理性派

CRC Press
Taylor & Francis Group

身边的数学译丛

概率解析

德州扑克

[美]弗雷德里克·派克·舍恩伯格(Frederic Paik Schoenberg) 著
吴倩艳 译

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

身边的数字译丛

概率解析

德州扑克

[美] 弗雷德里克·派克·舍恩伯格（Frederic Paik Schoenberg） 著
吴倩艳 译

机械工业出版社

在读者阅读之前，请务必要注意：虽然这本书是利用德州扑克来讲授概率论，但绝不是要宣扬大家利用学到的概率论去参与扑克比赛，而只是希望能充分利用学生对扑克天生的兴趣来激发他们对学习概率论这个重要课程的热情。全书共有8章，分别介绍了概率基础、计数问题、条件概率和独立事件、期望值和方差、离散型随机变量、连续型随机变量、随机变量的集合以及使用计算机进行模拟和近似。书中包含丰富的实例，既有基本的概率论知识，也添加了一些研究生课本上的经典问题，还特别讨论了将运气和技巧加以量化的内容。

本书可作为理工科院校学生概率论课程的教材或参考材料，也可作为数学爱好者的科普读物。

Introduction to Probability with Texas Hold'em Examples 1st Edition/by Frederic Paik Schoenberg/ISBN：9781439827680

北京市版权局著作权合同登记　图字：01-2013-1807号

图书在版编目（CIP）数据

概率解析德州扑克/（美）弗雷德里克·派克·舍恩伯格著；吴倩艳译．—北京：机械工业出版社，2016.12

（身边的数学译丛）

书名原文：Introduction to Probability with Texas Hold'em Examples

ISBN 978-7-111-55392-2

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①弗…②吴…　Ⅲ.①概率论　Ⅳ.①O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第276434号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）

策划编辑：汤　嘉　责任编辑：汤　嘉　王　芳

责任校对：樊钟英　封面设计：路恩中

责任印制：孙　炜

北京中兴印刷有限公司印刷

2017年7月第1版第1次印刷

169mm×239mm·11.25印张·2插页·203千字

标准书号：ISBN 978-7-111-55392-2

定价：38.00元

译者的话

弗雷德里克·派克·舍恩伯格（Frederic Paik Schoenberg）的《概率解析德州扑克》的翻译工作终于顺利完成. 作为译者，我想对潜在的读者说一句话：这本书绝对值得一读.

在传统的概率论教材中，为了让学生对概率的相关概念、定理更加熟悉，例题中使用的道具往往都是球、盒子、骰子、硬币等，但这些都乏善可陈. 为了吸引学生的眼球，与传统教材不同的是，这本书全部的例题都是采用德州扑克这种很受欢迎的游戏，让学生更有兴趣去挖掘概率论中的奥秘，也使得老师的讲授更有成效. 从本书的目录中可以看出，这本书涵盖了一门标准概率论课程所需要讲授的主要内容，包括基本的概率术语、定理、模型等. 除了传统的概率原理，这本书还进一步讨论了更加前沿性的主题，如票选定理、反正弦定理、随机游走以及一些专门的扑克问题（例如，在德州扑克中运气和技巧的定量化研究）、计算机模拟等，使得学生学习的眼界更加开阔.

在读者阅读之前，请务必要注意：虽然这本书是利用扑克来讲授概率论，但是绝不是要宣扬大家利用学到的概率论去参与扑克比赛，作者在开篇之前就表明了自己的立场：

"编写这本书绝不是说我对赌博行为持赞同态度. 众所周知，扑克和其他赌博形式一样，危险而且容易上瘾. 人们有一大堆的理由来质疑赌博的道德合理性." "撰写这本书的意图并不是想要宣传赌博或是讲授玩扑克的技巧，相反的我只是希望能充分利用学生对扑克的兴趣来激发他们对学习概率论这个重要课程的热情."

