

Problems in Analytic Number Theory, 2e

解析数论问题集 (第2版)



数学·统计学系列

[美] 默尔蒂 (Murty, M. R.) 著 郑元禄 译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



数学·统计学系列

Problems in Analytic Number Theory, 2e 解析数论问题集

(第2版)

● [美] 默尔蒂 (Murty, M. R.) 著 ● 郑元禄 译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

黑版贸审字 08 - 2016 - 009 号

内容简介

本书是课后大约 500 个解析数论习题的汇编,同时也是解析数论的基本教程.全书共分为两部分:习题与解答.读者可通过这些习题学习解析数论的一些重要方法,了解解析数论的研究领域.

本书可供大专院校数学系师生、研究生及相关的学科工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

解析数论问题集:第 2 版/(美)默尔蒂(Murty, M. R.)著;
郑元禄译. — 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016.4
书名原文:Problems in Analytic Number Theory (Second Edition)
ISBN 978 - 7 - 5603 - 5616 - 7

I. ①解… II. ①默… ②郑… III. ①解析数论—高等学校—
习题集 IV. ①O156.4 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 226369 号

Translation from the English language edition:
Problems in Analytic Number Theory
by U. S. R. Murty
Copyright © 2008 Springer Science + Business Media, LLC
All Rights Reserved

本作品中文专有出版权由中华版权代理总公司代理取得,由哈尔滨工业大学出版社独家出版

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘立娟
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451 - 86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 25.75 字数 482 千字
版 次 2016 年 4 月第 1 版 2016 年 4 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 5616 - 7
定 价 88.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎ 第 2 版 序

这部经过了扩充与校正的第 2 版有新的一章,即关于等分布的重要论题.当然,我们不能在短短一章中详尽地论述这个主题.但是,我们希望这里提出的问题将引导学生进一步从其他原始文献资料中继续学习研究.

在解析数论基本论题中,问题的陈述形式有它的优点,正如我从第 1 版所看到的那些优点.任何领域中的纯粹理论知识都不能完全了解这个主题,我们经常需要尽力解决一些具体问题(习题),在这些问题中不可缺少地应用这些概念.要明确地说明或陈述这些知识与“知识”的不同层次是不容易的,但是我们只有通过实践才能学习许多知识并且增加洞察力.犯错误是学习中的重要部分.实际上,“实践第一,知识第二.”

M·兰·默尔蒂

加拿大安大略省金斯敦市

2007 年 9 月

©
第
2
版
致
谢

我要感谢一些帮助我校正与扩充第 1 版的人. 他们是 Amir Akbary, Robin Chapman, Keith Conrad, Chantal David, Brandon Fodden, Sanoli Gun, Wentang Kuo, Yu-Ru Liu, Kumar Murty, Purusottam Rath 与 Michael Rubinstein.

M·兰·默尔蒂
加拿大安大略省金斯敦市
2007 年 9 月

“为了成为一个数学或任何一个学科的专家”, A. Weil 写到, “学生应当了解, 大多数论题只包含少数基本概念.” 在学习了这些基本概念与定理后, 学生“将要做常规练习题, 由此可以为掌握这些概念获得必要的智慧能力. 如果不能灵活地应用这些概念并把它们应用到具体的问题中, 那么就不能实际理解基本的数学概念.” Weil 富有洞察力的意见对大学毕业生与研究生阶层特别重要. 这是本书的观点. 我们的目的是通过例题与习题尽快地向学生介绍解析数论的方法.

任何一个标志性定理指示了着手解决其他问题的方法. 如果学生不能从众多理论中精选出基本方法, 那么他或她的理解是学究性的, 他不是一个参与研究工作的人. 质数定理产生了富有成果的 Tauberian 理论与 Dirichlet 级数的一般方法, 利用这个方法可以研究序列的渐近性. 它还推动了筛法的发展. 我们在本书中还集中讨论了这个主题, 论述了正在形成的 Selberg 理论(第 8 章)与 p 进解析数论(第 10 章).

本书是大约 500 个解析数论习题的汇编, 其唯一目的是向早期研究生提供学习解析数论的一些重要方法. 因此, 我们希望学生至少学习过实分析与复分析课程各一学期. 习题是为了方便自学而编排的. 那些每天为尽力解答这些习题的人们, 不但将增加解析

数论的知识,而且还会增加为自学所需要的磨炼,这种磨炼对提高研究水平是不可或缺的.

对高年级大学生水平或研究生水平来说,本书是解析数论理想的基本教程.编写这样的教材有几种方法.高年级大学生的引导性教材可以集中在第1,2,3,9,10章.早期研究生课程可以包括第4,5,8章.认真学习的研究生可以在一学期中,不费力地学完本书的全部内容.把如同第6,7,10章这样普通的篇章委托给学生自学,或者在一学期课程中与教师一起一星期选学一章,集中注意主要定理与说明定理的少数明显例题.

在培养研究生研究能力的课程中,我发现保持解析数论与代数数论课程的重复循环形式是令人生厌的.与我的另一本书《代数数论习题集》(与 J. Esmonde 合著)同时,该书作为《研究生数学教材》第190卷出版,本书打算使学生完全进入优美的数论学科.当然许多重要论题被省略了.不过这里所包含的材料是数论的“全套基本工具”,给一些比较困难的习题揭露了“使用工具的巧妙技术”.

