院、全国科协、教育部和有关部门的负责人.美籍数学家陈省身也应邀参加了发奖大会.

§1　试题背景

由于有华罗庚先生、苏步青先生等大数学家亲自参与,所以此次竞赛试题尽管难度不大(今天看来),但许多试题构思巧妙且背景深刻.比如据华罗庚教授介绍,此次竞赛的第二试第 2(2) 题背景为下列一般问题:求整数$a_0,a_1,\cdots,a_n$,使三角多项式

$$a_0+a_1\cos\varphi+\cdots+a_n\cos n\varphi\geqslant 0\quad(\text{对一切 }\varphi)$$

且适合

$$0 < a_0 < a_1, a_2 \geqslant 0, \cdots, a_n \geqslant 0$$

并使

$$a = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{2\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_0}\right)^2}$$

最小,并求这最小值.

华先生觉得这个问题太难,所以给出了几个特例.

命题 1 (1) $n=2$ 时,则有

$$3 + 4\cos\varphi + \cos 2\varphi = 3 + 4\cos\varphi + 2\cos^2\varphi - 1 = 2\left(1+\cos\varphi\right)^2 \geqslant 0$$

$$a = \frac{4+1}{2\left(2-\sqrt{3}\right)^2} = \frac{35}{2} + 10\sqrt{3} = 34.82$$

(2) $n=3$ 时,则有

$$\begin{aligned} & 5 + 8\cos\varphi + 4\cos 2\varphi + \cos 3\varphi \\ = & 5 + 8\cos\varphi + 4(2\cos^2\varphi - 1) + 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi \\ = & 4\cos^3\varphi + 8\cos^2\varphi + 5\cos\varphi + 1 \\ = & (\cos\varphi + 1)(2\cos\varphi + 1)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$a = \frac{8+4+1}{2\left(\sqrt{8}-\sqrt{5}\right)^2} = \frac{169}{18} + \frac{26}{9}\sqrt{10} = 18.52$$

(3) $n=4$ 时,则有

$$\begin{aligned} & 18 + 30\cos\varphi + 17\cos 2\varphi + 6\cos 3\varphi + \cos 4\varphi \\ = & 18 + 30\cos\varphi + 17(2\cos^2\varphi - 1) + 6(4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi) + (8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1) \\ = & 8\cos^4\varphi + 24\cos^3\varphi + 26\cos^2\varphi + 12\cos\varphi + 2 \\ = & 2\left[(4\cos^4\varphi + 4\cos^3\varphi + \cos^2\varphi) + (8\cos^3\varphi + 8\cos^2\varphi + 2\cos\varphi) + (4\cos^2\varphi + 4\cos\varphi + 1)\right] \\ = & 2(\cos\varphi + 1)^2(2\cos\varphi + 1)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$a = \frac{30+17+6+1}{2\left(\sqrt{30}-\sqrt{18}\right)^2} = 9 + \frac{27}{12}\sqrt{15} = 17.71$$

华先生指出命题 1 中(1),(2) 被用于素数定理的证明,(3) 被用于某些素数函数的上界估计中.

§2 命题 1 在素数定理证明中的应用

关于黎曼 ζ 函数 $\zeta(s)$ 有一个极其重要的性质:

定理 1 在直线 $\sigma=1$ 上 $\zeta(s)$ 没有零点,即

$$\zeta(1+\mathrm{i}t) \neq 0 \quad (-\infty < t < +\infty) \tag{1}$$

这是利用 ζ 函数来证明素数定理的关键. 它的证明是利用 $\zeta(s)$ 的无穷乘积及命题 1,对任意实数 θ,有

$$3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta = 2\left(1+\cos\theta\right)^2 \geqslant 0 \tag{2}$$

证明 由

$$\ln\zeta(s) = -\sum_p \ln\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \quad (\sigma > 1)$$

及

$$\ln(1-z) = -\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{z^m}{m} \quad (|z| < 1)$$

得

$$\ln\zeta(s) = \sum_p \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m\,p^{ms}} \quad (\sigma > 1) \tag{3}$$

