



普通高等教育“十三五”规划教材

机动武器振动基础

Fundamentals of Mobile Weapons Vibration

崔志琴 等编著



国防工业出版社

National Defense Industry Press

机动武器振动基础

Fundamentals of Mobile Weapons Vibration

崔志琴 马新谋 徐 健 景银萍 编著

国防工业出版社

· 北京 ·

内 容 简 介

本书详细介绍了机动武器振动的基本原理和方法,内容涉及机动武器振动学的基本概念、机动武器单自由度系统的自由振动、机动武器单自由度系统的强迫振动、机动武器两自由度系统的振动、机动武器多自由度系统的振动、机动武器振动的测试,并有大量翔实的应用实例可供参考。

本书可作为高等院校武器类专业的本科教材,也可作为其他普通机械专业的学生和工程技术人员参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

机动武器振动基础 / 崔志琴等编著. —北京:国防工业出版社, 2016. 8

ISBN 978-7-118-11034-0

I. ①机… II. ①崔… III. ①机动—武器—振动—基本知识 IV. ①TJ02

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 228733 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

腾飞印务有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 11 $\frac{1}{4}$ 字数 266 千字

2016 年 8 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—2000 册 定价 35.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店: (010) 88540777

发行邮购: (010) 88540776

发行传真: (010) 88540755

发行业务: (010) 88540717

科学技术的迅猛发展使振动分析在军工、机械、船舶、土建、电子和航空航天等工业领域都占有重要地位。随着国防工业的现代化发展,对装甲车辆、火炮系统和自动武器提出了更高的要求,特别是随着机动武器系统向高速化、轻量化方向的发展,其振动和噪声问题愈加突出,为保证机动武器有较高的机动性和越野性、较高的射击精度和使用寿命,就必须用振动理论作为指导,对各种机动武器系统进行深入的运动学、动力学和振动学分析。而目前振动学方面的教材大部分是关于通用机械的振动学,缺乏针对性的、系统的武器振动方面的教材,所以《机动武器振动基础》教材在这样的背景下应运而生。

本书的几位作者多年来分别在中北大学的地面武器机动工程、武器系统与发射工程、装甲车辆工程、武器系统与工程和武器系统发射工程专业从事机械振动学、武器系统振动学的教学和科学研究,本书正是根据作者近几年的教学实践和讲义整理、修改编著而成的。内容上力求做到由浅入深、循序渐进,从单自由度系统的简单问题逐渐向两自由度系统和多自由度系统的振动问题推广;系统地从事振动问题的建模、分析、仿真、测试等方面全方位地展开,同时密切结合车辆、火炮、自动武器系统的多种实例分析,使学生了解振动理论在机动武器设计实践和减振、隔振实践中的具体应用情况。本书还提供了使用 ANSYS 和 MATLAB 软件对整车系统和自行火炮系统进行振动分析和动力学分析的例子,其中的内容反映了作者多年从事教学和科研的研究成果。

本书共分 6 章;第 1 章,机械振动学的基本概念;第 2 章,机动武器单自由度系统的自由振动;第 3 章机动武器单自由度系统的强迫振动;第 4 章机动武器两自由度系统的振动;第 5 章,机动武器多自由度系统的振动;第 6 章,机动武器振动模态的测试。其中,第 1 章和第 6 章由崔志琴编写;第 2 章和第 5 章由马新谋编写;第 3 章由徐健编写;第 4 章由景银萍编写,全书由崔志琴教授拟定编写大纲和统稿。

本书在编著过程中参考了大量的振动学方面的教材、专著等文献资料,对这些文献的作者表示衷心的感谢。本书可作为高等院校武器类专业的本科教材,也可作为其他普通机械专业的学生和工程技术人员的参考用书。

限于编者的水平,教材中难免有疏漏和不妥之处,敬请读者批评和指正。

编著者

2016 年 3 月于中北大学

第1章 机械振动学的基本概念

1.1 引言	1
1.2 机械振动的分类	4
1.2.1 按系统结构参数的特性分类	4
1.2.2 按系统的数学模型分类	5
1.2.3 按系统的激励变化规律分类	5
1.2.4 按系统的响应变化规律分类	5
1.2.5 按系统在振动时的位移特征分类	6
1.3 简谐振动	6
1.3.1 简谐振动的表示方法	7
1.3.2 简谐振动的合成	9
1.4 构成机械振动系统的基本元素	14
1.5 研究机械振动问题的方法	15
1.5.1 自由度与广义坐标	15
1.5.2 研究机械振动问题的方法	17
1.5.3 研究机械系统振动的一般步骤	17

