法兰西数学
精品译丛

线性与非线性泛函分析及其应用（上册）

Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications

□ Philippe G. Ciarlet 著
□ 秦铁虎 童裕孙 译

高等教育出版社

法兰西数学
精品译丛

线性与非线性泛函分析及其应用（上册）

Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications

□ Philippe G. Ciarlet 著
□ 秦铁虎 童裕孙 译

高等教育出版社·北京

图字：01-2015-3396 号

图书在版编目（C I P）数据

线性与非线性泛函分析及其应用．上册 /（法）菲立普·G. 希阿雷（Philippe G.Ciarlet）著；秦铁虎，童裕孙译．-- 北京：高等教育出版社，2017.6
（法兰西数学精品译丛）
书名原文：Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications
ISBN 978-7-04-047748-1

Ⅰ.①线… Ⅱ.①菲… ②秦… ③童… Ⅲ.①泛函分析 Ⅳ.① O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 112280 号

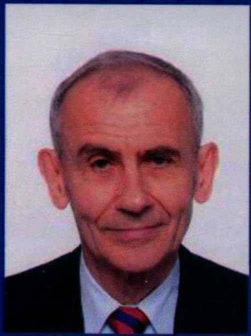
线性与非线性泛函分析及其应用
XIANXING YU FEIXIANXING FANHAN FENXI JIQI YINGYONG

策划编辑 吴晓丽　　责任编辑 吴晓丽　　封面设计 张 楠　　版式设计 徐艳妮
责任校对 刁丽丽　　责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司		http://www.hepmall.com
开　　本	787mm × 1092mm　1/16		http://www.hepmall.cn
印　　张	33		
字　　数	620 千字	版　　次	2017 年 6 月第 1 版
购书热线	010-58581118	印　　次	2017 年 6 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	89.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　47748-00



Philippe G. Ciarlet

法国著名数学家。1974 年在巴黎第六大学开始他的科学研究生涯，2002 年受聘于香港城市大学。他是包括法国科学院、中国科学院在内的八个科学院的院士，也是美国工业与应用数学协会（SIAM）及美国数学会（AMS）的会士。Ciarlet 教授获得了法国科学院大奖和洪堡研究奖及许多其他奖项。

Ciarlet 教授主要从事应用数学与计算力学领域的研究，一直致力于运用并发展深刻的数学工具来求解力学与现代工程中的重要问题，并做出了重大贡献。

《法兰西数学精品译丛》编委会

《法兰西数学精品译丛》序

随着解析几何及微积分的发明而兴起的现代数学, 在其发展过程中, 一批卓越的法国数学家发挥了杰出的作用, 做出了奠基性的贡献. 他们像灿烂的星斗散发着耀眼的光辉, 在现代数学史上占据着不可替代的地位, 在大学教科书、各种专著及种种数学史著作中都频繁地出现着他们的英名. 在他们当中, 包括笛卡儿、费马、帕斯卡、达朗贝尔、拉格朗日、蒙日、拉普拉斯、勒让德、傅里叶、泊松、柯西、刘维尔、伽罗瓦、庞加莱、嘉当、勒贝格、魏伊、勒雷、施瓦茨及利翁斯等这些耳熟能详的名字, 也包括一些现今仍然健在并继续做出重要贡献的著名数学家. 由于他们的出色成就和深远影响, 法国的数学不仅具有深厚的根基和领先的水平, 而且具有优秀的传统和独特的风格, 一直在国际数学界享有盛誉.

我国的现代数学, 在 20 世纪初通过学习西方及日本才开始起步, 并在艰难曲折中发展与成长, 终能在 2002 年成功地在北京举办了国际数学家大会, 在一个世纪的时间中基本上跟上了西方历经四个多世纪的现代数学发展的步伐, 实现了跨越式的发展. 这一巨大的成功, 根源于好几代数学家持续不断的艰苦奋斗, 根源于我们国家综合国力不断提高所提供的有力支撑, 根源于改革开放国策所带来的强大推动, 也根源于很多国际数学界同仁的长期鼓励、支持与帮助. 在这当中, 法兰西数学精品长期以来对我国数学界所起的积极影响, 法兰西数学的深厚根基、无比活力和优秀传统对我国数学家所起的不可低估的潜移默化作用, 无疑也是一个不容忽视的因素. 足以证明这一点的是: 在我国的数学家中, 有不少就曾经留学法国, 直接受到法国数学家的栽培和法兰西数学传统和风格的熏陶与感召, 而更多的人也或多或少地通过汲取法国数学精品的营养而逐步走向了自己的成熟与辉煌.

