成人高等工科院校用书

高等数学

第三册

巫锡禾 编

华东纺织工学院夜大学

成人高等工科院校用书

高等数学

（第三册）

巫锡禾 编

华东纺织工学院夜大学

1984年3月

目　录

第十四章　重　积　分

一元函数$f(x)$在数轴上的闭区间$[a, b]$上，按固定格式构造和式取极限为定积分．二元函数$f(x, y)$在平面闭区域D上，按固定格式构造和式取极限为二重积分．三元函数$f(x, y, z)$在空间闭区域Ω上，按固定格式构造和式取极限为三重积分．二重以上的积分统称重积分，可见，重积分是定积分的推广．

本章学习指导

本章重点是重积分的概念及其计算．难点是化重积分为定积分计算．

(1) 相对照　对照定积分学习二重积分，看一下两者相同与不同之处．再对照二重积分学习三重积分，看一下怎样把二重积分推广到三重积分．

(2) 造和式　弄清定积分、二重积分、三重积分的积分和是怎样构造的．

(3) 明区别　搞清定积分、二重积分、三重积分的主要区别是被积函数和积分域．

(4) 抓规律　二重积分，三重积分均化为定积分来计算．但三重积分化为定积分时，可以先一次定积分后再二重积分，也可以先二重积分后定积分．

(5) 重变换　要重视把直角坐标系下的二重积分化为极坐标系下来计算．把直角坐标系下的三重积分化为柱面坐标或球面坐标来计算．

(6) 明意义　弄清二重积分的几何、物理意义．三重积分在特定条件下才有几何意义．

(7) 会应用　会用重积分解决几何、物理上的一些问题．

14.1 两个实际问题

1．曲顶柱体的体积问题

(1) 什么叫曲顶柱体

常见的火车车厢就是一个曲顶柱体．它的特点是，顶部上盖着一个曲面，侧面是柱面，底面是平面上的一个闭区域．

在空间直角坐标系中的曲顶柱体是这样规定的：底面是xOy坐标面的一个闭区域D(D具有有限的面积)，侧面是以D的边界曲线为准线而母线平行于z轴的柱面，顶部是一个曲面$z=f(x, y)$．这里$f(x, y)>0$且在D上连续(图 14.1)．

如果顶部是平行于底面的平面，这种柱体叫平顶柱体，如平顶房屋就是平顶柱体．我们知道计算平顶柱体的体积公式为：

平顶柱体体积＝底面积×高．

如何计算曲顶柱体的体积呢？

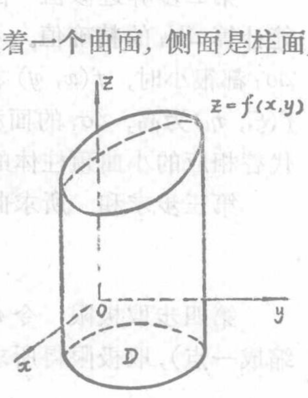

图　14.1

利用定积分可以计算绕轴旋转的旋转体的体积，平行截面面积为已知的立体的体积．对

于一般立体的体积单用定积分是不能计算的。但是,如果会计算曲顶柱体的体积,则一般立体的体积也就会计算了。为什么呢?

如图14.2所示的一般立体,它由两个曲面S_1和S_2围成,它的体积等于以S_1为曲顶的曲顶柱体体积,减去以S_2为曲顶的曲顶柱体体积。这样把一般立体的体积归结为曲顶柱体体积的代数和。因此求曲顶柱体的体积显得很有代表性。

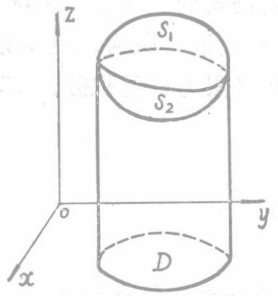

图 14.2

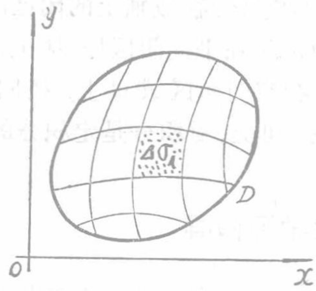

图 14.3

(2) 求曲顶柱体体积的四个步骤

求曲顶柱体体积的方法,类似于求曲边梯形面积的方法,采用分割,算近似值,求和,取极限四个步骤。

第一步分割　用一组曲线网把闭区域D(曲顶柱体的底面)任意分成n个子区域(图14.3)记作:

$$\Delta\sigma_1,\ \Delta\sigma_2,\ \Delta\sigma_3,\ \cdots,\ \Delta\sigma_n.$$

分别以这些子区域$\Delta\sigma_i(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$的边界曲线为准线,作母线平行于$z$轴的柱面,这些柱面把曲顶柱体的曲顶也分成$n$个子曲面,从而所求曲顶柱体被分成$n$个窄小的小曲顶柱体,它的体积记作

$$\Delta V_1,\ \Delta V_2,\ \Delta V_3,\ \cdots,\ \Delta V_n.$$

显然,所求曲顶柱体的体积V等于这些小曲顶柱体体积之和,即

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i.$$

第二步算近似值　由于整体量V与部分量ΔV_i只有大小差别,没有本质差别,因而不能计算ΔV_i的精确值。但是,由于$f(x,\ y)$在D上连续并且是正的。因此,当所有子区域$\Delta\sigma_i$都很小时,$f(x,\ y)$在$\Delta\sigma_i$上变化不大,在$\Delta\sigma_i$中任取一点$(\xi_i,\ \eta_i)$,用这点的竖坐标$f(\xi_i,\ \eta_i)$为高,$\Delta\sigma_i$的面积为底(子区域的面积也用记号$\Delta\sigma_i$表示)的平顶柱体体积,去近似代替相应的小曲顶柱体的体积,即$\Delta V_i\approx f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i$, $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$.

第三步求和　所求曲顶柱体的体积V近似等于n个窄小平顶柱体体积之和,即

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

第四步取极限　令$n\to\infty$(表示子区域的个数无限增多),$\lambda\to0$(表示所有子区域$\Delta\sigma_i$都缩成一点),取极限得所求曲顶柱体体积的精确值为

$$V=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

可见,曲顶柱体的体积问题,归结为二元函数$z=f(x,\ y)$在闭区域D上构成的固定格式

的 n 项和的极限问题。

同解决曲边梯形的面积问题相对照，这里也有两个任意，一是分割闭区域 D 的曲线网是任意的，二是子区域 $\Delta\sigma_i$ 上取的点 $(\xi_i,\ \eta_i)$ 是任意的。

2. 平面薄片的质量问题

设有一平面薄片占有 xOy 面上的闭区域 D，它在点 $(x,\ y)$ 处的面密度 $\rho=\rho(x,\ y)$ 是 D 上的连续函数并且 $\rho(x,\ y)>0$. 求这薄片的质量 M.

如果薄片的面密度 ρ 是常数（均匀薄片），可用公式

质量＝面密度×薄片的面积。

来计算薄片的质量 M. 现在薄片的面密度 $\rho=\rho(x,\ y)$ 是随 $x,\ y$ 而变的变密度（非均匀薄片），当然不能直接用上面的公式来计算它的质量 M，怎么办呢？

仿照求曲顶柱体的体积的方法来计算 M.

第一步分割　把变面密度薄片所占有的闭区域 D，用曲线网任意分成 n 个子区域记作

$$\Delta\sigma_1,\ \Delta\sigma_2,\ \Delta\sigma_3,\ \cdots,\ \Delta\sigma_n.$$

相应地把所求质量 M 分成 n 个部分量，记作

$$\Delta m_1,\ \Delta m_2,\ \Delta m_3,\ \cdots,\ \Delta m_n.$$

显然
$$M=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i.$$

第二步算近似值　由于整体量 M 与部分量 Δm_i 只有大小差别，没有本质差别，因而不能求 Δm_i 的精确值。但是，由于 $\rho=\rho(x,\ y)$ 在 D 上是连续函数，所以当所有子区域 $\Delta\sigma_i$ 很小时，它的面密度在 $\Delta\sigma_i$ 上变化不大，在 $\Delta\sigma_i$ 内任取点 $(\xi_i,\ \eta_i)$，用这点的面密度 $\rho=\rho(\xi_i,\ \eta_i)$ 来近似代替子区域 $\Delta\sigma_i$ 上各点的面密度，也就是把 $\Delta\sigma_i$ 上的面密度近似看作不变，因此得到子区域 $\Delta\sigma_i$ 上质量 Δm_i 的近似值为

$$\Delta m_i\approx\rho(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i,\quad (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots n).$$