作为译者，我特别将这本书作为教材推荐给本科以及本科以上的学生、从事概率论课程的同行学者等. 如果初涉概率论的读者乐于自学，本书对定理和方法的详细介绍也完全可以满足自学的要求. 对于从未学过概率论且从

未涉足过德州扑克的自学者来说，则可以适当搭配其他的基本教材，然后结合本书来进行学习，一定能达到事半功倍的效果.

接下来，我简单介绍一下有关本书翻译的情况. 原著基本上由两大部分组成：概率论的基本知识和德州扑克的基本规则. 作为学过概率论的我，前者的翻译对我来说很简单，但是后者的翻译却着实有一些难度. 德州扑克中有很多基本术语、基本玩法. 译者在翻译之前，为了更好地贴近原著，需要了解这些扑克知识，由此这些知识的收集和整理工作也占据了很大部分的工作量. 本书原著还运用了很多长句，给翻译造成了一定的难度，尽管我已尽量使译文简单明了了，但读者可能在阅读过程中仍然会遇到一些晦涩难懂的地方，敬请读者见谅. 另外，有些概率论的概念始终是比较抽象的，请读者尽量结合本书给出的例题实际动手操作，这样的解题以及获取答案的形式将有助于理解全书的内容.

特别感谢程晓亮老师对译文进行了审校，此外还有很多人为本书的翻译工作贡献了力量，在此就不一一感谢了. 如果读者在阅读本书时发现任何错误，希望读者联系我们，以便我们将您发现的错误在重印时及时改正，提高本书的质量.

前言

我的扑克牌技术很差．首先，我要严正声明，本文的内容并不像你所想象的是讲述扑克技巧的．如果你希望通过阅读本书的内容提高你的扑克牌技巧的话，那么你可能要失望了．因为本书并不是教你怎么利用概率成为一名出色的德州扑克玩家．相反，这是一本以德州扑克为案例来介绍概率论的教科书．

其次，我要在本书开篇之前就表明我的立场，编写这本书绝不是说我对赌博行为持赞同态度．众所周知，扑克和其他赌博形式一样，危险而且容易上瘾．人们有一大堆的理由来质疑赌博的道德合理性．许多人，尤其是那些输不起的人（在扑克游戏中也往往是输得最多的人），他们的结局我们也可想而知．近几年来，在线赌博突然流行起来了，在大学生群体中尤其受欢迎，这个现象引起了社会极大的关注．我曾经在加利福尼亚大学洛杉矶分校（UCLA）教书，在讲授有关扑克和概率的课程时，我总是在第一节课就会给学生“打预防针”，让学生了解到赌博的危害，要求学生必读的是有关赌博成瘾所带来危害的书籍．

撰写这本书的意图并不是想要宣传赌博或是讲授玩扑克的技巧，相反我只是希望能充分利用学生对扑克的兴趣来激发他们对学习概率论这个重要课程的热情．在我第一次教概率论时，就对教材里的范例很不满意．这些范例当然都是一些典型的例子，如抽屉里放袜子、盒子里放球等问题，但是大部分学生甚至不知道什么是盒子㊀，更别提想要利用这个例子来激起学生学习概率

㊀ 原文是“瓮”，译为中文用“盒子”符号，我国通用．

论的热情了. 所以我认为，如果在概率论教科书中使用扑克的范例来教学的话，也许会更有成效. 在以后的教学过程中，我的想法得到了证实. 我非常欣喜地发现，学生们更喜欢这些扑克的例子，而且一些高难度课程的学习由于使用了扑克的案例，学生们也更有兴趣挖掘其中的奥秘了. 事实上，如果要进行本科或是更高阶段的概率论课程的学习的话，我强烈推荐使用德州扑克（现在最流行的扑克游戏）作为案例来进行教学. 有些人曾经劝我换一些其他的扑克游戏来丰富课程，但我坚持只使用德州扑克的案例. 其中原因有两个：一个是，相比于其他扑克游戏，德州扑克的受欢迎程度和人们对它的认知度使得德州扑克更能引起学生们的兴趣. 第二个原因就显而易见了，本书是要讲授一些概率原理，而并不是要教大家学习各种扑克游戏的规则和玩法，所以我并不认为需要使用更多的扑克游戏范例来讲授概率论这门课程.

