南开哲学教材系列

数理逻辑的思想与方法

李　娜　编著

南開大學出版社

南开哲学教材系列

数理逻辑的思想与方法

李 娜 著

安徽大学图书馆
藏 书
www.lib.ahu.edu.cn

南开大学出版社
天 津

图书在版编目(CIP)数据

数理逻辑的思想与方法 / 李娜著. —天津: 南开大学出版社,2012.10

南开哲学教材系列

ISBN 978-7-310-04030-8

Ⅰ.①数… Ⅱ.①李… Ⅲ.①数理逻辑—高等学校—教材 Ⅳ.①O141

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 217284 号

版权所有 侵权必究

南开大学出版社出版发行

出版人:孙克强

地址:天津市南开区卫津路 94 号 邮政编码:300071

营销部电话:(022)23508339 23500755

营销部传真:(022)23508542 邮购部电话:(022)23502200

*

河北昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司印刷

全国各地新华书店经销

*

2012 年 10 月第 1 版 2012 年 10 月第 1 次印刷

210×148 毫米 32 开本 10.5 印张 2 插页 299 千字

定价:26.00 元

如遇图书印装质量问题,请与本社营销部联系调换,电话:(022)23507125

序

1983 年,我开始学习数理逻辑.经过近二十年的学习,我对数理逻辑的本质和全貌不断有所认识.特别是,对数理逻辑的奠基者莱布尼茨的梦想——使人类所有的一切推理都归结为计算:“我们要造成这样的一个结果,使所有的推理错误都只成为计算的错误,这样当争论发生的时候,两个哲学家同两个计算家一样,用不着辩论,只要把笔拿在手里,并且在计算器前坐下,两人异口同声地说:‘让我们来计算一下吧!’”有许多新的领悟.因此,想通过本书,把自己对数理逻辑基本思想和方法的理解介绍给读者.

全书包括六章.第一章,主要介绍集合、集合运算的基本思想和方法.这一章的目的在于为以后各章的使用奠定基础.第二章至第四章,介绍命题逻辑的基本思想和方法.第五章和第六章介绍狭谓词逻辑的基本思想和方法.

这本书是以作者的《现代逻辑的方法》(参考文献[28])为基础完成的.本书修订了《现代逻辑的方法》一书中的第一章至第四章,去掉了后三章,增加了两章.至此,本书较完满地完成了对作者建立的逻辑公理系统 QC 的讨论.

本书有以下特点:

1.各章联系紧密,不相互独立. 后面各章节中的内容,有时需要用到前面的结果.

2.选材适当,体系完整. 本书在选材上,只涉及数理逻辑的基本内容(包括命题逻辑和狭谓词逻辑),不涉及传统逻辑,也不涉及现代逻辑的其他分支.因此,本书的体系是作者的独创.另外,为了使读者更好地理解和掌握数理逻辑的思想和方法,大部分章节都配有一定量的练习.

3.论述准确. 本书的目的,在于介绍数理逻辑的思想和方法.因

此，本书在思想的分析、理论的阐述、定理的证明等方面都充分体现了这一特点.

4.有自己新的研究成果. 本书在作者本人建立的命题演算系统PC和一阶谓词演算系统QC的基础上，证明了:(1)系统PC和QC的相容性、可靠性和完全性以及系统PC的独立性;(2)命题演算系统PC和一阶谓词演算系统QC分别与自然推理系统FPC和FQC的等阶性.

由于能力、时间和篇幅所限，本书难免存在不足和错误，敬请读者批评指正.

李娜

2005.7

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

目　录

第一章　集合论初步

本章我们将介绍集合论中的一些最基本的内容，这些内容包括：集合的概念、运算和关系. 其目的是为了方便后面几章的讨论. 为此，我们把这一章叫做集合论初步.