如果智力正常,那么就能完成学习本书的任务.因此建议学生注意一下解答全部习题的时间因素.“解题工作增加了分配给它的全部时间”,于是如果没有规定时间上限,那么就不会集中注意力.解题要用多长时间,没有普遍的标准.但是一个众所周知的事实是自我约束,无论采用什么约束,都能打开灵感的大门.如果用这种方法锻炼智力,那么解法的细微差别变成比较清楚与有意义的了.这样,我们希望没有接近“校外教师”的许多人,由于学习本书,并认识他们的“校外教师”而得到益处.

M·兰·默尔蒂

普林斯顿

1999年11月

◎
第 1 版
致谢

我要感谢罗马的 Smirnov 为本书用一种先进的排版系统 L^A-TEX 排字所做的卓越工作. 我也要感谢 Amir Akbary, Kalyan Chakraborty, Alina Cojocaru, Wentang Kuo, Yu-Ru Liu, Kumar Murty 与 Yiannis Petridis 对本书原稿早期版本提出了宝贵意见. 本书由于经历了 Queen 大学、Brown 大学与 Mehta 研究院提供的课程教学而完善起来. 然后, 作者于 1999 年秋天在高等研究院完成了这门课程. 我感谢高等研究院提供了舒适的工作环境. 我感谢加拿大的科学协会授予我 Killam 研究员的职位, 让我能把时间专用于完成本书的写作计划.

M · 兰 · 默尔蒂
普林斯顿
1999 年 11 月

第一编 习 题

第 1 章 算术函数 // 3

- 1.1 Möbius 反演公式与应用 // 4
- 1.2 Dirichlet 形式级数 // 6
- 1.3 一些算术函数的阶 // 7
- 1.4 算术函数的平均阶 // 8
- 1.5 补充习题 // 9

第 2 章 等差数列中的素数 // 12

- 2.1 求和方法 // 12
- 2.2 特征标 $\bmod q$ // 16
- 2.3 Dirichlet 定理 // 17
- 2.4 Dirichlet 双曲方法 // 19
- 2.5 补充习题 // 21

第 3 章 素数定理 // 25

- 3.1 Chebyshev 定理 // 26
- 3.2 Dirichlet 级数在 $\operatorname{Re}(s)=1$ 上不为零 // 29
- 3.3 Ikehara-Wiener 定理 // 30
- 3.4 补充习题 // 36

第 4 章	周线积分法	// 39
4.1	一些基本积分	// 39
4.2	素数定理	// 42
4.3	进一步的例题	// 46
4.4	补充习题	// 48
第 5 章	函数方法	// 51
5.1	Poisson 求和公式	// 51
5.2	Riemann ζ 函数	// 53
5.3	Gauss 和	// 55
5.4	Dirichlet L 函数	// 56
5.5	补充习题	// 58
第 6 章	Hadamard 乘积	// 63
6.1	Jensen 定理	// 63
6.2	1 阶整函数	// 65
6.3	Γ 函数	// 67
6.4	$\xi(s)$ 与 $\xi(s, \chi)$ 的无穷乘积	// 69
6.5	$\zeta(s)$ 与 $L(s, \chi)$ 的无零点区域	// 70
6.6	补充习题	// 73
第 7 章	显式公式	// 75
7.1	计算零点数	// 75
7.2	$\psi(x)$ 的显式公式	// 77
7.3	Weil 显式公式	// 79
7.4	补充习题	// 83
第 8 章	Selberg 类	// 86
8.1	Phragmén-Lindelöf 定理	// 87
8.2	基本性质	// 88
8.3	Selberg 猜想	// 92
8.4	补充习题	// 93
第 9 章	筛 法	// 96

9.1	Eratosthenes 筛法	//96
9.2	Brun 初等筛法	//100
9.3	Selberg 筛法	//104
9.4	补充习题	//108
第10章 p 进法 //111		
10.1	Ostrowski 定理	//111
10.2	Hensel 引理	//117
10.3	p 进插值	//120
10.4	p 进 ζ 函数	//124
10.5	补充习题	//127
第11章 等分布 //129		
11.1	一致分布模1	//129
11.2	正规数	//133
11.3	渐近分布函数 mod 1	//135
11.4	偏差	//137
11.5	等分布与 L 函数	//142
11.6	补充习题	//145

第二编 解 答

第1章 算术函数 //149		
1.1	Möbius 反演公式与应用	//149
1.2	Dirichlet 形式级数	//154
1.3	一些算术函数的阶	//158
1.4	算术函数的平均阶	//160
1.5	补充习题	//162
第2章 等差数列中的素数 //175		
2.1	求和方法	//175
2.2	特征标 mod q	//178
2.3	Dirichlet 定理	//182

