黎曼几何

黎　曼　几　何

〔日〕立花俊一　著

王运达　译

任彦成　校

（研究生讲义）

东北工学院

1981年7月

内 容 提 要

本书的特点是以张量分析为工具研究黎曼几何 。是 L.P.Eisenhart 著黎曼几何（第一版 1926 年，第二次印刷 1949 年）出版后在这方面的一次总结。经典的重要结论均予保留，一些新思想、新结论也选人书中。读此著作后即可阅读某些专业杂志。本书习题全有解答，请见习题集。

本书对读者要求甚少，只要知道微积分与拓扑学初步便可读懂。学完微分几何后再想提高，这是一本合适的读物。

本书可供高等院校数学系、物理系以及有关工科专业高年级学生与研究生阅读，也可供教师、科技人员参考。

本书第一版 1967 年出版，中译本根据 1974 年第 11 版全文译出。

献给译者的导师、我国微分几何学先驱

苏步青　教授

八十寿辰。

中译本序言

德人黎曼 (B.Riemann) 曾于 1854 年作“关于构成几何基础的假设”的报告，并于 1861 年解答法国科学院所提的热学征解问题。自此以后黎曼空间的几何的基本思想遂告成立。意大利人利齐 (G.Ricci) 又于 1887 年发表张量算法，此两者遂分别形成爱因斯坦 (A.Einstein) 广义相对论的基础和工具。正如 1915 年爱因斯坦所指出“他这理论是由高斯(K.F.Gauss)，黎曼，克利斯托费尔 (E.B.Christoffel)，利齐等人所创立的一般微分学的彻底胜利”。

此后研究黎曼几何之人士骤增，美人爱森哈脱 (L.P.Eisenhart) 遂于 1926 年写成第一本教科书——**黎曼几何** (Riemannian Geometry)，继之法人卡当(E.Cartan)于1928年也写成一本教材——**黎曼空间几何讲义** (Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann)。第一本书于 1949 年又第二次印刷增加 29 个附录并增补参考文献，但内容未作变动，第二本书于 1946 年再版，篇幅有所增加。迄今此两本书仍不失为提供黎曼几何参考的经典著作，1966年以前我国开设黎曼几何多采用第一本作主要教材，诚以其内容丰富，层次明晰便于自学，且可为进一步学习打下良好基础。

1949年以后整体概念，流形概念等思想陆续建立，作为教科书内容也应相应地更新。为此日人立花俊一(S.Tachibana)于 1967 年出版“黎曼几何”一书写进前两书所未具有而又非常重要的一些新概念。因此该书可作为在经典微分几何的基础上进修近代微分几何的桥梁，到 1974 年已再版 11 次。

东北工学院王运达副教授精通日语，为了满足日益增长的教学需要，不辞辛苦将该书及其续篇——黎曼几何习题集——译成中文，并曾试教数次效果很好。时至今日微分几何不但在理论上而且在实用上

已日益显示其具有较大价值，该书中译本之出版对我国微分几何的发展当起推动作用，因乐为之序。

朱鼎勋

于北京师范大学

1 9 8 0 年 8 月

整体黎曼几何在本书出版后进展很快。中译本对可定向紧致黎曼流形做了一些补充写在第七章之后。

南京大学黄正中教授审阅了中译本手稿并提了宝贵意见，对此表示感谢。

译 者

著 者 前 言

运用微积分研究欧氏空间的曲线与曲面是经典微分几何。它的一种推广、黎曼几何，直观地讲就是弯曲空间的几何。本书是以大学三、四年级学生或为取得硕士学位的研究生为对象而写的黎曼几何初步。在这里只假设具有微积分与拓扑空间的一些知识。就拓扑空间而言，知道拓扑是什么就行了。

一般地说，多数学校把黎曼几何这门课程做为经典微分几何的继续来讲授。但从著者的经验来看，不如先学黎曼几何可使微分几何更加有趣。因此本书几乎不假设有微分几何的知识。无论如何也要用的话，我们努力作到让不了解详情的读者通过直观也能理解的程度。

在黎曼几何的处理上有几种方法，这本书以张量分析为主要工具。为了在内容上与其它成书避免重复，并且尽量多地罗列张量公式，因此也有没应用到的。这要在本书的续篇《黎曼几何习题集》里补上。