第2章 机动武器单自由度系统的自由振动

2.1 引言	19
2.2 无阻尼单自由度系统的自由振动	19
2.3 能量法	28
2.4 有阻尼单自由度系统的自由振动	34
2.4.1 黏性阻尼自由振动	35
2.4.2 结构阻尼自由振动	43
2.4.3 库仑阻尼	44
2.5 单自由度机动武器系统的振动	46

第3章 机动武器单自由度系统的强迫振动

3.1 引言	49
3.2 机动武器单自由度系统的强迫振动基础	49
3.2.1 简谐激励作用下的强迫振动	49

3.2.2	旋转不平衡质量引起的强迫振动	57
3.2.3	基础运动引起的强迫振动	58
3.3	简谐激励强迫振动理论的应用	61
3.3.1	积极隔振和消极隔振	61
3.3.2	振动测试仪器的设计	63
3.4	发动机的悬置隔振系统	66
3.5	非简谐激励作用下系统的响应	67
3.5.1	任意周期激励的响应	67
3.5.2	非周期激励作用下的系统响应	71
3.5.3	脉冲响应函数与频响函数	76
3.5.4	傅里叶变换	77

第4章 机动武器两自由度系统的振动

4.1	引言	80
4.2	无阻尼两自由度系统的自由振动基础	81
4.3	主坐标与装甲车辆两自由度系统的自由振动	86
4.3.1	广义坐标	86
4.3.2	主坐标	88
4.3.3	初始条件引起的系统自由振动	90
4.4	无阻尼强迫振动	91
4.5	无阻尼吸振器设计原理	94
4.6	有阻尼系统振动基础	96
4.6.1	有阻尼系统的自由振动	96
4.6.2	有阻尼系统的强迫振动	98
4.7	有阻尼吸振器设计原理	99
4.8	位移方程	102
4.8.1	柔度影响系数	103
4.8.2	位移方程的求解	107

第5章 机动武器多自由度系统的振动

5.1	拉格朗日方程及应用	109
5.2	无阻尼自由振动基础	113
5.3	主坐标与正则坐标	119
5.4	对初始条件的响应和初值问题	122
5.5	半确定系统	124
5.6	具有等固有频率的情形	127
5.7	无阻尼强迫振动和模态分析	134
5.8	对基础运动的响应	137
5.9	有阻尼系统振动基础	138

5.9.1	比例黏性阻尼和实模态理论	139
5.9.2	非比例黏性阻尼和复模态理论	140
5.10	ANSYS 有限元分析在机动武器振动分析中的应用	145
5.10.1	坦克发动机曲轴振动特性分析	146
5.10.2	自行火炮炮塔模态分析	147
5.11	MATLAB 软件在机动武器振动分析中的应用	150
5.11.1	装甲车辆整车系统振动特性分析	150
5.11.2	轮式自行榴弹炮总体结构动力学仿真介绍	154

第6章 机动武器振动模态的测试

6.1	引言	160
6.2	振动测试系统	162
6.2.1	信号分类	162
6.2.2	振动测量系统	163
6.3	模态参数识别	166
6.3.1	频域识别法	167
6.3.2	识别多自由度系统的单自由度法	172
6.3.3	频域识别的多自由度方法	174
6.4	结构动态特性的灵敏度分析与结构动力修改	176
6.4.1	灵敏度分析与结构动力修改简介	176
6.4.2	结构动力修改基本原理	177
参考文献		180

第 1 章

机械振动学的基本概念

学习目标与要求

1. 了解有关振动的基本概念。
2. 了解振动的分类。
3. 理解和掌握自由度和广义坐标的概念。
4. 掌握简谐振动的表示方法和合成方法。

1.1 引言

振动现象随处可见。如人们所熟知的地震,会引起建筑物的振动倒塌、人员伤亡,危害巨大。人们日常出行所乘坐的各种交通工具(如车辆、轮船、飞机)和部队使用的各种武器系统(如坦克装甲车辆、火炮、自动武器等)在运行和使用过程中,振动也是难以避免的。各种车辆在崎岖不平的道路上行驶时引起的振动,如图 1.1 所示。