第一节　基本概念

1.1.1　关于集合的定义

这一章的主要概念是集合. 什么是集合？究竟怎样定义集合？这些问题至今没有解决. 但是，集合的概念，至少从表面上理解是绝对简单的. 集合论的创始人 G. 康托尔(Cantor)曾把集合定义为：我们的直观或思维中确定的并可区分的对象所概括成的一个总体. 组成集合的那些对象叫元素. 所以有：2003 年 9 月南开大学所有注册学生的集合，所有奇数的集合，所有粉红色猫的集合. 从康托尔的定义可以看出，集合不是现实世界的物体，像书或月亮，它们是由我们的思想，而不是由我们的双手创造的. 我们的思想具有抽象的能力，还有把各种不同的物体根据某些共同属性把它们汇聚在一起形成具有那种属性的所有对象构成的集合的这样的思考能力. 于是对含有确定的数字 2，4，7，12，13，29，35，1 200 的集合，我们很难看出有什么把它们联系在一起，但是只有一个事实，即：我们在思想中把它们汇集在一起. 从康托尔的定义还可以看出，一个集合应具有两个重要特征：一是集合中的元素是确定的，二是集合的元素之间是可以区分的. 在此基础上，康托尔建立了集合论体系，即朴素集合论. 但是，他的集合论体系并不完善. 1902 年 B. 罗素(Russell)在康托尔的朴素集合论中发现了一个悖论. 关于这个悖论，我们将在后面讨论. 另外，在康托尔的集合定义中，像“思维”这样的

概念在数学中是不能定义的.基于以上种种原因,现在,人们只给集合作一个描述性的说明.而康托尔本人关于集合的定义就是一个较好的对集合的描述性说明.总之,我们可以把集合理解成:具有某种属性的事物的全体,或者是一些确定对象的汇总.构成集合的事物或对象称为集合的元素.集合也简称为集.

我们不给集合这个概念下严格的定义,但这并不影响人们对集合的理解.我们可以毫不费力地举出许许多多集合的例子来.例如,包括零在内的全体自然数组成的集合,汉语拼音中21个声母组成的集合.为了便于理解,下面再举一些集合的例子.不过,在本章中,我们将很少关注人或分子的集合,更多关注有关数学对象的集合.

例 1.1 区间$[0,1]$上所有连续函数组成的集合.

例 1.2 直线$x+y-2=0$上所有点组成的集合.

例 1.3 小于20的自然数组成的所有集合的集合.

定义 1.1 由有限个元素组成的集合称为有限集.不是有限集的集合称为无限集.

上面例1.1和例1.2中的集合都是无限集,例1.3中的集合是有限集.

1.1.2 集合的表示方法

约定:在本章中,我们用大写字母$A,B,C,\cdots,X,Y,Z$(或加下标)表示集合或集,用小写字母$a,b,c,\cdots,x,y,z$(或加下标)表示集合的元素.常用的特殊集合可以用专门的记号表示.如:

例 1.4 用$\mathbf{N}$表示全体自然数的集合,用$\mathbf{I}$表示整数集合,用$\mathbf{Q}$表示有理数集合,用$\mathbf{R}$表示实数集合.

定义 1.2 如果a是集合A的元素,记作$a\in A$,读作a属于A;如果a不是集合A的元素,记作$a\notin A$,读作a不属于A.符号$\in$表示隶属关系.

例 1.5 由于$\mathbf{N}$表示全体自然数的集合,所以,$0\in\mathbf{N}$,$3\in\mathbf{N}$,$n\in\mathbf{N}$,但$\frac{1}{3}\notin\mathbf{N}$.

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

我们这里所讨论的集合，都具有确定性的特征. 也就是说，一个元素是否属于某个集合是可以判定的. "是"或"不是"二者必居其一且只居其一. 亦即，对于任意的 x 和 A，$x\in A$ 和 $x\notin A$ 二者必居其一且只居其一. 例如，在全体偶数组成的集合中，0，2，4，…都是它的元素，而 1，3，5，…都不是它的元素.

一个集合是由它的元素确定的. 也就是说，当构成集合的元素给定之后，这个集合也就随之确定. 因此，描述一个集合，只要描述它的元素就行了. 常用的表示集合的方法有以下两种：

(1)列举法：这种方法是将集合中的全体元素枚举出来，元素之间用逗号隔开，然后用花括号{ }括起来. 如{真，假}表示由真和假两个元素组成的集合. 设 A 是由最小的 4 个自然数组成的集合，那么 A 可以记作 $\{0,1,2,3\}$. 一般地，如果集合 A 有 n 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，那么记作

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

(2)描述法：设 $\varphi(x)$ 表示某个与 x 有关的性质，A 为满足 $\varphi(x)$ 的一切 x 组成的集合，则 A 可记作

$$A=\{x\mid\varphi(x)\}.$$

例如，令 A 表示全体奇数的集合，则 $A=\{x\mid x$ 是奇数$\}$；令 B 表示由 0 至 2 中最小素数的集合，则 $B=\{x\mid x\in\mathbf{N}$ 并且 $0\leqslant x\leqslant 2\}$，即 $B=\{2\}$；令 C 表示全体偶数的集合，则 $C=\{x\mid x$ 是偶数$\}$或者 $C=\{x\mid x=2n$ 并且 $n\in\mathbf{N}\}$.