两端取实部,得

$$\ln\left|\zeta(\sigma+\mathrm{i}t)\right| = \sum_p \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\cos(mt\ln p)}{m\,p^{m\sigma}} \quad (\sigma > 1) \tag{4}$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
& 3\ln \zeta(\sigma)+4\ln|\zeta(\sigma+it)|+\ln|\zeta(\sigma+2it)| \\
= & \sum_{p}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m\,p^{m\sigma}}\{3+4\cos(mt\ln p)+\cos(2mt\ln p)\}\geqslant 0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

最后一步用到了不等式(2).因而有

$$\zeta^{3}(\sigma)\,|\zeta(\sigma+\mathrm{i}t)|^{4}\,|\zeta(\sigma+2\mathrm{i}t)|\geqslant 1\quad(\sigma>1)\tag{6}$$

若式(1)不成立,则必有一$t_0\neq 0$使

$$\zeta(1+\mathrm{i}t_0)=0$$

在式(6)中取$t=t_0$,并改写为

$$((\sigma-1)\zeta(\sigma))^{3}\left|\frac{\zeta(\sigma+\mathrm{i}t_0)}{\sigma-1}\right|^{4}|\zeta(\sigma+2\mathrm{i}t_0)|\geqslant\frac{1}{\sigma-1}\quad(\sigma>1)\tag{7}$$

由

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\gamma+O(|s-1|)$$

知

$$\lim_{\sigma\to 1^{+}}(\sigma-1)\zeta(\sigma)=1$$

由“定理:$\zeta(s)$可以解析开拓到半平面$\sigma>0$,$s=1$是它的一级极点,留数为1.”知$\zeta(s)$在$1+\mathrm{i}t_0(t_0\neq 0)$解析,因此

$$\lim_{\sigma\to 1^{+}}\frac{\zeta(\sigma+\mathrm{i}t_0)}{\sigma-1}=\zeta'(1+\mathrm{i}t_0)$$

由以上两式知,式(7)的左端当$\sigma\to 1^{+}$时趋于极限

$$|\zeta'(1+\mathrm{i}t_0)|^{4}|\zeta(1+2\mathrm{i}t_0)|$$

这是一有限数,而式(7)的右端当$\sigma\to 1^{+}$时趋于无穷,这一矛盾就证明了定理.

§3 推广到一般

下面我们将试题推广至一般情形,为此我们需要几个引理.

引理1 证明

$$\frac{1}{2}+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

证明 左边是

$$-\frac{1}{2}+(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}+\cdots+\mathrm{e}^{n\mathrm{i}\theta})$$

的实部.括号中的项是等比数列之和,等于

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1}=\frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}-1)\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\theta}{2}}}{2\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}}$$

实部是

$$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{2}$$

现在立即推出结果.

引理2 证明

$$\cos\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos(2n-1)\theta=\frac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta}$$

证明　由引理1

$$\frac{1}{2}+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos 2n\theta=\frac{\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

与

$$\frac{1}{2}+\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cdots+\cos 2n\theta=\frac{\sin(2n+1)\theta}{2\sin\theta}$$

首先分别用 $2n$ 代替 n，2θ 代替 θ，相减给出

$$\cos\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos(2n-1)\theta=\frac{\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}-\frac{\sin(2n+1)\theta}{2\sin\theta}$$

由于

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

从而上式等于

$$\frac{2\cos\frac{\theta}{2}\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\theta-\sin(2n+1)\theta}{4\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

因为

$$\sin(2n+1)\theta=\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\theta\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\cos\left(2n+\frac{1}{2}\right)\theta$$

所以我们导出所研究的表示式是

$$\frac{\cos\frac{\theta}{2}\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\theta-\sin\frac{\theta}{2}\cos\left(2n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\theta}=\frac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta}$$

这正是所要求的结果.

引理3　证明

$$1+\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin 5\theta}{\sin\theta}+\cdots+\frac{\sin(2n-1)\theta}{\sin\theta}=\left(\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right)^2$$

证明　我们对 n 用归纳法证明上式. 当 $n=1$ 时这是显然的. 假设它对 $n\leqslant m$ 成立，我们只需证明当 $n=m+1$ 时它也成立. 在简单的计算后，只需证明

$$\sin^2(n+1)\theta=\sin^2 n\theta+\sin(2n+1)\theta\sin\theta$$

或者等价地证明

$$(\sin(n+1)\theta-\sin n\theta)(\sin(n+1)\theta+\sin n\theta)=\sin(2n+1)\theta\sin\theta$$

利用

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

与

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

我们发现只需证明

$$4\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\sin\frac{\theta}{2}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\cos\frac{\theta}{2}=\sin(2n+1)\theta\sin\theta$$

但是，左边是

$$\sin 2\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\sin\theta$$

这正是所要求的结果.