图 1.1 坦克行驶试验

各种火炮和自动武器在发射过程中产生的振动,如图 1.2 所示。

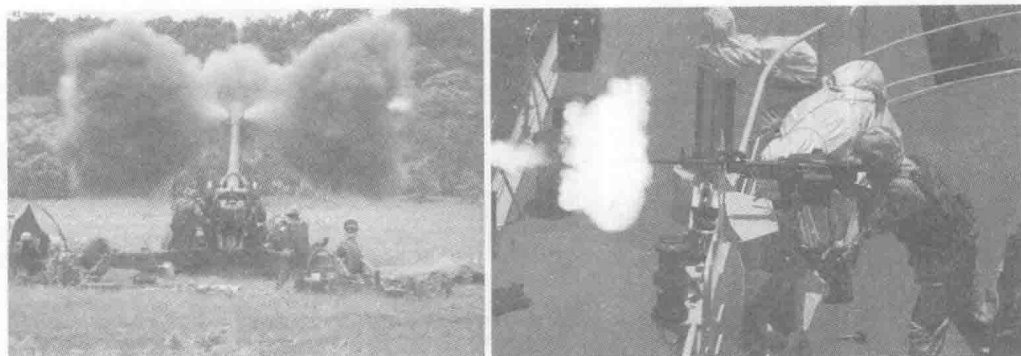


图 1.2 火炮和机枪射击

轮船航行时遇到海浪颠簸引起的振动,如图 1.3 所示。飞机飞行过程中遇到气流扰动而产生的振动,如图 1.4 所示。这些振动问题都可能导致巨大的损失。



图 1.3 波浪与船舶振动



图 1.4 飞机飞行过程的振动

历史上各种大型工程结构或机械系统因振动而引起事故的例子屡见不鲜。曾有汽轮发电机组由于强烈振动引起动态失稳而造成重大恶性事故,在事故中急剧上升的振动可在几十秒之内使大型发电机组彻底解体,甚至祸及厂房,造成巨大的财产损失和人员伤亡。各种装甲车辆上使用的大功率内燃机若其曲轴轴系固有频率设计不当,在工作中极易引起“共振”现象,使轴系系统的动态位移和应力短时间内增加几倍甚至几十倍,甚至破坏内燃机的工作,并严重影响其可靠性。坦克的低频振动(尤其振动频率是 $4 \sim 25\text{Hz}$ 内)极易与乘员的各组织器官发生共振而使成员发生严重的扭伤、过劳、疼痛等不良反应。历史上曾发生过桥梁由于在其上正步进行的部队的周期激励而发生“共振”进而突然崩塌的事故。近代还发生过大型桥梁或冷却塔因受到“风激振动”而断裂、坍塌的事故,如图 1.5 所示。

十几万吨级的油轮由于船体固有频率设计不当在海上航行中受海浪激励产生振动而折成两段。也曾有飞机在飞行过程中受气流扰动引起共振导致飞机机翼折断而机毁人亡。国外近几年发生的核电站泄漏事故造成了严重的后果,其原因之一也是机组的强烈振动所引起的。

对大多数结构、设备和机械系统来说,振动是有害的。振动会降低机器的动态精度和其他使用性能,如机床的振动会降低工件的加工精度,火炮和自动武器的振动会影响射击

精度,各种车辆行驶在不平路面上产生的振动会使乘客疲劳并降低行驶系统的寿命等。目前,随着各种机器运行速度的普遍提高,振动和噪声日益严重,人们迫切要求改善机器的动态特性,以提高机器的使用质量并减少对环境造成的污染。随着近代振动理论、计算机技术和现代测试技术的不断发展和完善,振动分析的方法和手段发生了飞跃性的变革。现在,振动已成为一门独立的学科,用振动学科的理论、知识和方法来解决工程中的各种振动问题和动力学问题,已成为工程专业学生的必备知识和技能。

当然,不能否认,许多振动现象是造福于人类的。早在 19 世纪,瑞士人发明了钟表,利用摆振进行计时,这个发明对人类的作用是不可估量的,如图 1.6 所示。现在的石英钟则是利用晶振进行更为准确的计时。