这里仍用 $\Delta\sigma_i$ 表示子区域 $\Delta\sigma_i$ 的面积。

第三步求和　所求薄片的质量 M 近似等于 n 个子区域上质量的近似值之和

$$M\approx\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

第四步取极限　令 $n\to\infty$（表示子区域的个数无限增多），$\lambda\to 0$（表示所有子区域 $\Delta\sigma_i$ 都缩成一点），取极限得到所求质量 M 的精确值为

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

可见，平面薄片的质量问题，归结为由二元函数 $\rho=\rho(x,\ y)$ 在闭区域 D 上所构成的固定格式的 n 项和的极限问题。

从上面两个实际问题来看，它们的实际意义是不同的，但从数量关系的角度来看，它们有着共同的特点，这就是：

(i) 所求量　都取决于一个二元函数及一个平面区域。具体地讲

在求曲顶柱体体积的问题里，二元函数是曲顶的曲面方程 $z=f(x,\ y)$，平面区域是曲顶柱体的底面。

在求变面密度平面薄片质量的问题里，二元函数是薄片上任一点的面密度函数 $\rho=\rho(x,\ y)$，平面区域是薄片所占有的区域。

(ii) 所求量都归纳为固定格式的 n 项和的极限，且这个 n 项和都是由二元函数与平面区域 D 所构成的．具体地讲：

曲顶柱体的体积为

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

变面密度平面薄片的质量为

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

在科学技术中，还有其他许多实际问题的计算，也可归结为上面这种固定格式的 n 项和的极限．因此，研究这种比较复杂的固定格式的 n 项和的极限，有着普遍意义．由具体到抽象，把它抽象为下面的二重积分的定义．

14.2 二重积分的概念

1. 二重积分的定义及可积条件

(1) 定义　设二元函数 $f(x,\ y)$ 在闭区域 D 上有定义，把区域 D 用曲线网任意分成 n 个子区域 $\Delta\sigma_1,\ \Delta\sigma_2,\ \cdots,\ \Delta\sigma_n$，(这些记号同时也表示子区域的面积)，在子区域 $\Delta\sigma_i(i=1,\ 2\cdots n)$ 上任取一点 $(\xi_i,\ \eta_i)$，作乘积 $f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i$，并求和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i$(叫积分和)．令 $n\to\infty$(表示子区域的个数无限增多)，$\lambda\to 0$(表示所有子区域 $\Delta\sigma_i$ 都缩成一点)．不论对 D 如何分法和子区域 $\Delta\sigma_i$ 上点如何取法，如果极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

存在，这极限值称为函数 $f(x,\ y)$ 在区域 D 上的二重积分．记作 $\iint\limits_D f(x,\ y)d\sigma$．即

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i=\iint\limits_D f(x,\ y)d\sigma.$$

其中 $f(x,\ y)$ 叫被积函数，D 叫积分区域，$f(x,\ y)d\sigma$ 叫被积表达式，$d\sigma$ 叫面积元素，$x,\ y$ 叫积分变数．

由二重积分定义，14.1 中的两个实际问题，可用二重积分表示如下：

曲顶柱体的体积是曲顶上点的竖坐标 $z=f(x,\ y)$ 在底面 D 上的二重积分

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i=\iint\limits_D f(x,\ y)d\sigma.$$

变面密度平面薄片的质量是它的面密度 $\rho=\rho(x,\ y)$ 在薄片所占的区域 D 上的二重积分

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i=\iint\limits_D \rho(x,\ y)d\sigma.$$

注意：定义中 $\lambda\to 0$ 保证了 $n\to\infty$，故极限符号下只写 $\lambda\to 0$．再作几点说明：

(1°) 二重积分是一个极限值，它是一个确定的数，这个数的大小与被积函数 $f(x,\ y)$ 及积分区域 D 有关，而与积分变数的记号无关，即

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \iint_D f(u, v)d\sigma.$$

(2°) 如果积分和的极限存在,就说二重积分 $\iint_D f(x, y)d\sigma$ 存在,这时称 $f(x, y)$ 在 D 上可积.