以下略。

立花俊一

于日本东京

1967年8月

目　录

第一章　向量与张量

§1　向量空间

在三维欧氏空间里，光滑曲面S在点p处的切平面设为T_p。T_p可看做此切平面上的所有向量作成的二维向量空间，所以在S的各点p有二维向量空间T_p与之对应。所谓n维黎曼空间是曲面的推广概念，在它的各点以抽象的方式对应以n维向量空间T_p，让T_p起切平面的作用。在这种意义下，向量空间在黎曼几何里起着重要作用。

我们在平面或空间里，将通过平行移动可以迭合的有向线段称为向量。将这种直观的向量放在脑海里，作下列定义。

设R为实数全体的集，于其中定义自然的和与积，其元以$a,b,c,\cdots\cdots$记之。

定义 1.1　在集V里定义了下列两种运算．即对于任意的$x,y\in V$，唯一决定所谓它们之和是V中之元$x+y$，此外，对于任意的$x\in V$与任意的$a\in R$，唯一决定所谓数积是V的元$ax=xa\in V$。并设对于任意的$x,y\in V$与任意的$a,b\in R$，这些运算满足下列条件。

$$(x+y)+z=x+(y+z) \tag{1.1}$$

存在与x无关系的元$0\in V$使得

$$x+0=0+x=x \tag{1.2}$$

成立。对于各x，存在$x'\in V$使得

$$x+x'=x'+x=0 \tag{1.3}$$

还有

$$x+y=y+x \tag{1.4}$$

$$a(bx)=(ab)x \tag{1.5}$$

$$1\cdot x=x \tag{1.6}$$

$$(a+b)x=ax+bx,\quad a(x+y)=ax+ay \qquad (1.7)$$

这时，V 称为（实数体 R 上的）**向量空间**，V 的各元称为**向量**，而 R 的元（即实数）称为**数量**。求向量之和称为向量的加法。求实数倍称为数量倍。因为满足(1.2)的 0 唯一地决定，故称为**零向量**，(1.3)的 x' 对于各 x 唯一地决定，故记以 $x'=-x$，称为 x 的逆元。

容易证明 $0x=0$，$(-1)x=-x$，其中左边的 0 为实数的 0，而右边的 0 为零向量。人们规定(1.1)的两边仅仅记做 $x+y+z$.

以下常设 V 表示向量空间。

定义 1.2 当 V 的子集 U 关于 V 的加法与数量倍成为向量空间时，称为 V 的**子**（向量）**空间**。

定理 1.1 V 的子集 U 为子空间的充要条件是下列 (i)，(ii) 成立。

(i) 如果 $x,y\in U$，那么 $x+y\in U$.

(ii) 如果 $x\in U$，$a\in R$，那么 $ax\in U$.

证明就是对于 U 验证定义 1.1 的各条件，

设 V 的 r 个向量为 $x_1,x_2,\cdots,x_r$，实系数的一次式 $a_1x_1+\cdots\cdots+a_rx_r$ 所表示的向量称为 $x_1,\cdots,x_r$ 的线性组合。对于 r 个向量 $x_1,\cdots\cdots,x_r$，如存在不全为 0 的实数 $a_1,\cdots,a_r$ 使得 $a_1x_1+\cdots+a_rx_r=0$（零向量）成立时，则称为**线性相关**，不是线性相关时称为**线性无关**。即线性无关的含义是

$$a_1x_1+\cdots+a_rx_r=0\Rightarrow a_1=\cdots=a_r=0$$

定义 1.3 当向量空间 V 满足下列条件时，称为 n 维的。

(i) 至少存在一组线性无关的 n 个向量。

(ii) 任何 $n+1$ 个向量都是线性相关的。

不存在这样的 n 时，称为无限维的。

在本书中考虑的向量空间总是 n 维的。

满足(i)的 n 个向量的组称为 V 的**基底**，或**坐标系**。如设 $e_1,\cdots\cdots,e_n$ 为 V 的一组基底，则 V 的任意一元 x 可唯一地写做

$$x=x^1e_1+\cdots+x^ne_n,\quad x^\lambda\in R \qquad (1.8)$$

称实数组$(x^1,\cdots,x^n)$为 x 关于基底$\{e_\lambda\}$的**分量，或坐标**.