由于语言方面的障碍, 用法文出版的优秀数学著作在我国的传播受到了较大的限制. 根据一些数学工作者的建议, 并取得了部分法国著名数学家的热情支持, 高等教育

出版社决定出版《法兰西数学精品译丛》, 将法国的一些享有盛誉并有着重要作用与影响的数学经典以及颇具特色的大学与研究生数学教材及教学参考书, 有选择地从法文原文分批翻译出版. 这一工作得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的支持和赞助, 对帮助并推动我国读者更好地学习和了解法国的优秀数学传统和杰出数学成就, 进一步提升我国数学（包括纯粹数学与应用数学）的教学与研究工作的水平, 将是意义重大并影响深远的, 特为之序.

李大潜

2008 年 5 月

纪念我的父母 Hélène 和 Gaston

序　　言

在我们周围已经有很多优秀的教科书了, 为什么还要撰写另一部关于泛函分析及其应用的教科书呢?

除了把这样一种尝试视为作者个人兴趣的因素之外, 还有其他的原因: 一个原因是, 将线性及非线性泛函分析中最基本的定理收集在同一本书里, 这或许是撰写这部书的主要原动力; 另一个原因是, 在处理丰富的应用问题的同时也说明这些定理应用的广泛性.

在此书中讨论的关于对线性及非线性偏微分方程的应用包括: Korn 不等式及线性弹性的存在定理, 障碍问题, Babuška-Brezzi 上下确界条件, 流体力学中的 Stokes 和 Navier-Stokes 方程组的存在定理, 非线性弹性板中的 von Kármán 方程的存在定理, 以及非线性弹性中 John Ball 的存在性定理等. 各种各样的其他应用论题则选自数值分析及最优化理论. 例如, 逼近论, 多项式插值的误差估计, 数值线性代数, 最优化的基本算法, Newton 方法, 或有限差分法等.

我们也做了特别的努力, 以使本书更能满足教学上的要求. 其第 1 章实质上是对书中要用到的实分析及函数论中有关结果的复述. 而该章之后, 大部分定理都是自包含的, 给出了完整的证明[1]. 这些自包含的证明一般不太容易在其他文献中找到, 有些如果没有相关领域的扩展知识是很难得到的. 例如, 书中对于 Poincaré 引理, Laplace 算子的次椭圆性, Pfaff 方程组的存在定理, 或者曲面理论的基本定理等给出了这种自包含证明. 本书还包含诸多插图和 (约 400 道) 习题. 书中还给出了 (大部分是作为脚注) 有关史实的注记以及 (至少那些在有理由保证其真实性的前提下能追溯到的) 原始参考文献[2], 以对某些重要结果的产生提供一个原始思路.

---

1) 定理左侧标记符号 $\flat$ 者, 表示其中不包含证明.

2) 倾我所知来做这件事可能是一种冒险的尝试 ……

我相信, 本书覆盖了泛函分析中的大部分核心课题, 对线性及非线性应用感兴趣的分析学者在其职业生涯中都会接触过这些课题. 更具体地说, 线性泛函分析及其应用是第 2 章到第 6 章的主题, 而第 7 章到第 9 章的主题是非线性泛函分析及其应用.

当然, 为了能使本书的篇幅保持在一个合理限度内, 必须有所取舍. 一些更专门的课题, 如 Fourier 变换、小波、谱理论 (除紧自伴算子外) 以及与时间相关的偏微分方程等, 书中均未予以讨论.

在本科最后一年或研究生的水平上, 本书的内容可作为几个一学期课程的教科书, 例如, "线性泛函分析" "线性与非线性边值问题" "微分学及其应用" "微分几何导论" "非线性泛函分析" 以及 "数学弹性与流体力学" 等. 就此而言, 对于教师来说, 从内容目录中, 选取本书合适的部分作为这类课程的教科书是很容易的事. 实际上, 我非常愉快地讲授过这些课程. 最初是在巴黎第六大学 (Université Pierre et Marie Curie) 及香港城市大学, 后来也在奥斯汀的得克萨斯大学 (University of Texas at Austin), 康奈尔大学 (Cornell University), 复旦大学, 斯图加特大学 (University of Stuttgart), 苏黎世联邦理工大学 (ETH-Zürich) 以及苏黎世大学 (University of Zürich) 等讲授过.