图 1.5 塔科马海峡大桥垮塌

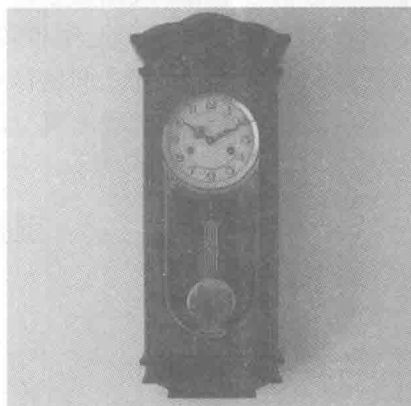


图 1.6 摆钟

在建筑行业中,为了减轻劳动强度,提高工作效率,人们利用振动机理发明了多种振动机械,如振动压路机、振动输送机、振动沉桩机、振动粉磨机等;在矿业中,利用振动筛进行选矿、淘金;在工程机械结构中,利用振动机理进行减振、隔振,涉及各种减振器;在振动测量中利用振动机理设计的各种振动传感器。

各种美妙的音乐正是通过乐器的振动而发出的,如图 1.7 所示。人的发声靠声带的振动,而人听声音则通过耳膜的振动来完成;同样,人们利用振动原理制造出来的人工耳蜗,帮助听力障碍的人重回有声世界,如图 1.8 所示。

此外,振动还可以被人们用于医疗卫生。例如,依据振动原理设计的人工心脏起搏器以维持心脏的跳动,如图 1.9 所示。



图 1.7 钢琴发声原理

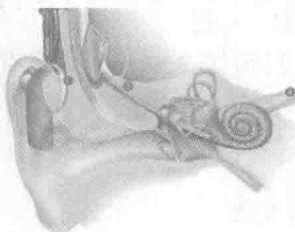


图 1.8 人工耳蜗

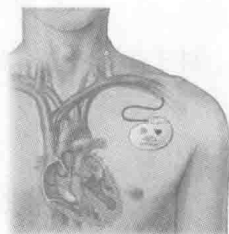


图 1.9 人工心脏起搏器

可见,振动的研究对国防军事工业、工农业生产、医疗卫生、科学研究等领域都具有重

要的实际意义。随着大型复杂的高运转速度机械的不断增加、科学技术水平和工业发展水平的不断提高,对振动研究的迫切性也就大为增加了。

1.2 机械振动的分类

1.2.1 按系统结构参数的特性分类

线性振动——用常系数线性微分方程描述的系统振动。它的惯性力、阻尼力和弹性力分别与加速度、速度及位移成正比。线性系统满足叠加原理。

非线性振动——用非线性微分方程描述的系统振动。即在线性微分方程的基础上出现了非线性项,包含非线性阻尼项和非线性回复项。叠加原理在非线形系统里失效。

线性系统与非线性系统之间的区分,往往决定于运算的范围,而不是系统的固有性质。单摆是研究简谐运动的理想模型,典型的单摆如图 1.10 所示,自由端小球的质量为 m ,不计其形状、尺寸;细线长为 l ,不计质量且无弹性。

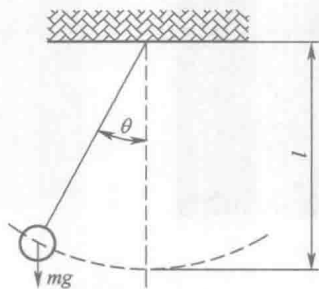


图 1.10 单摆

当单摆静止时,即静止在平衡位置,摆球的重力和摆杆的拉力平衡;摆动后,过最低点时摆球所受的合力不再为零。

用偏离铅垂位置的摆幅 θ 来描述其运动形态,其回复力矩与 $\sin\theta$ 成正比。根据牛顿运动定律,单摆的动力学方程为

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl\sin\theta \quad (1.1)$$

由高等数学的知识可知,把 $\sin\theta$ 在 $\theta=0$ 附近展开成泰勒级数,有

$$\sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{\theta^{2k-1}}{(2k-1)!} + \dots \quad (1.2)$$

对于小的摆幅,由式(1.2)可知, $\sin\theta \approx \theta$, 且具有足够高的精度,式(1.1)可以化简为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad (1.3)$$

令 $\omega^2 = \frac{g}{l}$, 则式(1.3)可变为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \quad (1.4)$$

式(1.4)是一个二阶常系数线性微分方程。

对于大的摆幅, $\sin\theta$ 为 θ 的非线性函数, 就不能简单地用 θ 表示, 而且用 $\sin\theta$ 泰勒级数展开的前几项来表示。当用 $\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!}\right)$ 近似 $\sin\theta$ 时, 单摆的振动方程为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_n^2 \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} \right) = 0 \quad (1.5)$$