2.4	Dirichlet 双曲方法	//186
2.5	补充习题	//190
第3章	素数定理	//201
3.1	Chebyshev 定理	//201
3.2	Dirichlet 级数在 $\text{Re}(s)=1$ 上不为零	//207
3.3	Ikehara-Wiener 定理	//213
3.4	补充习题	//216
第4章	周线积分法	//226
4.1	一些基本积分	//226
4.2	素数定理	//230
4.3	进一步的例题	//233
4.4	补充习题	//235
第5章	函数方程	//244
5.1	Poisson 求和公式	//244
5.2	Riemann ζ 函数	//246
5.3	Gauss 和	//247
5.4	Dirichlet L 函数	//248
5.5	补充习题	//249
第6章	Hadamard 乘积	//265
6.1	Jensen 定理	//265
6.2	Γ 函数	//266
6.3	$\xi(s)$ 与 $\xi(s, \chi)$ 的无穷乘积	//274
6.4	$\zeta(s)$ 与 $L(s, \chi)$ 的无零点区域	//278
6.5	补充习题	//281
第7章	显式公式	//285
7.1	计算零点数	//285
7.2	$\psi(x)$ 的显式公式	//288
7.3	补充习题	//292
第8章	Selberg 类	//300

8.1	Phragmén-Lindelöf 定理	//300
8.2	基本性质	//301
8.3	Selberg 猜想	//306
8.4	补充习题	//310
第9章	筛法	//315
9.1	Eratosthenes 筛法	//315
9.2	Brun 初等筛法	//319
9.3	Selberg 筛法	//321
9.4	补充习题	//327
第10章	p 进方法	//334
10.1	Ostrowski 定理	//334
10.2	Hensel 引理	//339
10.3	p 进插值	//341
10.4	p 进 ζ 函数	//346
10.5	补充习题	//350
第11章	等分布	//355
11.1	一致分布模1	//355
11.2	正规数	//361
11.3	渐近分布函数 mod 1	//362
11.4	偏差	//363
11.5	等分布与 L 函数	//365
11.6	补充习题	//367
参考文献		//372
索引		//373
编辑手记		//376

第一编 习 题

算术函数

第

1

章

$\mathbb{N}$ 表示自然数集. 算术函数 f 是定义在自然数集 $\mathbb{N}$ 上的复值函数. 这样的 f 称为加性函数, 如果当 m 与 n 互素时

$$f(mn) = f(m) + f(n) \quad (1.1)$$

若 (1.1) 对所有的 m, n 成立, 则 f 称为完全加性函数. 乘性函数是一种算术函数, 满足 $f(1) = 1$, 且当 m 与 n 互素时

$$f(mn) = f(m)f(n) \quad (1.2)$$

若 (1.2) 对所有的 m, n 成立, 则 f 称为完全乘性函数. 记号 (m, n) 常用来表示 m 与 n 的最大公因子. 因此当且仅当 m 与 n 互素时, $(m, n) = 1$.

令 $\nu(n)$ 表示 n 的不同素因子的个数, $\Omega(n)$ 为 n 的素因子的个数, 含重数. 则 ν 与 Ω 是加性函数的例子. 此外, Ω 是完全加性的, 而 ν 不是.

令 $s \in \mathbb{C}$, 研究除数函数

$$\sigma_s(n) = \sum_{d|n} d^s$$

其中上式是对 n 的正因子的 s 次幂求和的. 特殊情形 $s=0$ 给出了 n 的因子数, 常表示为 $d(n)$. 不难看出, 对每个 $s \in \mathbb{C}$, $\sigma_s(n)$ 是乘性函数, 但不是完全乘性函数. 我们也倾向于用字母 p 表示素数.

一个重要的乘性函数是 Möbius 函数, 它定义为

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^{\nu(n)} & (\text{若 } n \text{ 是无平方数}) \\ 0 & (\text{其他情形}) \end{cases}$$

我们设 $\mu(1) = 1$, 由

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

给出的 Euler 互素函数是另一个著名的乘性函数,可用它计算互素剩余类 $(\bmod n)$ 的个数.

Von Mangoldt 函数定义为 $\Lambda(1)=0$ 与

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & (\text{若对某一 } \alpha \geq 1, n = p^\alpha, p \text{ 是素数}) \\ 0 & (\text{其他情形}) \end{cases}$$

它既不是加性函数也不是乘性函数. 它还在素数分布的研究中起着主要作用.

1.1 Möbius 反演公式与应用

习题 1.1.1 证明

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & (\text{若 } n = 1) \\ 0 & (\text{其他情形}) \end{cases}$$

习题 1.1.2 (Möbius 反演公式) 证明: 当且仅当

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

时

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

习题 1.1.3 证明

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

习题 1.1.4 证明

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$$

习题 1.1.5 令 f 是乘性函数. 设

$$n = \prod_{p^\alpha \parallel n} p^\alpha$$

是 n 的唯一地因子分解为不同素数的幂. 证明

$$\sum_{d|n} f(d) = \prod_{p^\alpha \parallel n} (1 + f(p) + f(p^2) + \cdots + f(p^\alpha))$$

推导函数 $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ 也是乘性函数. 记号 $p^\alpha \parallel n$ 表示 p^α 是 p 的精确幂, 能整除 n .

习题 1.1.6 证明

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$$

推导