关于符号的规定. 象V的基底$e_1 . \cdots . e_n$这样n个向量记做$\{e_\lambda\}$，$\lambda=1,\cdots,n$，或$\{e_\lambda\}$.向量 x 的分量$(x^1,\cdots,x^n)$简写做 x^λ. 其中λ的含义不是x的λ次方，而是区别n个实数$x^1,\cdots,x^n$的指标. 而x^1的平方表示为$(x^1)^2$. 我们规定n个实变数 $x^1,\cdots,x^n$的函数 $f(x^1,\cdots,x^n)$用$f(x^\lambda)$或$f(x)$表示. 例如n个函数$y^1=f^1(x^1,\cdots,x^n),\cdots,y^n=f^n(x^1,\cdots,x^n)$就写做$y^\lambda=f^\lambda(x^\mu)=f^\lambda(x)$. 在这里$f^\lambda$的$\lambda$也是为区别函数而用的指标.

关于求总和的规定. 如用求和的符号Σ，则(1.8)变为

$$x=\sum_{\lambda=1}^{n}x^\lambda e_\lambda \qquad (1.9)$$

在向量与张量的运算上，求从1到n的总和是经常发生的. 以后只在求总和之际，略去符号Σ，代之以下列规定.

如在一项之中，上下各有一个相同指标，则在指标的变化范围全体上求和.

这样的规定称为**爱因斯坦规定**. 根据这个规定，(1.9)变为

$$x=x^\lambda e_\lambda \qquad (1.10)$$

又因(1.9)里的字母 λ 可用其他字母代替，故(1.10)可写做

$$x=x^\lambda e_\lambda=x^\mu e_\mu=x^\nu e_\nu$$

再举其他例子.

$$\begin{aligned} f(x^\lambda)=&a_{11}(x^1)^2+a_{12}x^1x^2+\cdots+a_{1n}x^1x^n\\ &+a_{21}x^2x^1+a_{22}(x^2)^2+\cdots+a_{2n}x^2x^n\\ &+\cdots\\ &+a_{n1}x^nx^1+a_{n2}x^nx^2+\cdots+a_{nn}(x^n)^2 \end{aligned}$$

如用Σ得

$$f(x^\lambda)=\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n}a_{\lambda\mu}x^\lambda x^\mu$$

根据规定，$f(x^\lambda)=a_{\lambda\mu}x^\lambda x^\mu=a_{\mu\lambda}x^\mu x^\lambda$. 若是写成$f(x^\lambda)=a_{\lambda\lambda}x^\lambda x^\lambda$就错了.

通常，矩阵写做 $A=(a_{\lambda\mu})$，$a_{\lambda\mu}$ 称为 A 的 λ 行 μ 列的元，但在张量分析里也考虑 λ 行 μ 列的元，记做 $a_\mu{}^\lambda$ 的矩阵，即 $A=(a_\mu{}^\lambda)$ 的意思是矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1{}^1 & a_2{}^1 & \cdots & a_n{}^1 \\ a_1{}^2 & a_2{}^2 & \cdots & a_n{}^2 \\ \vdots & & & \\ a_1{}^n & a_2{}^n & \cdots & a_n{}^n \end{pmatrix}$$

故矩阵 $A=(a_\mu{}^\lambda)$，$B=(b_\mu{}^\lambda)$ 之积 $C=(c_\mu{}^\lambda)=AB$ 由

$$c_\mu{}^\lambda=a_\nu{}^\lambda b_\mu{}^\nu$$

而定。

n 阶方阵 $A=(a_\mu{}^\lambda)$ 的行列式记做 $\det A$。如 $\det A\neq 0$，则称 A **正则**。A 正则的充要条件是

$$c^\mu a_\mu{}^\lambda=0 \Rightarrow c^\mu=0$$

因此下列定理显然。

定理 1.2 当 $\{e_\lambda\}$ 为一组基底时，则

$$\overline{e}_\lambda=a_\lambda{}^\mu e_\mu,\qquad \lambda=1,\ \cdots,\ n \tag{1.11}$$

作成基底的充要条件是矩阵 $A=(a_\lambda{}^\mu)$ 正则。

改变基底称为**基底变换**或**坐标变换**。以下讨论在基底变换(1.11)下，向量的分量所受到的变化。关于基底 $\{\overline{e}_\lambda\}$ 设 x 的分量为 $\overline{x}^\lambda$，则由(1.11)得

$$x=\overline{x}^\lambda\overline{e}_\lambda=\overline{x}^\lambda a_\lambda{}^\mu e_\mu=(a_\lambda{}^\mu\overline{x}^\lambda)e_\mu=x^\mu e_\mu$$