该方程就是经典的杜芬方程, 是非线性方程, 与线性系统有截然不同的动力学特点。

因而, 同一个摆, 在摆幅较小时, 可以视为线性系统, 而在摆幅较大时, 则为非线性系统。线性振动和非线性振动各自发展了相应的理论和处理问题的数学方法。本书主要介绍线性振动理论, 对非线性振动特性感兴趣的读者可阅读相关书籍。

1.2.2 按系统的数学模型分类

单自由度系统振动——用一个独立坐标就能确定的系统振动, 如单摆。

多自由度系统振动——用多个独立坐标才能确定的系统振动。如图 1.11 所示, 车床上的被加工零件, 须用 θ 和 y 两个广义坐标描述它的运动形态。

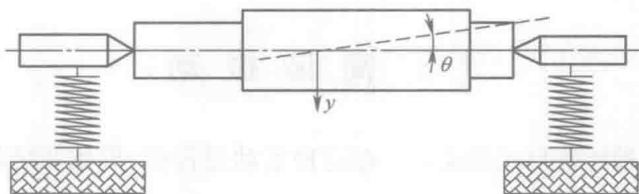


图 1.11 车床工件振动系统

连续弹性体振动——须用无限多个独立坐标才能确定的系统振动, 也称为无限多自由度系统振动。

实际结构, 也就是实际物理系统, 往往是由连续弹性体组成的。这些系统的物理属性或特征(统称为参数)是均匀或非均匀分布的, 因此又称为分布参数系统或连续系统, 通常用偏微分方程来描述。由于连续系统的复杂性, 对它们的振动分析是困难的, 有的甚至是不可能的。因此, 需要对系统做进一步简化。在许多情况下, 可以用系统的离散参数(单位或多个)代替系统的分布参数。也就是说, 将系统的无限多个自由度数降低成为有限多个自由度数, 使问题的分析简化。后一种类型为离散参数系统或集总系统, 通常用常微分方程来描述。虽然在离散系统和分布系统的处理上存在着明显的差异, 但是, 当用这两个数学模型描述同一个一般的物理系统时, 它们之间存在着一定的内在联系。因此, 差异是表面性的, 而不是实质性的。

