郑元禄初等数学译丛

含参数的方程和不等式

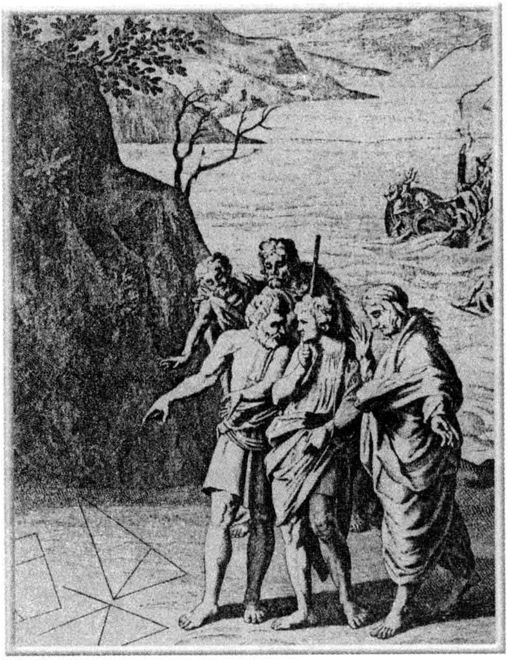
郑元禄 编译

- 无理不等式
- 三角方程与三角不等式
- 某些方程与不等式的图解法
- 导数在解某些参数问题中的应用
- 含参数问题的应用题

學 出版社
CHNOLOGY PRESS

郑元禄初等数学译丛

含参数的方程和不等式



郑元禄　编译

◎无理不等式

◎三角方程与三角不等式

◎某些方程与不等式的图解法

◎导数在解某些参数问题中的应用

◎含参数问题的应用题

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书主要介绍含参数的方程和不等式，二次方程和不等式，无理方程和不等式，三角方程和不等式的基本理论和解法.是一本关于不等式和方程的综述集.

图书在版编目（CIP）数据

含参数的方程和不等式/郑元禄编译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2012.8

ISBN 978-7-5603-3749-4

Ⅰ.①含… Ⅱ.①郑… Ⅲ.①方程-研究②不等式-研究 Ⅳ.①O122.2②O178

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 177375 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 李 慧
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 12 字数 153 千字
版 次 2012 年 8 月第 1 版 2012 年 8 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-3749-4
定 价 28.00 元

⊙译者的话

近几年来，在中考、高考和数学竞赛方面的试题中，含参数的方程和不等式的试题屡见不鲜。同不含参数的方程和不等式相比，含参数的方程和不等式所反映的数学内容（数量关系、空间形式和逻辑推理等）更加丰富多彩，解法更加错综复杂，对培养和提高中学生分析问题和解决问题的能力提供了良好的训练材料，因而受到广大中学师生的密切关注。但是，因为目前国内关于含参数的方程和不等式的教学参考书还很少，所以我们翻译了这本书。

这本书介绍了含参数的一次方程和不等式、二次方程和不等式、无理方程和不等式、指数方程和不等式、对数方程和不等式、三角方程和不等式的基本理论和解法。内容丰富，说理清楚，文字叙述通俗易懂。书中的例题很富代表性，练习题在书后附有答案、提示或解法。

本书可供中学生和中学数学教师参考，也可作为中学数学课外兴趣小组和选修课的补充材料。

本书的翻译出版工作,得到哈尔滨工业大学出版社的大力支持和热情帮助,译者在此向他们表示深切的感谢!

由于译者水平有限,译文难免有缺点和错误,敬请读者批评指正。

郑元禄

2012 年 5 月

⊙作者简介

郑元禄,男,1938 年生,福建省仙游县人.视力残疾人.1959 年至 1969 年任泉州市机关干部文化学校中学数学、高等数学、俄文教师。1965 年福建师范学院函授班毕业。1998 年泉州市第五中学高级教师。1962 年至 1983 年兼任中国科学技术情报研究所《数学文摘》、《力学译丛》杂志翻译,1993 年至 2002 年兼任电视大学高等数学与西方经济学教师。