现在我们可以将其推广至

一般情形　对所有的整数 $m \geqslant 0$,有

$$(2m+1)+2\sum_{j=0}^{2m-1}(j+1)\cos\,(2m-j)\theta=\left[\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right]^2$$

证明　我们只需证明

$$2m+1+2\sum_{j=1}^{2m}(2m-j+1)\cos j\theta=\left[\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right]^2$$

把 θ 变为 2φ,我们只需证明

$$2m+1+2\sum_{j=1}^{2m}(2m-j+1)\cos 2j\varphi=\left[\frac{\sin(2m+1)\varphi}{\sin\varphi}\right]^2$$

由引理 1,我们知道

$$\frac{1}{2}+\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cdots+\cos 2n\theta=\frac{\sin(2n+1)\theta}{2\sin\theta}$$

即

$$1+2\sum_{j=1}^{n}\cos 2j\varphi=\frac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin\varphi}$$

两边对 $0\leqslant n\leqslant 2m$ 求和,我们得出

$$(2m+1)+2\sum_{n=0}^{2m}\sum_{j=1}^{n}\cos 2j\varphi=\sum_{n=0}^{2m}\frac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin\varphi}$$

左边是

$$(2m+1)+2\sum_{j=1}^{2m}\cos 2j\varphi\sum_{j\leqslant n\leqslant 2m}1=(2m+1)+2\sum_{j=1}^{2m}(2m-j+1)\cos 2j\varphi$$

由引理 3,右边是

$$\left[\frac{\sin(2m+1)\varphi}{\sin\varphi}\right]^2$$

这正是所要求的结果.

§4　Kumar Murty 定理

在解析数论中还有一个较重要的结论是由 Kumar Murty 得到的,姑且称之为 Kumar Murty 定理.

Kumar Murty 定理　令 $f(s)$ 是复值函数,满足:

(1)f 在 $\mathrm{Re}(s)>1$ 中是全纯的,并且不为零;

(2)$\log f(s)$ 可以写成 Dirichlet 级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{n^s}$$

其中对 $\mathrm{Re}(s)>1$,有$b_n\geqslant 0$;

(3) 在直线 $\mathrm{Re}(s)=1$ 上,除在 $s=1$ 上 $\mathrm{e}\geqslant 0$ 阶的极点以外,f 是全纯的.

若 f 在直线 $\mathrm{Re}(s)=1$ 上有一零点,证明:零点的阶数以$\frac{\mathrm{e}}{2}$ 为界.

这个定理的证明也需要几个引理.

引理 4　对 $\sigma>1,t\in\mathbf{R}$,有

$$\mathrm{Re}(\log\zeta(\sigma+\mathrm{i}t))=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^\sigma\log n}\cos\,(t\log n)$$

证明 由题可知

$$\log \zeta(s) = -\sum_p \log\left(1-\frac{1}{p^s}\right) = \sum_p \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\,p^{ks}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma \log n}\{\cos\ (t\log n) - \mathrm{i}\sin(t\log n)\}$$

由此推出结果.

引理 5 对 $\sigma > 1, t \in \mathbf{R}$,有

$$\mathrm{Re}(3\log \zeta(\sigma) + 4\log \zeta(\sigma+\mathrm{i}t) + \log \zeta(\sigma+2\mathrm{i}t)) \geqslant 0$$

证明 由引理 4,我们看出不等式的左边是

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma \log n}\{3 + 4\cos\ (t\log n) + \cos\ (2t\log n)\}$$

由命题 1

$$3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta = 2\ (1+\cos\theta)^2 \geqslant 0$$

所以现在立即推出结果.