这本书里的课题内容和大多数本科的概率论教材类似，但是除了这些内容以外，我还增加了一些特别的章节，如对德州扑克中的运气和技巧加以量化的话题等. 研究生概率论课本上的经典问题也被我写入了这本书中，如著名的票选问题以及反正弦定理等.

可以预想到，编写这本书的我可能会成为众矢之的，尤其会被我的那些同事所责怪. 因为对大多数人来说，玩扑克牌是道德败坏的，并且也是毫无实际价值的. 许多概率学家和统计学家认为给学生讲授概率论时需要使用更加严谨、科学的范例，对此，我并不赞同. 不可否认，玩扑克游戏确实有着其固有的弊端，但凡事都会有两面，它也不例外. 德州扑克这种扑克游戏非常有趣且很受欢迎，能够抓住学生的兴趣和注意力，是一种技巧性很强的扑克游戏，但也有一定的运气成分，人们对它可以说是又爱又恨. 在日常生活中也有很多与德州扑克一样兼具技巧和运气的事物，如就业、恋爱等. 虽说德州扑克有一定的运气成分，但它在本质上还是一种智力型的游戏，玩家之间主要还是要靠斗智力、比心理、动脑筋来获得胜利. 其实概率论原理中的很多重要理论都在一定程度上来源于赌博游戏，如在很多学科中都得到广泛运用的贝叶斯理论和大数定理等.

作为一本概率论的教科书，本书的特色之一就是全书只围绕德州扑克这一个范例展开，而另一个特色就是这些范例都是真实发生过的，大多数取材于世界扑克锦标赛（World Series of Poker，简称 WSOP）和其他重要的扑克锦标赛以及电

视播放过的比赛. 搜索并整理这些范例花费了我很多时间，但我非常享受这个过程，也为这些真实范例能提高学生的学习热情而感到欣喜. 本书中可能有些章节和主题并不契合，读者朋友们可以跳过这些章节.

以前，我在教书时，除了布置课后作业和进行考试测评外，我还要求学生完成两个计算机编程项目. 第一个项目要求学生编写一个 R 软件代码，其中的输入变量包括玩家的手牌、押注、筹码的数量、玩家的数量以及盲注的多少，而输出变量则是下注为 0 或是下注的筹码数量. 也就是说学生需要设计一个程序来决定是要弃牌还是要全押. 我不断地运用学生的这些计算机程序来参加一些扑克比赛以测试函数方程的成功率. 第二个项目则要求学生用计算机编写一个更加复杂的 R 函数方程，输出结果不是只有全押或是弃牌这两种选择，而是可以选择一个适中的下注数量. 一些学生非常喜欢这些项目并精心地写出了很多详细的函数方程，并表示这是他们最喜欢的课程内容. 在比赛中使用的一些函数方程以及一些学生自己写的函数方程的范例都可以在 www. stat. ucla. edu/~frederic/35b/rfunctions 这个网站上找到，本书的第 8 章也会详细描述这些函数方程.

在此，我要感谢为本书作出贡献的所有人. 首先，我要特别感谢我的妻子 Jean，这一路都是她陪着我走过来的，同时也是她带我走进了德州扑克的世界. 几年前她为我安排了去拉斯维加斯的生日旅行，由此我了解了德州扑克. 我的父亲、母亲、伽马（Gamma）、兰迪（Randy）、玛琳娜（Marlena）、梅勒妮（Melanie）也一直支持着我，并陪我一起玩德州扑克来提高我对德州扑克的认识. Bella 则一直给予我灵感以及情感上的支持. 我的朋友克雷格·伯杰（Craig Berger）教会了我扑克战略的一些详细知识. 大卫·蒂兹（David Diez）、基思·威尔逊（Keith Wilson）、丹尼尔·劳伦斯（Daniel Lawrence）、汤姆·弗格森（Tom Ferguson）、阿努尔夫·冈萨雷斯（Arnulfo Gonzalez）、雷扎·格里扎德（Reza Gholizadeh）、约翰·费尔南德斯（John Fernandez）和我进行了很多次有关扑克的交流，这些谈话对我来说非常具有启发性. 我也要感谢杰米·高德（Jamie Gold），他很友善而且十分幽默，他接受了我的邀请，为我的学生进行了一次非常有意义的演讲. 我同样非常感谢费勒（Feller）（1966, 1967）、比林斯利（Billingsley）（1990）、皮尔曼（Pitman）（1993）、罗斯（Ross）（2009）以及达雷特（Durrett）（2010）编写的那些经典的概率论教科书，我这本书中的很多内容是借鉴了他们