主要事迹:1958 年至 2008 年出版了数学、物理学和教育学译著 530 多万字,其中包括《高等数学例题与习题集(三)(四)》、《新汉英数学词汇》、《概率论及其应用》、《新数学参考书》、《我们周围的概率》、《数学趣题巧解》、《含参数的方程和不等式》、《断裂力学》、《激光技术在流体力学中的应用》和《重点中学风采录》等 16 部书,并在《数学文摘》、《力学译丛》、《固体力学文摘》、《数学通报》、《数理天地》和《中学数学》等 30 多家国家级和省级杂志上发表了 210 篇文

章。1986年获福建省自学成才奖和泉州市自学成才奖,1993年获中国科学院科学出版基金。生平事迹被收入美国《世界名人录》、中国《世界名人录》、《世界文化名人辞海(华人卷)》、《中外名人辞典》、《世界人物辞海》、《世界优秀华人教育专家名典》、《中国世纪专家》、《世界优秀专家人才名典》、《中国当代数学家与数学英才大辞海》、《中国科技翻译家辞典》、《中国科普作家辞典》第2卷、《中华人物辞海(当代文化卷)》、《科学中国人中国专家人才库》、《中国职工自学成才者辞典》和香港电子图书《中国当代专家传记》、《中国当代翻译家传记》、《中国优秀自学成才传略》等40多部图书中。1992年获全国自学成才荣誉证书,2008年被中国翻译协会评为"中国资深翻译家",同年,被泉州市评为"十佳魅力老人",2009年被中国管理科学研究院经济论坛专家委员会聘为"首席研究员"。

⊙郑元禄译海遨游50载

在泉州市第五中学的图书馆里，经常会看到一位十分瘦弱、有些驼背的老人，在一堆外文资料里埋头抄抄写写。他就是泉州市第五中学的退休高级教师郑元禄。退休10多年来，郑元禄每天泡在学校图书馆里看书、翻译。

今年72岁的郑元禄，一出生左眼就先天性失明，右眼的视力也仅为0.1。1957年高中毕业后，他两次参加高考均落榜。但他没有气馁，坚持发奋自学。在中学他学的是俄语，后又通过自学掌握了英语，从此开始从事翻译事业。1962年至1984年，郑元禄担任中国科学技术情报研究所《数学文摘》和《力学译丛》杂志的兼职翻译。翻译是件相当复杂的语言转换工作，为力求译文的完整、准确，郑元禄总要反复推敲琢磨，常为译准一个字费尽心思。美国数学家费勒著的《概率论及其应用》是一部世界一流的概率论著作，翻译要求十分高，国内鲜有人能独立翻译。77万字的书，郑元禄硬是戴着厚厚镜片的眼镜，一字一句地“啃”

了出来。中国科学院学部委员、概率论专家王梓坤称赞其译著“对国内学术界很有助益”。

从1958年至今,郑元禄已经发表译著530多万字,出版作品16本。他1986年被评为全国自学成才标兵,1993年获中国科学院科学出版基金,2008年被中国翻译协会评为资深翻译家,2008年又被泉州市评为“十佳魅力老人”。

眼下,郑元禄应一些出版社的约稿,忙得不亦乐乎。觉得累了,他就会看看名人传记,勉励自己坚持下去。他说:“有生之年,我要作出一些贡献,不让人生虚度。”

——摘自《福建老年报》(2009年4月7日)作者张巍

目录

第0章 引言

我们来研究定义在集合 M 上的函数 $y=f(x)$ 和定义在集合 N 上的函数 $y=\varphi(x)$.

如果某个集合 r 既是 M 的子集，又是 N 的子集，并且等式

$$f(x)=\varphi(x)$$

成立，那么我们就说这两个函数在集合 r 上恒等，这时等式

$$f(x)=\varphi(x)$$

叫做集合 r 上的恒等式.

例如，函数

$$y=\sqrt{(x-2)^2} \text{ 和 } y=x-2$$

在集合$[2,\infty)$上恒等，而当 x 为任意实数时，函数

$$y=(x-3)^2 \text{ 和 } y=x^2-6x+9$$

恒等. 由此推出，等式

$$\sqrt{(x-2)^2}=x-2$$

是集合$[2,\infty)$上的恒等式，而等式

$$(x-3)^2=x^2-6x+9$$

是集合 $\mathbf{R}$ 上的恒等式.