然因 $\{e_\mu\}$ 线性无关，故由

$$(a_\lambda{}^\mu\overline{x}^\lambda-x^\mu)e_\mu=0$$

可得 $a_\lambda{}^\mu\overline{x}^\lambda=x^\mu$。从而有

定理 1.3 在基底变换

$$\overline{e}_\lambda=a_\lambda{}^\mu e_\mu$$

下，向量 x 的分量变换如下：

$$x^\lambda=a_\mu{}^\lambda\overline{x}^\mu \tag{1.12}$$

反之，对于 V 的各基底 $\{e_\lambda\}$ 给定 n 个实数组 x^λ，如对应于基底

$\{e_\lambda\}$，$\{\overline{e}_\lambda\}$给定的 x^λ，$\overline{x}^\lambda$ 总满足(1.12)，则这样 n 个实数的组 x^λ 可看做一向量关于各基底$\{e_\lambda\}$的分量。这是因为 $x^\lambda e_\lambda=\overline{x}^\lambda\overline{e}_\lambda$ 恒成立，由此表达的向量设为 x 即可。

设 V，U 分别为 n 维与 m 维的向量空间。关于从 V 到 U 中的对应 $\phi: V\to U$，$x\to\phi(x)$ 定义如下。

定义 1.4 如果对于任意的 $x,y\in V$，$a\in R$，对应 $\phi: V\to U$ 满足

$$\phi(x+y)=\phi(x)+\phi(y),\quad \phi(ax)=a\phi(x)$$

那末称之为**线性映射**。

在 V，U 里分别取一组基底 $\{e_\lambda\}$，$\{f_i\}$，$i=1,2,\cdots,m$，则对于线性映射 ϕ，$\phi(e_\lambda)\in U$ 可表示为$\{f_i\}$的线性组合

$$\phi(e_\lambda)=b_\lambda{}^i f_i \tag{1.13}$$

的形状，而且决定下来系数所作 $m\times n$ 矩阵 $B=\{b_\lambda{}^i\}$。反之，如果给定一个 $m\times n$ 矩阵 $B=\{b_\lambda{}^i\}$，则由(1.13)定义 $\phi(e_\lambda)$，再对于 $x=x^\lambda e_\lambda\in V$，令 $\phi(x)=x^\lambda\phi(e_\lambda)$，由此可定义从 V 到 U 的线性映射。

如在 V 与 U 里各取一组基底，则按上述方法可见，从 V 到 U 的线性映射全体之集与 $m\times n$ 矩阵全体之集间有一一对应。

定义 1.5 如果线性映射 $\phi: V\to U$ 是一对一的，则称为在中同**构映射**。特别当 $\phi(V)=U$ 时，称为（在上）同构映射。

设 ϕ 为从 V 到 U 的线性映射，则下列三命题等价。

(i) ϕ 为在中同构映射。

(ii) $K=\{x|\ x\in V,\ \phi(x)=0\}$只是 V 中的零向量。

(iii) $\phi(e_\lambda)$，$\lambda=1,\cdots,n$，线性无关。

这时可见，在 V 的维数 n 与 U 的维数 m 之间，$m\geqq n$ 是必要的。

在 $m\times n$ 矩阵 $B=\{b_\lambda{}^i\}$ 中至少存在一个行列式不为 0 的 n 阶方阵时，则称 B 的秩为 n。

设对应于 ϕ 的矩阵为 $B=(B_\lambda{}^i)$，则(i)，(ii)，(iii)都和下列命题等价。

(iv) B 的秩为 n。

问题 1 试证零向量、逆元的唯一性.

问题 2 $0x=0$，$(-1)x=-x$.

问题 3 关于V的 r 个向量 $x_1,\cdots,x_r$，它们的线性组合全体作成的集$U=\{x|x=\sum_{i=1}^{r}a_ix_i,\ a_i\in \boldsymbol{R}\}$称为 $x_1,\cdots,x_r$ **张成**的空间.

(i) U为子空间.(ii) 如$x_1,\cdots,x_r$线性无关，则U是r维.（特别是只由一向量$x(\neq 0)$张成的空间称为直线，线性无关的x，y张成的空间称为平面）.