的著作. 最后想要感谢的是我的双胞胎孩子们——吉玛（Gemma）和马克斯（Max），他们出生在我写这本书期间，从他们身上，我获得了很棒的灵感和想法，但有时也因为他们，我不能集中注意力进行写作. 这本书中的任何错误之处，如果要找原因的话，那么就肯定是因为我的宝贝孩子们分散了我的注意力.

目 录

1 概率基础

1.1 概率的价值

迄今最大规模的扑克联赛——2006 年世界扑克锦标赛（WSOP）主赛进行到第七天，正在进行第 229 场比赛，8770 名参赛者都已被相继淘汰，现在只剩下最后三名玩家进行决赛．最终获胜者将获得 1200 万美元的现金奖励，第二名将获得超过 610 万美元的奖励，第三名则可获得大约 410 万美元．杰米·高德（Jamie Gold）目前的筹码是 6000 万，领先于其他两人，保罗·瓦萨卡（Paul Wasicka）的筹码为 1800 万，而迈克尔·宾格（Michael Binger）的则为 1100 万．比赛开始，前注是 5 万，大小盲注分别为 20 万和 40 万（请注意：如果读者不熟悉德州扑克，可以参考本书附录中对该游戏的简要解说和相关术语介绍的部分）．高德的底牌是 4♠和 3♣，跟注，瓦萨卡是 8♠和 7♠，也跟注，宾格为 A♥和 10♥，决定加注，高德和瓦萨卡跟注．翻牌为 10♣、6♠和 5♠，瓦萨卡过牌，可能希望下一轮加注．但是当轮到他时，宾格的赌注已经达到 350 万，而高德已经全押了．在这种情况下，如果你是保罗·瓦萨卡，接下来你会怎么做？

这时候，当然有很多方面的因素需要考虑．现在，能够想到的一个简单的概率问题就是：在已知每个玩家的底牌和翻牌的情况下，如果瓦萨卡跟注，他的牌能组成同花或顺子的概率有多大？

本书会试着解决这类概率计算的问题．但在我们进行概率计算之前，我们还是有必要重新审视一下这个问题．什么是某个事件发生的概率？例如瓦萨卡得到同花或顺子这个事件发生的概率，比如说是 55%，是什么含义呢？一些读者可能会很惊讶地发现，在“概率”的定义这一问题上，概率学家和统计学家之间一直没能达成统一意见．现在他们主要分为两个学派．

第一个学派是频率论支持者．他们将事件发生的概率是 55% 定义为在完全相同的条件下，进行多次重复性的实验，并且每次实验都相互独立，最终，事件发生的次数为总次数的 55%．也就是说，瓦萨卡得到同花或顺子的概率为 55%，这句话的意思就是想象我们反复观察这种情况的发生结果，或是想象不断重复发转牌和河牌，每次发完后就把台面上的其他牌重新洗牌，再重复以上步骤，随着实验的不断重复，会发现瓦萨卡的牌是同花或顺子的次数占总次数的 55%．

第二个学派则是贝叶斯论的支持者．他们认为 55% 这个数反映的是人们对于某事件可能发生的主观感觉．在这个例子中，因为数值为 55%，所以表示人们认

为这个事件会发生的可能性比不会发生的可能性要稍高一点.