1.2.3 按系统的激励变化规律分类

自由振动——系统受初始干扰或原有的外激励或约束去掉后产生的振动。

强迫振动——系统在外激励作用下产生的振动。

自激振动——在输入和输出之间具有反馈特性, 并有能源补充的系统所产生的振动。

1.2.4 按系统的响应变化规律分类

简谐振动——振动量为时间的正弦或余弦函数。

周期振动——振动量为时间的周期函数。可用谐波分析的方法将周期振动分解为一系列简谐振动。

瞬态振动——振动量为时间的非周期函数。通常只在一定时间内存在。

随机振动——振动量不是时间的确定性函数,因而不能预测,只能用概率统计的方法进行研究。

如上所述,前3种振动的时间历程可以用确定的时间函数来描述,因而每一时刻的运动量是预知的确定值,故又可称为确定性振动。

1.2.5 按系统在振动时的位移特征分类

扭转振动——振动物体上的质点只做绕轴线旋转的振动。

纵向振动——振动物体上的质点只做沿轴线方向的振动。

横向振动——振动物体上的质点只做垂直于轴线方向的振动。

本书将以线性系统为对象,以系统数学模型的分类形式为基础,按简单到复杂的顺序逐一进行讨论。

1.3 简谐振动

机械振动是一种特殊形式的运动。在这种运动过程中,机械系统将围绕其平衡位置做往复运动。

从运动学的观点看,机械振动是指机械系统的位移、速度、加速度在某一数值附近随时间的变化规律,这种规律如果是确定的,则可用函数关系式

$$x = x(t) \quad (1.6)$$

来描述其运动。也可以用函数图形来表示,如图 1.12 所示就是以 x 为纵坐标、 t 为横坐标表示的几种典型的机械振动。

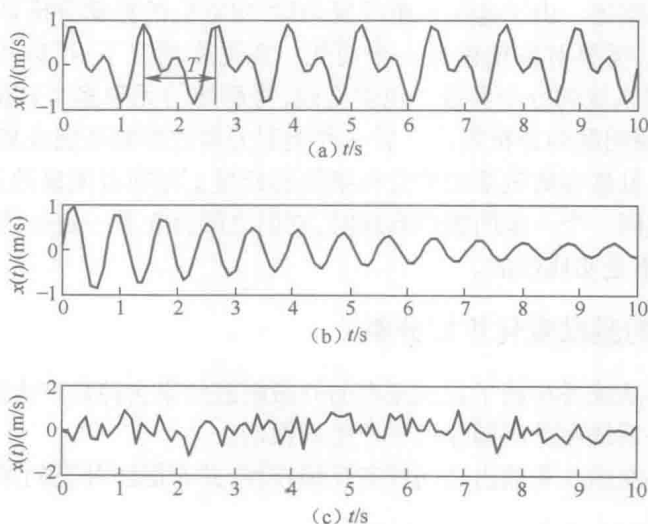


图 1.12 几种典型的机械振动

(a) 稳态振动; (b) 瞬态振动; (c) 随机振动。

图 1.12(a) 所示为物体在相等的时间间隔内做往复运动,称为周期振动。往复运动一次所需的时间间隔称为周期,记为 T ,单位为秒(s)。周期振动可用时间的周期函数表示为

$$x(t) = x(t + nT) \quad (1.7)$$

以一定周期持续进行的等幅振动称为稳态振动,而最简单的周期振动是简谐振动。以后就可以看到任何周期振动都可以认为是各阶简谐振动的叠加。在旋转机械工作过程中测量机座或基础的振动往往就是这种周期性振动。

图 1.12(b) 表示机械系统受到冲击后产生的振动,这种振动没有一定的周期,故不能用周期函数式(1.7)来表示,称为非周期振动,它往往经过一定时间后逐渐消失,故又称瞬态振动。

另一类振动,如坦克行驶时的振动、汽车行驶时的振动、地震等,其振动响应不能用确定的函数形式表达出来,即在任一指定瞬时 t ,并不能预知振动的物理量 x 的大小。它的特点是运动不是时间 t 的确定函数,其图线如图 1.12(c) 所示,称为随机振动。

上面几种振动中,无论是周期振动或是非周期振动,都可以用式(1.6)来描述,这就是说运动是确定的,只要给定任一瞬时 t ,就可得到确定的 x 值。而随机振动是一种不能预知运动物理量大小的振动,它不是时间的确定性函数,根据其运动参数的某些规律性,可用数理统计的方法来进行研究。

1.3.1 简谐振动的表示方法

简谐振动是最简单的振动,也是最简单的周期振动。简谐振动可以用单摆系统的运动来演示,如图 1.13 所示。

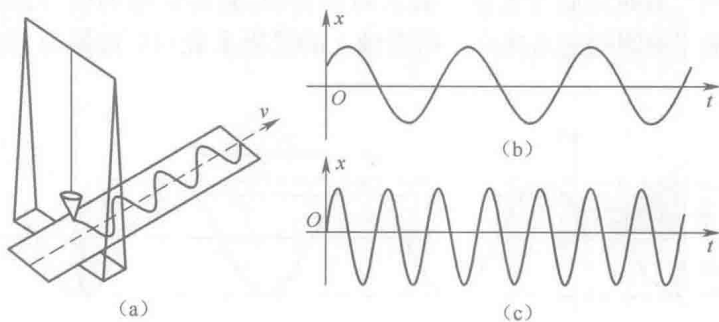


图 1.13 单摆演示简谐振动

(a) 单摆; (b) 拖动速度为 v_1 ; (c) 拖动速度为 v_2 。

用一漏斗装满细砂形成单摆如图 1.13(a) 所示。当它摆动时细砂漏出,均匀地洒在匀速移动的平板上,右边的曲线就是留在平板上的曲线,通过这个演示可以得知右边的曲线就是单摆的振动图像,即单摆在自由振动时的图像是如图 1.13(b) 和(c) 所示的正弦(或余弦)曲线(拖动速度不同),这种按时间的正弦(或余弦)函数所做的运动称为简谐振动。

简谐振动可以用三角函数表示法、旋转矢量表示法和复数表示法 3 种方法来表示。下面分别介绍这 3 种方法。

1. 三角函数表示法

如上述演示,沙漏做自由振动时漏下的沙子在平板上画出的曲线如图 1.13(b) 所示,其位移 x 和时间 t 的关系可用三角函数表示为

$$x = A \cos(\omega t - \psi) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (1.8)$$

式中: A 为运动的最大位移,称为振幅;角速度 ω 称为简谐振动的角频率或圆频率,单位为 rad/s ; $\omega t + \phi$ 为该振动的相位,振动开始时刻($t=0$)的相位 ϕ 称为初相角。