引理 6 对 $\sigma > 1, t \in \mathbf{R}$,有

$$|\zeta\ (\sigma)^3 \zeta\ (\sigma+\mathrm{i}t)^4 \zeta(\sigma+2\mathrm{i}t)| \geqslant 1$$

由定理 1,对任一 $t \in \mathbf{R}, t \neq 0$,有 $\zeta(1+\mathrm{i}t) \neq 0$. 用类似的方法,考虑到

$$\zeta\ (\sigma)^3 L\ (\sigma,\chi)^4 L(\sigma,\chi^2)$$

对非实数χ,推导 $L(1,\chi) \neq 0$.

证明 由引理 4 与引理 5,我们得出

$$|\zeta\ (\sigma)^3 \zeta\ (\sigma+\mathrm{i}t)^4 \zeta(\sigma+2\mathrm{i}t)| \geqslant 1$$

现在我们知道

$$\lim_{\sigma\to 1^+} (\sigma-1)\,\zeta(\sigma) = 1$$

设 $\zeta(s)$ 在 $s = 1+\mathrm{i}t, t\neq 0$ 上有 m 阶零点,则

$$\lim_{\sigma\to 1^+} \frac{\zeta(\sigma+\mathrm{i}t)}{(\sigma-1)^m} = c \neq 0$$

因此

$$|(\sigma-1)^3 \zeta\ (\sigma)^3\ (\sigma-1)^{-4m} \zeta\ (\sigma+\mathrm{i}t)^4 \zeta(\sigma+2\mathrm{i}t)| \geqslant (\sigma-1)^{3-4m}$$

令 $\sigma \to 1^+$ 给出左边的有限极限,当 $m \geqslant 1$ 时右边无穷大. 所以对 $t \in \mathbf{R}, t\neq 0$,有 $\zeta(1+\mathrm{i}t) \neq 0$. 若$\chi^2 \neq \chi_0$,其中$\chi_0$ 是主特征标(mod q),则

$$\log L(\sigma,\chi) = \sum_p \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{\chi\ (p)^\nu}{p^{\sigma\nu}\nu} \quad (\sigma > 1)$$

并且对χ^2 是类似的. 注意,若$\chi(p) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\theta_p}$,则$\chi^2(p) = \mathrm{e}^{4\pi\mathrm{i}\theta_p}$. 利用命题 1

$$3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta \geqslant 0$$

与引理 4,其中 $t = 0$,我们取实部就得出

$$3\log \zeta(\sigma) + 4\mathrm{Re}(\log L(\sigma,\chi)) + \mathrm{Re}(\log L(\sigma,\chi^2)) \geqslant 0$$

这给出

$$|\zeta\ (\sigma)^3 L\ (\sigma,\chi)^4 L(\sigma,\chi^2)| \geqslant 1$$

与上述类似. 若 $L(1,\chi) = 0$,则得出 $L\ (\sigma,\chi)^4$ 的 4 阶极点,而 $\zeta\ (\sigma)^3$ 给出 3 阶极点. 但是,$L(\sigma,\chi^2)$ 在 $s=1$ 上无极点,因为χ^2 不是主特征标.

由以上几个引理我们就可证明 Kumar Murty 定理.

证明 设 f 在 $1+\mathrm{i}t_0$ 上有 $k > \frac{\mathrm{e}}{2}$ 阶零点,则 $\mathrm{e} \leqslant 2k-1$. 考虑函数

$$g(s) = f\ (s)^{2k+1} \prod_{j=1}^{2k} f\ (s+\mathrm{i}j\,t_0)^{2(2k+1-j)} = f\ (s)^{2k+1} f\ (s+\mathrm{i}t_0)^{4k} f\ (s+2\mathrm{i}t_0)^{4k-2} \cdots f\ (s+2k\mathrm{i}t_0)^2$$

则 g 对 $\operatorname{Re}(s) > 1$ 是全纯的，且至少在 $s=1$ 上一阶零点为零，因为

$$4k^2-(2k+1)\mathrm{e} \geqslant 4k^2-(2k+1)(2k-1)=1$$

但是对 $\operatorname{Re}(s) > 1$

$$\log g(s)=\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n^s}\left(2k+1+2\sum_{j=1}^{2k} 2(2k+1-j) n^{-\mathrm{i}jt_0}\right)$$

令 $\theta=t_0 \log n$，则对 $s=\sigma>1$，有

$$\operatorname{Re}(\log g(\sigma))=\log |g(\sigma)|=\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n^\sigma}\left(2k+1+2\sum_{j=1}^{2k} 2(2k+1-j) \cos j\theta\right)$$

由一般情形，括号中的数量大于或等于 0. 因此

$$|g(\sigma)| \geqslant 1$$

令 $\sigma \rightarrow 1^+$，得出矛盾，因为 $g(1)=0$.