这两种定义一定程度上反映了不同的科学问题、统计过程和结果解读. 例如，一位贝叶斯论者可能会探讨火星上存在生命的概率，而频率论者则会辩驳这个议题不具有任何意义. 几十年来，频率论者和贝叶斯论者已经就概率的意义这一问题进行了无数次的辩论，却似乎永远也得不出统一的意见.

尽管专家们在概率定义这个问题上存在分歧，但他们在概率的数学运算的理论上却达成了一致. 频率论者和贝叶斯论者都同意关于概率的基本运算法则，也就是广为人知的**概率公理**. 1.3 节会提到这三条公理，以及如何运用这三条简单的公理进行概率的计算. 人们就标准的概率表示符号达成了一致，例如，我们记 $P(A)=55\%$，表示事件 A 发生的概率为 55%.

1.2 基本术语

在我们探讨概率公理之前，需要先掌握一些术语. 首先是“或者”这个关系词的理解. 1.1 节画了下划线的句子中的问题其实是不明确的，它所指的情况到底是瓦萨卡得到的只是同花或者只是顺子但不包括两者同时发生的情况，还是他可以得到同花或者顺子并且也包括两者同时发生的情况呢？英文中关于“或者”一词的界定是很含糊的. 而数学家们关心的是明确的问题而非含糊的，于是他们统一意见后约定“A 或者 B”意为“A 或者 B 或者两者同时发生”. 如果有人意在表达“A 或者 B 但不包括两者同时发生”的情况，他就必须明确提出“但不包括两者同时发生”的情况.

当然，在有些情况下，事件 A 和事件 B 不可能同时发生. 例如，我们如果要计算瓦萨卡这把牌能得到同花或者三张 8 的概率有多大，就可以发现这两种情况是不可能同时发生的. 如果转牌和河牌都是 8，那么这两张牌就都不可能是黑桃，因为瓦萨卡已经有黑桃 8 了. 如果 A 和 B 两个事件不可能同时发生，即如果 $P(A\cap B)=0$，那么我们就可以说这两个事件是互不相容的. 而我们经常用符号 AB 表示事件 A 交事件 B，所以两事件互不相容可以简写为 $P(AB)=0$.

所有可能结果的集合叫作**样本空间**，而某个事件就是样本空间中的一个子集. 例如，在 1.1 节刚开始就描述的 WSOP 一例，如果要猜测转牌会是什么牌，那就要考虑由所有 52 张牌所组成的集合的样本空间. 当然，如果我们已经知道三名玩家所出过的牌和他们的三张公共牌，那么这九张已经出现在台面上的牌会在转牌中出现的概率就为 0，就只需要考虑剩下的 43 张牌，它们出现的概率是相同

的．转牌为方块 7 的事件是一个只包含单一元素的样本空间，而转牌的花色为方块的事件则包含了 13 个元素．

考虑到事件 A，我们用记号 A^C 来表示 A 的**补集**，或者换句话说，其为 A 不发生时的事件．例如，如果事件 A 指转牌为方块，那么 A^C 就是指转牌为梅花、红桃或黑桃这一事件．对于任何事件 A，事件 A^C 和它总是互不相容的，并且相加等于合集，意思就是二者共同组成整个样本空间．

1.3 概率公理

整个概率论中的三个基本定理或者叫作三大公理，如下：

公理 1　$P(A) \geqslant 0$；

公理 2　$P(A)+P(A^C)=1$；

公理 3　如果事件 A_1，A_2，A_3，…，A_n 两两互不相容，那么 $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\cdots+P(A_n)$，其中 n 为正整数或可数无穷多．

公理 1 表明任何概率最小值为 0，再根据公理 2，可以推导出任何概率都不能超过 1，同时也能知道如果事件 A 不发生的概率是 45%，那么事件 A 发生的概率是 55%．有时候，我们要计算事件 A 发生的概率，可以先计算事件 A 不发生的概率，这样可能比较容易计算出结果．