要求的主要预备知识是在一个合理的程度上知晓实分析, 即初等拓扑 (如连续性、紧性等), 距离空间的基本性质和 Lebesgue 积分, 以及单个或多个实变量的实值函数理论等. 为方便读者起见, 本书中需要用到的这些科目里的一些基本定义和定理都不加证明地收集在第 1 章中.

在撰写这部书期间, 我从 Liliana Gratie, George Dinca, Cristinel Mardare, Sorin Mardare, 以及 Pascal Azerad 等的评议中获益匪浅. 感谢他 (她) 们非常仔细地阅读了大部分章节, 并提出了许多有意义的改进意见. Bernard Dacorogna 与 Vicentiu Radulescu 也向我提供了宝贵的建议. 对他 (她) 们所有的人, 我表示衷心的感谢!

我还要感谢 Douglas N. Arnold, 他很早就对这一项目给予强有力的支持. 同时也要感谢 SIAM 编辑部的 Elizabeth Greenspan, Gina Rinelli 和 Lisa Briggeman, 与她们合作总是非常愉快的.

最后不可不提, 我要对我心目中的 "数学英才" 表示深切的感激和持久的敬意, 他们是 Laurent Schwartz, Richard S. Varga, Jacques-Louis Lions 和 Robert Dautray, 他们多年来的教诲与指导是无价可喻的.

我十分清楚本书肯定还存在一些不足之处. 例如, 可能所用的符号不一致, 无意中遗漏了应该标注的参考文献, 及引用的原始结果归属失当等. 但是, 任何探索 (数学或其他方面的), 即使主人公不太满意, 都得有个结局. 正如 Paul Halmos 在他的一篇论文[3] 的核心思想中, 以更恰当的方式所表述的, 任何数学家, 不管是纯粹还是应用数学家, 最好的办法是看一遍再复读一遍 (我理解他的意思): "大多数作者的最后一步是停笔, 但那是很艰难的一步."

[3] P. R. Halmos [1970]: How to write mathematics, *L'Enseignement Mathématique* **16**, 123–152.

这也就是为什么我预先表示欢迎所有的评论、注记、批评等的原因. 这些意见请发送到 mapgc@cityu.edu.hk, 它们或许可被采用于第二版中.

Philippe G. Ciarlet
2012 年 11 月于香港

目　　录

第 1 章　实分析和函数论

引言

第 1 章作为对实分析的快速回顾, 按惯例包括集合论, 选择公理, 集合 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}^n$ 的构造, 拓扑空间和距离空间的基本性质, 诸如连续性、紧性、完备性、连通性、单连通等概念; Tietze-Urysohn 扩张定理 (它在第 9 章多处有关键的应用); 还包括 $\mathbb{R}^n$ 上 Lebesgue 测度和 Lebesgue 积分的主要性质、Radon-Nikodym 定理、Fatou 引理、Beppo Levi 单调收敛定理、Lebesgue 控制收敛定理、Fubini 定理、$\mathbb{R}^n$ 中的体积、面积和长度、重积分的变量代换公式.

第 1 章还包括对多个实变量的实值函数理论若干方面的快速回顾. 特别是将介绍基本的函数空间, 如 $\mathcal{C}^m(\Omega)$ 和 $\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$, 其中 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 的开子集 (另一些函数空间, 如 Lebesgue 空间 $L^p(\Omega)$ 或 Sobolev 空间 $H^m(\Omega)$ 和 $W^{m,p}(\Omega)$ 将在以后各章作介绍). 在 $\mathbb{R}^n$ 的所有开子集中, 我们将单独介绍 $\mathbb{R}^n$ 中的域, 即开子集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 它是有界的, 连通的, 且边界有 Lipschitz 连续性, Ω 局部地在边界的同侧, 其原因是它保证了空间 $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ 中函数的基本 Green 公式成立 ($\mathbb{R}^n$ 的域上的 Green 公式在后面将推广到 Sobolev 空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 的函数上去, 见第 6 章).

此外, 我们假设读者已经熟悉有限维空间上的线性代数 (基、线性无关、矩阵、行列式等), 也熟悉多个实变量的实值函数的微分学的基本概念 (偏导数, Taylor 公式等).

这一章的目的实际上是以定理的形式给出本书中将要用到的一系列结果, 并列出为此将涉及的各种记号和定义.

考虑到读者比较熟悉这些结果, 本章中将略去相关的证明, 也不另行提供练习.