至此，我们对华罗庚先生的介绍也进行了完全的解读.

关于无迹方阵积和式项数问题的研究

程　静

内容简介　本文讨论了一种特殊矩阵，即无迹方阵和首 1 无迹方阵的研究，并给出了它们积和式项数的计数公式及相关的推论……

关键词　无迹方阵，行列式，积和式，首 1 无迹方阵，代数余子式

行列式起源于解线性方程组，早在 1678 年，Leibniz 就用它来解简单的二元一次方程组和三元一次方程组. 后来，Maclaurin 正式提出了行列式概念，Cramer 在他的名著《线性代数分析导言》中第一次给出了线性方程组的 Cramer 法则. 之后不久，Bezout 做了一系列改进，他把行列式每一项的符号手续系统化了，这就是当今行列式的雏形. 几乎在同一时候，Vandermonde 将行列式从线性方程组的研究中分离出来，把它作为代数实体而加以研究，是他提出了余子式概念，并成功地将高阶行列式展开了，从这个意义上讲，Vandermonde 算得上行列式奠基人. 被誉为法国"Newton"的 Laplace 在他的《对积分和世界体系的探讨》和《天体力学》中推广了 Vandermonde 的做法，从而为系统研究这门学科奠定了坚实的理论基础，使其在欧洲大陆迅速流行开来. 之后 Scherk 在他的《数学论文》中补充了行列式的几个新性质，并建立了行列式相加和数乘法则，而 Sylverser 终其一生，对行列式做了大量的研究，同样功不可没. 几乎同一时期，英国科学家 Cayley 首次提出了矩阵概念，这样矩阵这门学科就诞生了，奇怪的是，矩阵的概念按道理讲，应该是先于行列式的概念，而在历史上出现的次序正相反，这就是为什么 Cayley 在引进矩阵的时候它的基本性质就已经清楚了的原因. 因此，当数学家们预言矩阵概念可能有用时，有一个普遍的印象是错误的，即矩阵是纯数学家们发明的、有高度创见的产物，是一种地地道道的速记方式，又能起到什么用呢？可事实上证明不是那么回事，在自然科学和社会科学中人们到处可以见到它的身姿，并且处处留芳，可见其作用是巨大的.

近年来，矩阵理论还为研究种类繁多的组合问题提供了有效的解决途径，一个组合问题常常可以转化为某种特殊的矩阵问题；而某些矩阵的性质，也往往给出某个组合问题的解答，它们相得益彰，互相促进，相互渗透，这种局面不仅客观上扩展彼此的应用范围，而且使得这两方面的研究工作朝着纵深方向发展.

大家知道，矩阵的积和式不论在矩阵分析还是组合分析中，都是一个很重要的概念，那么，何谓矩阵的"积和式"呢？

设有一矩阵

$$\mathbf{A}_{m,n}=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & \cdots & a_{3,n} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & \cdots & a_{4,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & a_{m,4} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}_{m,n} \tag{1}$$

则定义 $Per\ \mathbf{A}:=\sum\limits_{i_1 i_2\cdots i_m\in P_n^m} a_{1,i_1}a_{2,i_2}\cdots a_{m,i_m}$ 为矩阵 $\mathbf{A}_{m,n}$ 的积和式，这里，和式遍取集$[1,n]$的所有 $m-$无重排列. 而将 $\det \mathbf{A}_{m,n}=\sum\limits_{i_1 i_2\cdots i_n\in P_n^m}(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_n}a_{1,i_1}a_{2,i_2}\cdots a_{m,i_m}$ 定义为矩阵$\mathbf{A}_{m,n}$的行列式，可见，矩阵的积和式和它的行列式在定义上非常相似，似乎还要简单些，其实不然，行列式有着一些优秀的性质使得其计算变得比较容易，但对于积和式，这些性质不复存在了，因而它的计算将会变得非常烦琐. 众所周知，人们在数学研究过程中，遵循从一般到特殊和从特殊到一般的两种可逆途径，这里我们将采用第二种途径来研究一类特殊方阵，在研究这种方阵前，先给出方阵 $\mathbf{A}_{n,n}$ 的积和式的项数为 $\pi(Per\ \mathbf{A}_{n,n})$，根据这个定义，于是有下列引理：