公理 3 也称**互不相容事件的加法法则**．我们要注意事件之间互不相容的关系是非常明显的．例如，如果玩家玩一把德州扑克时，A_1 表示的事件是拿到的手牌是一对 A，A_2 表示拿到的手牌是一对 K 的事件．这两个事件不可能同时发生，所以这两个事件是互不相容的．而根据公理 3，这把牌拿到一对 A 或是一对 K 的概率等于拿到一对 A 的概率加上拿到一对 K 的概率．这个结果貌似很显然，但事实上将两个概率相加等于其中任何一个事件可能发生的概率并不能用公理或是定理来证明，在讨论概率论时，我们假设它是一个默认的基本原理．

同时我们也要注意公理 3 并不适用于 1.1 节讨论的问题，即计算瓦萨卡的牌组成同花或顺子的概率．因为手中的牌能组成同花或是顺子这两种情况可能同时发生（如转牌和河牌分别是 9♣ 和 Q♥），所以这两个事件并不是互不相容的，所以公理 3 不适用于这种例子．

最后，我们需要注意的是，由这三个概率公理能推导出：如果有 n 个事件，且这些事件发生的概率相同，那么其中任何一个事件发生的概率是 $1/n$．这个看似很显然的结果是可以由公理 3 直接证明得到（见习题 1.3）的．这个结论

在我们后面讨论德州扑克中的概率问题时发挥着莫大的作用. 因为在很多情况下, 结果发生的可能性都是相同的. 发生概率相同的事件会在 2.1 节中进行详细讨论.

1.4 文氏图

许多读者在这之前肯定已经接触过文氏图了, 所以我们在这里并不打算详细介绍它. 为什么我们能够使用图形 (见图 1.4.1) 来解决概率问题呢?

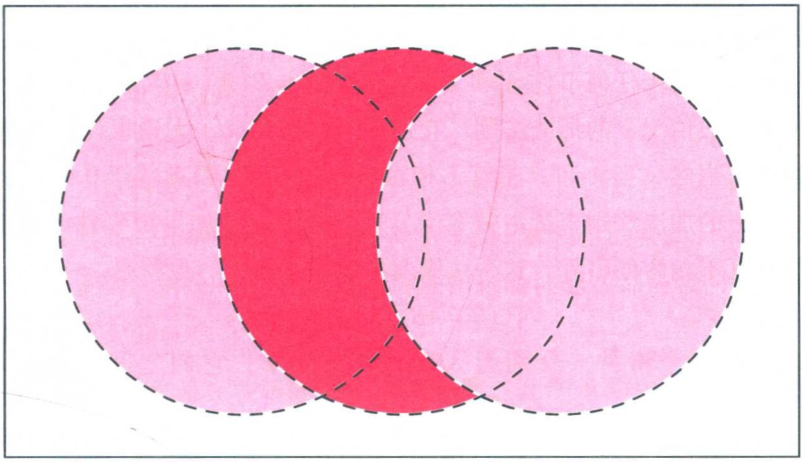

图 1.4.1 文氏图

这个结果和 1.3 节中讨论的概率公理有着莫大的关系. 本书讨论的所有概率论定理都可以由 1.3 节中的三个简单公理推导出来. 这些公理不仅仅适用于计算概率, 也适用于其他方面, 如面积等. 设想你有一个单位面积的纸张, A_1, A_2, A_3, …分别表示纸张上的各个图形. 假设 $P(A)$ 表示的不是概率, 而是图形 A 所占的面积大小, 那么 A^C 就表示图形 A 以外的区域面积, AB 表示的是图形 A 和图形 B 的重叠部分, 也就是图形 A 和图形 B 在纸张上的公共部分, 而 "图形 A 或图形 B" 表示的就是图形 A 和图形 B 的合并面积, 也就是图形 A 或是图形 B 或是图形 A 和 B 的重叠部分所占据的纸张上的部分. 在这个问题上, 三大公理也是成立的: 任何一个图形在纸张上的面积总是大于等于 0 的; 图形所覆盖的区域面积加上没有被图形覆盖到的区域面积总和为 1; 如果图形之间没有重叠的部分, 那么图形之间就是两两互斥的, 图形 A_1, A_2, A_3, …两两互斥的话, 它们所覆盖的总