圆频率可表示为

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (1.9)$$

式中: T 为从某一时刻的运动状态再回到该状态是所经历的时间,称为周期,单位为 s 。

在周期振动中,周期 T 的倒数定义为频率,表示每秒钟振动的次数,一般用 f 表示,即

$$f = \frac{1}{T} \quad (1.10)$$

频率 f 的单位为 $1/\text{s}$,称为赫兹,写为 Hz 。因此,圆频率 ω 与频率 f 的关系为

$$\omega = 2\pi f \quad (1.11)$$

简谐振动的速度和加速度是位移表达式关于时间 t 的一阶和二阶导数:

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \phi) = A\omega \sin\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.12)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi) = A\omega^2 \sin(\omega t + \phi + \pi) \quad (1.13)$$

2. 旋转矢量表示法

在振动分析中,有时用旋转矢量来表示简谐振动,旋转矢量的模为振幅 A ,角速度为角频率 ω ,常用做等速圆周运动的点在铅垂轴上的投影来表示简谐振动,如图 1.14 所示。

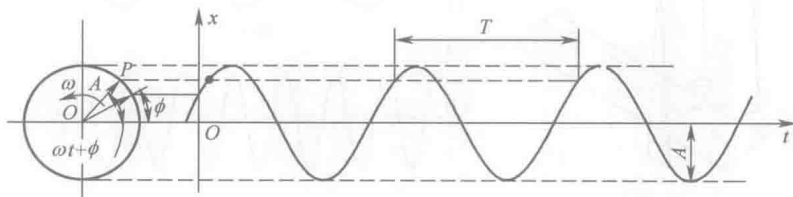


图 1.14 简谐振动矢量表示

以模为 A 的矢量 OP 为半径,由初相位 ϕ 开始以等角速度 ω 绕圆点 O 做逆时针方向转动。 OP 即称为旋转矢量。任一瞬时刻 t 的相位为 $\omega t + \phi$,此刻矢量 A 在铅垂轴上的投影为

$$x = A \sin(\omega t + \phi)$$

该式与式(1.8)相同。

显然,旋转矢量 OP 在水平轴上的投影为一余弦函数,也表示一个简谐振动,这说明任一简谐振动都可以用一个旋转矢量的投影来表示。这个旋转矢量的模就是简谐振动的振幅,它的旋转角速度就是简谐振动的圆频率。

3. 复数表示法

若用复数来表示,则有

$$z = Ae^{j(\omega t + \phi)} = A\cos(\omega t + \phi) + jA\sin(\omega t + \phi), j = \sqrt{-1} \quad (1.14)$$

这时,简谐振动的位移 x 为

$$x = \text{Im}[Ae^{j(\omega t + \phi)}] \quad (1.15)$$

式中:Im 为复数的虚部。

简谐运动的速度和加速度为

$$v = \frac{dx}{dt} = \text{Im}[j\omega Ae^{j(\omega t + \phi)}] = \text{Im}[\omega Ae^{j(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})}] \quad (1.16)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \text{Im}[-\omega^2 Ae^{j(\omega t + \phi)}] = \text{Im}[\omega^2 Ae^{j(\omega t + \phi + \pi)}] \quad (1.17)$$

式(1.14)还可改写为

$$z = Ae^{j\phi}e^{j\omega t} = \bar{A}e^{j\omega t} \quad (1.18)$$

式中: $\bar{A} = ae^{j\psi}$ 为复数,称为复振幅。复振幅包含振动的振幅 A 和初相位 ϕ 两个信息。

需要指出的是, $y = \text{Re}[Ae^{j(\omega t + \phi)}]$ 也表示简谐振动,其中 Re 表示复数的实部。用复数的实部表示的简谐振动与用虚部所表示的简谐振动相位相差 $\pi/2$ 。复数的虚部和实部都可以描述简谐振动。

1.3.2 简谐振动的合成

1. 两个同频率的简谐振动合成

设有两个同频率的简谐振动:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \psi_1), x_2 = A_2 \cos(\omega t + \psi_2) \quad (1.19)$$

它们的合成运动为

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \psi_1) + A_2 \cos(\omega t + \psi_2) \\ &= A_1 \cos\psi_1 \cos\omega t - A_1 \sin\psi_1 \sin\omega t + A_2 \cos\psi_2 \cos\omega t - A_2 \sin\psi_2 \sin\omega t \\ &= (A_1 \cos\psi_1 + A_2 \cos\psi_2) \cos\omega t - (A_1 \sin\psi_1 + A_2 \sin\psi_2) \sin\omega t \\ &= A \cos(\omega t + \psi) \end{aligned} \quad (1.20)$$