引理 1 设 $\pi(Per\,\mathbf{A}_{n,n})=r$，$\pi(Per\,\mathbf{A}_{m,m})=s$，则有

$$\pi(Per\,\mathbf{A}_{n,n})+\pi(Per\,\mathbf{A}_{m,m})=r+s$$

$$\pi(Per\,\mathbf{A}_{n,n})\times\pi(Per\,\mathbf{A}_{m,m})=rs$$

引理 1 的证明是很简单的，这里我们不打算写出该引理的证明过程. 现在我们手头已经有了上述引理 1 后，再来定义 n 阶无迹方阵和 n 阶首 1 无迹方阵，然后讨论它的计数问题.

在矩阵分析中，我们将以下形式的方阵 $\mathbf{A}_{n,n}$

$$\mathbf{A}_{n,n}=\begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 0 & a_{3,4} & \cdots & a_{3,n} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & 0 & \cdots & a_{4,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & a_{n,4} & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n,n}$$

$$(n\geqslant 2,a_{i,j}\text{ 互异且 }a_{i,j}\neq 0)$$

定义为 n 阶无迹方阵，把另一形如方阵 $\mathbf{B}_{n,n}$

$$\mathbf{B}_{n,n}=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 0 & a_{3,4} & \cdots & a_{3,n} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & 0 & \cdots & a_{4,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & a_{n,4} & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n,n}$$

$$(n\geqslant 2,a_{i,j}\text{ 互异且 }a_{i,j}\neq 0)$$

的方阵定义为 n 阶首 1 无迹方阵，并用 $\pi(Per\,\mathbf{A}_{n,n})$ 来表示无迹方阵积和式 $Per\,\mathbf{A}_{n,n}$ 的项数，用 $\pi(Per\,\mathbf{B}_{n,n})$ 来表示首 1 无迹方阵积和式 $Per\,\mathbf{B}_{n,n}$ 的项数，于是就有：

性质 1 两个同阶无迹方阵之和为无迹方阵，两个首 1 无迹方阵之和为首 1 无迹方阵.

性质 2 两个同阶无迹方阵之积为无迹方阵，两个首 1 无迹方阵之积为首 1 无迹方阵.

和下面的定理：

定理 1

$$\begin{cases}\pi(Per\,\mathbf{A}_{n,n})=(n-1)\pi(Per\,\mathbf{B}_{n-1,n-1}) \\ \pi(Per\,\mathbf{B}_{n-1,n-1})=\pi(Per\,\mathbf{A}_{n-2,n-2})+(n-2)\pi(Per\,\mathbf{B}_{n-2,n-2})\end{cases}\tag{2}$$

其中，$\pi(Per\,\mathbf{B}_{2,2})=1$，$\pi(Per\,\mathbf{A}_{2,2})=1$，$\pi(Per\,\mathbf{A}_{3,3})=2$.

证明 将 $\mathbf{A}_{n,n}$ 的积和式 $Per\,\mathbf{A}_{n,n}$ 按代数余子式展开后，取其项数得

$$\pi(Per\,\mathbf{A}_{n,n})=\pi\left(Per\begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 0 & a_{3,4} & \cdots & a_{3,n} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & 0 & \cdots & a_{4,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & a_{n,4} & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n,n}\right)$$

$$=\pi\left\{a_{1,2}Per\begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,4} & a_{3,5} & \cdots & a_{3,n} \\ a_{4,1} & a_{4,3} & 0 & a_{4,5} & \cdots & a_{4,n} \\ a_{5,1} & a_{5,3} & a_{5,4} & 0 & \cdots & a_{5,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,3} & a_{n,4} & a_{n,5} & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n-1,n-1}+a_{1,3}Per\begin{pmatrix} a_{2,1} & 0 & a_{2,4} & a_{2,5} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,4} & a_{3,5} & \cdots & a_{3,n} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & 0 & a_{4,5} & \cdots & a_{4,n} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,4} & 0 & \cdots & a_{5,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,4} & a_{n,5} & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n-1,n-1}+\right.$$