关于集合的表示方法需要注意以下几点：

(1)一个集合中的元素应是互不相同的，因而在集合 $\{a,b\}$ 中，$a\neq b$. 集合 $\{a,a\}$ 仅表示以 a 为元素的单元集 $\{a\}$，即 $\{a\}$ 就是 $\{a,a\}$.

(2)集合中的元素不规定顺序，因而 $\{a,b\}$ 就是 $\{b,a\}$. 所以，我们习惯上把 $\{a,b\}$ 叫做无序对集.

(3)集合的两种表示法有时可以互相转化. 这一点我们在前面已经看到. 0 至 2 中最小素数的集合既可以表示成 $\{2\}$，又可以表示成 $\{x\mid x\in\mathbf{N}$ 并且 $0\leqslant x\leqslant 2\}$. 但用性质来刻画集合是最基本的方法.

(4)集合的元素本身还可以是一个集合. 如 $A=\{1,\{1\}\}$，这里 1 和

$\{1\}$都是集合 A 的元素，但$\{1\}$本身又是由数 1 做成的单元素集. 又如，$B=\{a,b,\{a,b\}\}$.

(5)集合的元素可以是具体的对象，如：{鲁迅、巴金}，{太阳，月亮}；也可以是抽象的，如：$\{a,b\}$，$\{x,y\}$. 甚至在一个集合中，允许一些元素是具体的，另一些元素是抽象的. 如：{a，b，鲁迅，巴金}.

(6)全体集合的整体是一个类，不是集合，并规定用 V 表示.

集合以及集合之间的关系可以用图形表示，这种图形称为文氏(Venn)图. 文氏图是用一个简单的平面区域来代表一个集合，如图 1-1. 集合的元素用区域内的阴影表示.

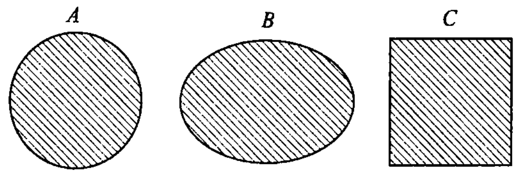

图 1-1

1.1.3 罗素悖论

在逻辑学中，悖论是指这样一个命题 α：由 α 出发，可以找到一个命题 β. 然后，若假定 β，就可以推出非 β；若假定非 β，就可以推出 β. 罗素曾构造了这样一个集合，用我们现在使用的符号可以表示为：

$$T=\{x \mid x \notin x\}.$$

也就是说，T 是由所有那些不属于自己的集合所组成. 现在我们要问：集合 T 是否属于它自己？

倘若假定 $T\in T$，因为 T 的任何元素 x 都满足条件 $x\notin x$，所以 $T\notin T$，这与假定 $T\in T$ 矛盾. 反之，倘若假定 $T\notin T$，因为 T 是由所有那些满足条件 $x\notin x$ 的 x 所组成，所以 $T\in T$，这与假定 $T\notin T$ 矛盾. 这个矛盾是罗素 1902 年发现的集合论悖论，现在简称为罗素悖论.

由于罗素悖论所涉及的概念都是朴素集合论中的基本概念——集合与元素，因而罗素悖论的出现立即震动了整个数学界，引起了数学史上的第三次危机. 为了消除悖论，人们开始寻找解决悖论的各种途径和

方法. 由于当时希尔伯特刚为欧氏几何学成功地建立了公理系统，因此，大家普遍认为采用公理化的方法对集合作一些必要的限制是适当的. 1908 年，E. 策梅洛(Zermelo)给出了第一个集合论公理系统，现在人们称它为 Z 系统，后经 T. 斯柯伦(Skolem)、A. 弗兰克尔(Frankel)等人的改进，形成了著名的 ZF 公理系统. 然而，ZF 系统的展开是形式化的，它是以带等词"$=$"和隶属关系"$\in$"的狭谓词演算为基础，加上关于集合基本性质的非逻辑公理组成的形式演绎体系. 它的非逻辑公理有：外延公理、空集公理、配对公理、并集公理、幂集公理、子集公理、无穷公理、替换公理、正则公理. 如果加上选择公理 AC 时，得到的系统就是 ZFC(ZF+AC). 在 ZFC 公理系统中，子集公理是一种受到限制的概括原则. 用这条公理只能得到与已构造的集合相比并不太大的集合. 这样就有效地阻止了悖论的产生，并且还能够得出数学中所需要的东西. 除 ZF 系统以外，还有罗素为解决悖论建立的类型论，冯・诺伊曼(Von Neumann)、P. 贝奈斯(Bernays)和 K. 哥德尔(Gödel)等人建立的集合论的 GB 公理系统. 有兴趣的读者请参看文献[1].