§2 对偶向量空间

实数全体的集$\boldsymbol{R}$关于普通的和、积成为一维欧氏空间. 考虑从n维向量空间V到一维向量空间$\boldsymbol{R}$的线性映射，对于任意的$x\in V$，如果$f(x)=g(x)$，那末规定 $f=g$. 从V到$\boldsymbol{R}$的线性映射的全体记做V^*：

$$V^*=\{f\,|\,线性映射f:\ V\to \boldsymbol{R}\}$$

这时，按自然方式定义的和与数量倍，V^*变成 n 维向量空间. 以下说明之.

对于 $f,g\in V^*$，$a\in \boldsymbol{R}$，$h=f+g$，$k=af$ 由

$$h(x)=f(x)+g(x),\ k(x)=af(x)$$

定义. 在这些式子里，右边是$\boldsymbol{R}$的元，故h,k都是从V到$\boldsymbol{R}$的对应. 因为

$$\begin{aligned}h(x+y)&=f(x+y)+g(x+y)\\&=f(x)+f(y)+g(x)+g(y)\\&=f(x)+g(x)+f(y)+g(y)\\&=h(x)+h(y),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h(ax)&=f(ax)+g(ax)=af(x)+ag(x)\\&=a(f(x)+g(x))=ah(x)\end{aligned}$$

所以 h 是线性映射. 同理可见 k 也是线性映射，故 $h,k\in V^*$. 容

易证实这样定义的运算满足定义 1.1 的(1.1)～(1.7)，故 V^* 是向量空间。特别是，V^* 的零向量将所有的 $x\in V$ 映为实数 0 之故，$0(x)=0$。此外，$f\in V^*$ 的逆元 $-f$ 由 $(-f)(x)=-f(x)$ 决定。

以下证明 V^* 是 n 维的. 设 V 的一组基底为 $\{e_\lambda\}$，再设 $\{f^\alpha\}$，$\alpha=1,\cdots,n$，为满足

$$f^\alpha(e_\lambda)=\delta_\lambda{}^\alpha \tag{2.1}$$

的 V^* 的 n 个元：$f^\alpha\in V^*$，其中 $\delta_\lambda{}^\alpha$ 是一种符号，意思是

$$\delta_\lambda{}^\alpha=\begin{cases}1, & \text{当 } \alpha=\lambda \text{ 时,}\\ 0, & \text{当 } \alpha\neq\lambda \text{ 时}\end{cases}$$

称为**克朗纳格**(*Kronecker*)的**德耳他**(*delta*)。

详细说明一下(2.1)。例如 f^1 是满足

$$f^1(e_1)=1,\ f^1(e_2)=0,\cdots,\ f^1(e_n)=0$$

的从 V 到 $\boldsymbol{R}$ 的线性映射。存在这样映射的原因是在(1.13)里令 $1\times n$ 矩阵 $(b_\lambda{}^i)$ 为 $b_1{}^1=1$，$b_\lambda{}^1=0(\lambda>1)$ 即可。

在这里，将 f^α 的指标写在右上角是为了清楚地区别开 V 的元与 V^* 的元。

再来证明 n 个 f^α 作成 V^* 的基底。首先设 $\{f^\alpha\}$ 的线性组合为 V^* 的零向量，则从 $a f^\alpha=0$，$a_\alpha\in\boldsymbol{R}$，根据

$$\begin{aligned}(a_\alpha f^\alpha)(e_\lambda)&=a_\alpha f^\alpha(e_\lambda)=a_\alpha\delta_\lambda{}^\alpha=a_\lambda\\ &=0(e_\lambda)=0\in\boldsymbol{R}\end{aligned}$$

得 $a_\lambda=0$，故 $\{f^\alpha\}$ 线性无关。其次对于任意的 $g\in V^*$，

$$g(x)=g(x\,e_\lambda)=x\,g(e_\lambda),$$

$$f^\lambda(x)=f^\lambda(x^\alpha e_\alpha)=x^\alpha f^\lambda(e_\alpha)=x^\alpha\delta_\alpha{}^\lambda=x^\lambda$$

得

$$g(x)=f^\lambda(x)g(e_\lambda)=g(e_\lambda)f^\lambda(x)$$

然因 $x\in V$ 是任意的，$g=g(e_\lambda)f^\lambda$，即 V^* 的任意的元 g 可表示为以 $g(e_\lambda)$ 为系数，$\{f^\lambda\}$ 的线性组合。可见 $\{f^\lambda\}$ 为 V^* 的基底。故得

定理 2.1 V^* 是 n 维向量空间。

定义 2.1 V^* 称为 V 的**对偶向量空间**。由(2.1)定义的 V^* 的基