式中

$$A = \sqrt{(A_1 \cos\psi_1 + A_2 \cos\psi_2)^2 + (A_1 \sin\psi_1 + A_2 \sin\psi_2)^2} \quad (1.21)$$

$$\psi = -\arctan \frac{A_1 \sin\psi_1 + A_2 \sin\psi_2}{A_1 \cos\psi_1 + A_2 \cos\psi_2} \quad (1.22)$$

从物理概念上说,两个同频率的简谐振动可以合成一个与原来频率相同的简谐振动,反之,一个简谐振动也可以分解成两个频率相同的简谐振动。

复数可以完全地描述旋转矢量端点的运动规律,因此简谐振动用复数的实部或虚部表示。可以采用矢量的运算进行简谐振动的合成,如图 1.15 所示。

若 $\text{Re}(X_1) = A_1 \cos\omega t$, $\text{Re}(X_2) = A_2 \cos(\omega t + \theta)$, 那么合矢量的模 A 为

$$A = \sqrt{(A_1 + A_2 \cos\theta)^2 + (A_2 \sin\theta)^2} \quad (1.23)$$

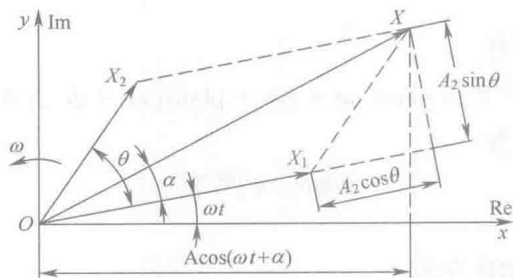


图 1.15 用矢量加法求简谐振动的合成

相位角 α 可表示为

$$\alpha = \arctan \frac{A_2 \sin \theta}{A_1 + A_2 \cos \theta} \quad (1.24)$$

由于原来的函数都是用复数的实部表示,所以合成后的矢量 $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$ 可以表示为 $\text{Re}(\mathbf{X}) = A \cos(\omega t + \alpha)$ 。

例 1.1 求两个简谐振动 $x_1 = 10 \cos \omega t$ 与 $x_2 = 15 \cos(\omega t + 2)$ 的合成运动。

解 方法 1: 利用三角函数法。

因为 x_1 和 x_2 的圆频率一样,所以合成运动的形式为

$$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha) = x_1(t) + x_2(t) \quad (1.25)$$

由于

$$\begin{aligned} A(\cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha) &= 10 \cos \omega t + 15 \cos(\omega t + 2) \\ &= 10 \cos \omega t + 15(\cos \omega t \cos 2 - \sin \omega t \sin 2) \end{aligned} \quad (1.26)$$

所以

$$\cos \omega t (A \cos \alpha) - \sin \omega t (A \sin \alpha) = \cos \omega t (10 + 15 \cos 2) - \sin \omega t (15 \sin 2) \quad (1.27)$$

令方程两边 $\cos \omega t$ 和 $\sin \omega t$ 的系数相等,得

$$\begin{cases} A \cos \alpha = 10 + 15 \cos 2 \\ A \sin \alpha = 15 \sin 2 \end{cases} \quad (1.28)$$

解之,得

$$\begin{cases} A = \sqrt{(10 + 15 \cos 2)^2 + (15 \sin 2)^2} = 14.1477 \\ \alpha = \arctan \left(\frac{15 \sin 2}{10 + 15 \cos 2} \right) = 74.5963^\circ \end{cases} \quad (1.29)$$

方法 2: 利用矢量运算法。

对于任意一个 ωt , $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 可以用图 1.16 中所示的矢量来表示。根据矢量加法的几何表示可求得合矢量为

$$x(t) = 14.1477 \cos(\omega t + 74.5963^\circ) \quad (1.30)$$

方法 3: 用复数方法。

这两个简谐振动可以用复数的形式表示为

$$\begin{cases} x_1(t) = \text{Re}[A_1 e^{j\omega t}] \equiv \text{Re}[10 e^{j\omega t}] \\ x_2(t) = \text{Re}[A_2 e^{j(\omega t + 2)}] \equiv \text{Re}[15 e^{j(\omega t + 2)}] \end{cases} \quad (1.31)$$