下面的讨论将是非形式的，因而会出现一些不够严格的情况. 形式的讨论，可作为第四章之后的练习.

1.1.4 集合的包含和相等关系

定义 1.3 如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，即"对任意的 a，若 $a\in A$，则 $a\in B$"，那么称集合 A 为集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$ 或者 $B\supseteq A$，读作 A 包含于 B 或者 B 包含 A. 符号"$\subseteq$"或者"$\supseteq$"表示集合之间的包含关系. 即：$A\subseteq B$ 当且仅当对任意的 a，如果 $a\in A$，则 $a\in B$. 图 1-2 的阴影部分的区域表示 $A\subseteq B$. 否则，如果 A 中有元素不属于 B，即"存在 x，$x\in A$ 并且 $x\notin B$"，则称 A 不是 B 的子集. 记作 $A\nsubseteq B$，读作 A 不包含于 B 或者 B 不包含 A. 如图 1-3.

例 1.6 设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{a,b,c,d\}$，$C=\{a,b\}$，则 A，B 和 C 三者之间的包含关系为：$A\subseteq B$，$C\subseteq A$ 和 $C\subseteq B$；还有 $A\subseteq A$，$B\subseteq B$ 和 $C\subseteq C$(为什么?). 除了这 6 种包含关系外，A，B 和 C 三者之间再无别的包含关系了.

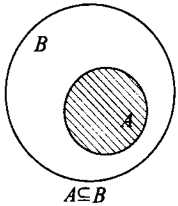

图 1-2

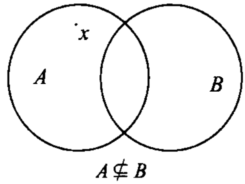

图 1-3

例 1.7 设 $A=\{a,\{a\},\{a,b\}\}$，$B=\{a\}$，$C=\{\{a\}\}$，$D=\{\{a\},\{a,b\}\}$，则 B，C 和 D 都是 A 的子集. 即：$B\subseteq A$，$C\subseteq A$ 并且 $D\subseteq A$.

包含关系具有下面的性质：

(1)$A\subseteq A$，即集合 A 是它自己的子集，换句话说，集合的包含关系具有自返性. 因为命题

对任意的 x，如果 $x\in A$ 则 $x\in A$

总成立.

(2)如果 $A\subseteq B$ 并且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$，即集合的包含关系具有传递性. 因为，由 $A\subseteq B$ 可得

对任意的 x，如果 $x\in A$ 则 $x\in B$.

再由 $B\subseteq C$ 可得

对任意的 x，如果 $x\in B$ 则 $x\in C$.

因为所有 A 中的元素都在 B 中，而所有 B 中的元素又都在 C 中，根据定义 1.3 可得对任意的 x，如果 $x\in A$，则 $x\in C$，即：$A\subseteq C$.

定义 1.4 设有两个集合 A 和 B，如果 $A\subseteq B$ 并且 $B\subseteq A$，那么称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$，读作 A 等于 B. 符号“$=$”表示集合之间的相等关系. 否则，称集合 A 不等于集合 B，记作 $A\neq B$.

例 1.8 令 X 是一个恰好包含数字 2，3，5 的集合，Y 是一个由所有大于 1 而小于 7 的素数组成的集合. Z 是满足方程 $x^3-10x^2+31x-30=0$ 的所有解组成的集合. 由定义 1.4 可得：$X=Y$，$X=Z$ 并且 $Y=Z$. 这个例子说明，对于同一个集合，我们有不同的描述.

利用集合的包含和相等的概念，我们可以定义真子集和真包含的概念.

定义 1.5 设有两个集合 A 和 B，如果 $A\subseteq B$ 并且 $A\neq B$，那么称

集合 A 是集合 B 的真子集. 记作 $A\subset B$ 或者 $A\subsetneqq B$,读作 A 真包含于 B.