常常需要研究这样两个函数，对于

这两个函数,不知道它们恒等时自变量取值的集合是什么.在这种情况下,等式

$$f(x)=\varphi(x) \tag{1}$$

叫做方程.它表示这样一个问题:寻求$f(x)$和$\varphi(x)$相等时的x值.这时未知值x叫做方程的根(解).解方程就是求它的根(解).

我们把函数f和φ的定义域的交集叫做方程(1)的定义域.

例如,方程

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{10-x}=5$$

的定义域是不等式组

$$\begin{cases}x-3\geqslant 0\\10-x\geqslant 0\end{cases}$$

的解集,即[3,10].

方程$\frac{3x-5}{x-1}=7$的定义域是除1以外的所有实数的集合.

不管怎样,解方程都被转化为巧妙地利用方程等价性理论并注意到相应函数的性质.

为了简化,我们扼要地叙述这个理论的基本原理.

如果有两个方程

$$f(x)=\varphi(x)$$

和

$$\psi(x)=F(x) \tag{2}$$

并且方程(1)的任何一个根也是方程(2)的根,那么方程(2)叫做方程(1)的推论.

例如,方程

$$x^2-3x-4=0 \tag{3}$$

是方程

$$3x-2=x+6 \tag{4}$$

的推论. 方程(4)的根 $x=4$(唯一的)也是方程(3)的根.

逆命题不正确,这就是说,方程(4)不是方程(3)的推论,因为方程(3)还有一个根 $x=-1$,这个根不满足方程(4).

如果方程(1)、(2)的解集相等,那么这两个方程叫做等价方程. 换句话说,如果方程(1)的任何一个根都是方程(2)的根,反之,方程(2)的任何一个根都是方程(1)的根,那么方程(1)和方程(2)叫做等价方程*. 换句话说,如果两个方程中的每一个方程都是另一个方程的推论,那么这两个方程是等价的.

例如,方程

$$2x=10$$

和

$$\sqrt{2x-1}=3$$

是等价的. 数5是其中每个方程的解.

方程

$$2x-6=0$$

和

$$x^2-7x+12=0$$

是不等价的. 第一个方程的根也是第二个方程的根,但是,第二个方程还有根 $x=4$ 不满足第一个方程.

应该指出,方程等价性概念依赖于根的哪些值是容许的. 例如,方程

---

* 两个没有根的方程也被认为是等价方程.

$$2x-5=0 \text{ 和} (x-2.5)(x^2-7)=0$$

一般说来不是等价的,因为第一个方程有唯一的根 $x=2.5$,而第二个方程却有三个根

$$x_1=2.5,\ x_2=-\sqrt{7},\ x_3=\sqrt{7}$$

但是,如果只考虑根的有理值,那么这两个方程是等价的.

我们再研究两个方程

$$2x-3=0 \text{ 和} (x^2+3)(2x-3)=0$$

在复数域上*,它们是不等价的,因为第一个方程有根 $x=1.5$,第二个方程有三个根

$$x_1=1.5,\ x_2=-\sqrt{3}\mathrm{i},\ x_3=\sqrt{3}\mathrm{i}$$

在实数域上,这两个方程是等价的. 在本书中,我们将研究某些类型的一元方程的解法. 并且我们将认为,根的容许值只属于实数集合.

我们表述关于方程等价性的基本定理如下:

定理 1 如果 $F(x)$ 在方程 $f(x)=\varphi(x)$ 的定义域上存在,那么方程

$$f(x)=\varphi(x)$$

和

$$f(x)+F(x)=\varphi(x)+F(x)$$

是等价的.

从上述定理推出,如果把被加项前面的符号改变成相反符号,那么被加项可以从方程的一边移到另一边.

应该注意到,把表达式 $F(x)$ 加到方程的两边所得

---

* 具有下列性质的任何数集叫数域:这个集合的任何两个数的和、差、积、商(除数不为0)是这个集合的数.

到的方程,叫原方程等价. 但是如果这种添加 $F(x)$ 的过程带有某些变换(包括合并同类项),那么等价性可能被破坏.