$$\underbrace{a_{1,4} Per\begin{pmatrix} a_{2,1} & 0 & a_{2,3} & a_{2,5} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 0 & a_{3,5} & \cdots & a_{3,n} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,5} & \cdots & a_{4,n} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & 0 & \cdots & a_{5,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & a_{n,5} & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n-1,n-1} + \cdots + a_{1,n} Per\begin{pmatrix} a_{2,1} & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 0 & a_{3,4} & \cdots & a_{3,n-1} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & 0 & \cdots & a_{4,n-1} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & \cdots & a_{5,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & a_{n,4} & \cdots & a_{n,n-1} \end{pmatrix}_{n-1,n-1} \Bigg\}}_{n-1} \tag{3}$$

反复利用引理 1 将式(3) 化简后得

$$\pi(Per\,\mathbf{A}_{n,n}) = a_{1,2}\pi\left(Per\begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,4} & a_{3,5} & \cdots & a_{3,n} \\ a_{4,1} & a_{4,3} & 0 & a_{4,5} & \cdots & a_{4,n} \\ a_{5,1} & a_{5,3} & a_{5,4} & 0 & \cdots & a_{5,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,3} & a_{n,4} & a_{n,5} & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n-1,n-1}\right) + a_{1,3}\pi\left(Per\begin{pmatrix} a_{2,1} & 0 & a_{2,4} & a_{2,5} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,4} & a_{3,5} & \cdots & a_{3,n} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & 0 & a_{4,5} & \cdots & a_{4,n} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,4} & 0 & \cdots & a_{5,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,4} & a_{n,5} & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n-1,n-1}\right) +$$

$$\underbrace{a_{1,4}\pi\left(Per\begin{pmatrix} a_{2,1} & 0 & a_{2,3} & a_{2,5} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 0 & a_{3,5} & \cdots & a_{3,n} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,5} & \cdots & a_{4,n} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & 0 & \cdots & a_{5,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & a_{n,5} & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n-1,n-1}\right) + \cdots + a_{1,n}\pi\left(Per\begin{pmatrix} a_{2,1} & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 0 & a_{3,4} & \cdots & a_{3,n-1} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & 0 & \cdots & a_{4,n-1} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & \cdots & a_{5,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & a_{n,4} & \cdots & a_{n,n-1} \end{pmatrix}_{n-1,n-1}\right)}_{n-1}$$

$$= \underbrace{a_{1,2}\pi\left(Per\begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,4} & a_{3,5} & \cdots & a_{3,n} \\ a_{4,1} & a_{4,3} & 0 & a_{4,5} & \cdots & a_{4,n} \\ a_{5,1} & a_{5,3} & a_{5,4} & 0 & \cdots & a_{5,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,3} & a_{n,4} & a_{n,5} & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n-1,n-1}\right)}_{n-1}$$

$$= \underbrace{\pi\left(a_{1,2} Per\begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,4} & a_{3,5} & \cdots & a_{3,n} \\ a_{4,1} & a_{4,3} & 0 & a_{4,5} & \cdots & a_{4,n} \\ a_{5,1} & a_{5,3} & a_{5,4} & 0 & \cdots & a_{5,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,3} & a_{n,4} & a_{n,5} & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n-1,n-1}\right)}_{n-1}$$

$$= (n-1)\pi\left(Per\begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,4} & a_{3,5} & \cdots & a_{3,n} \\ a_{4,1} & a_{4,3} & 0 & a_{4,5} & \cdots & a_{4,n} \\ a_{5,1} & a_{5,3} & a_{5,4} & 0 & \cdots & a_{5,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,3} & a_{n,4} & a_{n,5} & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n-1,n-1}\right)$$

$$= (n-1)\pi(Per\,\mathbf{B}_{n-1,n-1}) \tag{4}$$

即

$$\pi(Per\,\mathbf{A}_{n,n}) = (n-1)\pi(Per\,\mathbf{B}_{n-1,n-1}) \tag{5}$$

定理 1 中的第一式已证成立，再往证定理 1 中的第二式，将式(4) 中 $n-1$ 阶首 1 无迹方阵的积和式