例 1.9 在例 1.7 中,集合 B,C 和 D 都是 A 的真子集.

例 1.10 令 $\mathbf{Z}^+=\{x\mid x\in\mathbf{Z}$ 且 $x>0\}$,$\mathbf{Q}^+=\{x\mid x\in\mathbf{Q}$ 且 $x>0\}$,$\mathbf{R}^+=\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x>0\}$,分别是正整数集、正有理数集和正实数集,显然,$\mathbf{Z}^+\subset\mathbf{Z}$,$\mathbf{Q}^+\subset\mathbf{Q}$,并且 $\mathbf{R}^+\subset\mathbf{R}$,还有:$\mathbf{Z}^+\subset\mathbf{Q}^+\subset\mathbf{R}^+$.

真包含关系具有下面的性质:

(1)如果 $A\subset B$,则 $A\subseteq B$;

(2)$A\not\subset A$;

(3)如果 $A\subset B$,则 $B\not\subset A$;

(4)若 $A\subset B$ 且 $B\subset C$,则 $A\subset C$.

由定义 1.5 和定义 1.3,以上性质是显然成立的.

1.1.5 空集和幂集

定义 1.6 不含任何元素的集合称为空集,记作$\varnothing$.

例 1.11 设集合 $A=\{x\mid x^2+1=0$ 且 $x\in\mathbf{R}\}$.

因为方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内无根,故 $A=\varnothing$.

空集具有下面的性质:

(1)对任意的集合 A,都有$\varnothing\subseteq A$,即空集是任意集合的子集.

(2)$\varnothing$是唯一的.

事实上,(1)成立. 因为对于任给的集合 A,如果$\varnothing\not\subseteq A$,那么,就存在 x,使得

$$x\in\varnothing\text{并且 }x\notin A,$$

这与$\varnothing$的定义矛盾. 因此,对任意的集合 A,都有$\varnothing\subseteq A$. (2)也成立. 假设$\varnothing_1$ 和$\varnothing_2$ 都是空集. 因为$\varnothing_1$ 是空集,根据空集的性质(1),可得:$\varnothing_1\subseteq\varnothing_2$. 同理可得:$\varnothing_2\subseteq\varnothing_1$. 再根据定义 1.4 可得:$\varnothing_1=\varnothing_2$.

注意:(1)$\varnothing\notin\varnothing$,但$\varnothing\subseteq\varnothing$;

(2)$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$,但$\varnothing\neq\{\varnothing\}$;

定义 1.7 若 $A\neq\varnothing$,则称 A 为非空集合.

定义 1.8 设 A 是一个集合,由 A 的所有子集组成的集合叫做 A

的幂集，记作 $P(A)$，即

$$P(A)=\{x \mid x\subseteq A\},$$

亦即

$$x\in P(A)\text{当且仅当 } x\subseteq A.$$

幂集具有下面的性质：

(1)$\varnothing\in P(A)$，即 $P(A)$是非空的；

(2)$A\in P(A)$，即 A 是 $P(A)$的元素.

事实上，由空集的性质(1)和包含关系的性质(1)以及定义 1.8，立刻得幂集的性质(1)和(2).

例 1.12 如果集合 $A=\{$真，假$\}$，则 $P(A)=\{\varnothing$，$\{$真$\}$，$\{$假$\}$，$\{$真，假$\}\}$. 当 $B=\{a,b,c\}$时，$P(B)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$.

一般地，如果集合 A 有 n 个元素，则 $P(A)$有 2^n 个元素.

在例 1.12 中，集合 $P(A)$和 $P(B)$的元素本身也是集合. 因此，我们有：

定义 1.9 如果一个集合中的每个元素也都是集合，那么称它是一个集合族. 集合族通常用花体字母 $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C}$ 等表示.

1.1.6 练习

1. 判断下列元素是否属于所给集合：

南京、东京、北京，集合是中国的城市.

2. 在下面所给的集合中，指出哪些是有限集，哪些是无限集.

(1)偶数集；

(2)地球上的所有动物；

(3)南开大学哲学系的所有学生；

(4)有理数集.

3. 用两种方法表示下面的集合：

(1)小于 4 的非负整数的集合；

(2)5 的整倍数的集合；

(3)3 的各正整数次幂的集合.

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com