例如,如果在方程

$$\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-7}=1-\sqrt{x-7}$$

的两边加上表达式 $\sqrt{x-7}$,那么得到与原方程等价的方程

$$\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-7}+\sqrt{x-7}=1-\sqrt{x-7}+\sqrt{x-7}$$

但是合并同类项后所得的方程 $\sqrt{2x-1}=1$,已经不再等价于原方程了. 它的根 $x=1$ 不是原方程的解. 最后这个方程的定义域比原方程的定义域大得多. 严格说来,原方程等价于一个没有解的不等式组

$$\begin{cases}\sqrt{2x-1}=1\\ x\geqslant 7\end{cases}\tag{5}$$

定理 2　如果表达式 $F(x)$ 在方程

$$\varphi(x)=f(x)$$

的定义域上存在,将方程(1)的两边乘以 $F(x)$,那么所得的方程

$$f(x)\cdot F(x)=\varphi(x)\cdot F(x)\tag{6}$$

是方程(1)的推论.

如果这时 $F(x)\neq 0$,那么方程(1)和方程(6)等价.

例如,把方程

$$2x-3=5\tag{7}$$

的两边乘以 $(x-5)$,得到方程

$$(2x-3)(x-5)=5(x-5)\tag{8}$$

它是方程(7)的推论. 方程(7)的根 $x=4$ 满足方程(8),但是方程(8)的第二个根是方程(7)的增根.

方程

$$2x=3$$

和方程

$$2x(\cos^2x+1)=3(\cos^2x+1)$$

等价.

这里 $F(x)=\cos^2x+1\neq0$.

要求 $F(x)$ 在方程(1)的定义域上存在,这是极重要的. 如果表达式 $F(x)$ 在方程(1)的定义域上失去意义,那么方程(1)的两边乘以 $F(x)$,可能引起失根. 例如,方程

$$x^2+7x=18$$

有根 $x_1=2$ 和 $x_2=-9$. 如果用 $F(x)=\dfrac{1}{x+9}$乘以这个方程的两边,那么得到方程

$$\frac{x^2+7x}{x+9}=\frac{18}{x+9}$$

它只有一个根 $x=2$,即根 $x=-9$ 失去了.

定理 3　方程

$$f^n(x)=\varphi^n(x) \tag{9}$$

(其中自然数 $n\geqslant2$)是方程

$$f(x)=\varphi(x)$$

的推论.

这就是说,方程(1)的任何一个根也是方程(9)的根,但是方程(9)可能还有其他不满足方程(1)的根. 换句话说,在方程(1)的两边作 n 次乘方时,方程可能得到增根.

例如,把方程

$$\sqrt{x-1}=3-x$$

的两边平方,得到方程

$$x-1=9-6x+x^2$$

即

$$x^2-7x+10=0$$

由此得 $x_1=2$, $x_2=5$.

经检验我们证实,数5是原方程的增根.

我们指出,如果 $n=2k+1$,那么方程

$$f(x)=\varphi(x)$$

和

$$f^{2k+1}(x)=\varphi^{2k+1}(x) \qquad (1,\mathrm{a})$$

中每一个是另一个的推论,即方程(1)和方程(1,a)等价.

关于方程

$$f(x)=\varphi(x)$$

和

$$f^{2k}(x)=\varphi^{2k}(x) \qquad (1,\mathrm{b})$$

不能肯定地说出上述结论.

方程(1,b)是方程(1)的推论.但是从方程(1,b)得出的方程是

$$|f(x)|=|\varphi(x)| \qquad (1,\mathrm{c})$$

它只有当 $f(x)\cdot\varphi(x)\geqslant 0$ 时才能化为方程(1).如果在方程(1)的定义域的某一部分上,$f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 具有相反符号,即 $f(x)\cdot\varphi(x)<0$,那么解方程(1,c)就化为求下列两个方程的根

$$f(x)=\varphi(x)$$

和

$$f(x)=-\varphi(x) \qquad (1,\mathrm{d})$$

方程(1,d)的根是方程(1)的增根,即在这种情况下,方程(1)和方程(1,b)不等价.我们用例子来说明