(3°) $\iint_D f(x, y)d\sigma$ 存在,意味着对 D 任意分割及对子区域 $\Delta\sigma_i$ 上点 (ξ_i, η_i) 的任意取法,积分和的极限存在.当然对 D 采用特殊的曲线网比如平行于坐标轴的直线网来分割,在子区域 $\Delta\sigma_i$ 上取特殊点比如子区域边界曲线上某一个特殊点取作 (ξ_i, η_i),积分和的极限也存在,并且极限值相同.因此,在可积的条件下,通常用特殊的曲线网来分割 D,并且取特殊的点作 (ξ_i, η_i),这样计算积分和的极限就较为简便.那末可积的条件是什么呢?

(2) 二重积分存在的必要条件,充分条件

(1°) $\iint_D f(x, y)d\sigma$ 存在的必要条件为 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上有界.也就是说,在 D 上无界的函数一定不可积.

(2°) $\iint_D f(x, y)d\sigma$ 存在的充分条件为 $f(x, y)$ 在 D 上连续.也就是说,在 D 上连续的函数 $f(x, y)$ 必可积.

2. 二重积分的几何意义

因为二重积分 $\iint_D f(x, y)d\sigma$ 中的被积函数 $z=f(x, y)$,总可以解释为曲顶柱体的曲顶在点 (x, y) 处的竖坐标,所以二重积分的几何意义是:

(1) 如果在区域 D 上 $f(x, y)\geqslant 0$,表示曲顶柱体在 xOy 面的上方.这时,$f(\xi_i, \eta_i)\geqslant 0$,$\Delta\sigma_i>0$,故

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i \geqslant 0.$$

二重积分的值表示曲顶柱体的体积.

(2) 如果在区域 D 上 $f(x, y)\leqslant 0$,表示曲顶柱体在 xOy 面的下方.这时,$f(\xi_i, \eta_i)\leqslant 0$,$\Delta\sigma_i>0$,故

$$\iint_D f(x, y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i \leqslant 0.$$

二重积分的绝对对值 $\left|\iint_D f(x, y)d\sigma\right|$ 表示曲顶柱体的体积.

(3) 如果在区域 D 上既有 $f(x, y)\geqslant 0$,又有 $f(x, y)\leqslant 0$,表示曲顶柱体既有在 xOy 面上方,又有在 xOy 面下方.这时,对于 $f(x, y)\geqslant 0$ 的那些部分区域上二重积分为正,积分就等于这些部分区域上的曲顶柱体的体积;对于 $f(x, y)\leqslant 0$ 的那些部分区域上,二重积分为负,积分的绝对值才等于这些部分区域上的曲顶柱体的体积.因此,$f(x, y)$ 在 D 上的二重积分等于这些部分区域上的曲顶柱体的体积之代数和.

对照定积分与二重积分的定义与几何意义.不难看出,只要把 $y=f(x)$ 换成 $z=f(x, y)$,

区间换成区域，用点分区间换成用曲线网分区域。曲边梯形换成曲顶柱体，曲线换成曲面，曲边梯形面积换成曲顶柱体体积。

3. 直角坐标系中的面积元素

$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma$ 中的面积元素 $d\sigma$，象征着积分和中的 $\Delta\sigma_i$。当积分存在时，可用特殊的分法对区域 D 进行分割。在直角坐标系中，最常见最特殊的分割是用平行于坐标轴且等距离的直线网来分割区域 D，也就是用 $x=$常数，$y=$常数来分割区域 D。如图 14.4 这时把 D 分成两种类型的子区域：

一类是位于 D 的边界处，记作 $\Delta\sigma'_1$，$\Delta\sigma'_2$，$\Delta\sigma'_3$，$\cdots$，$\Delta\sigma'_m$。当无限细分时，这些小区域面积之和趋于 0，因此在这些子区域上，有

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma'_i=0.$$

另一类是完全在 D 内的矩形，记作 $\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2$，$\Delta\sigma_3$，$\cdots$，$\Delta\sigma_n$。每个矩形长为 Δx，宽为 Δy。则子区域的面积 $\Delta\sigma_i=\Delta x\cdot\Delta y$。因此，

$$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta x\,\Delta y=\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy.$$

称 $d\sigma=dx\,dy$ 为直角坐标系中的面积元素。

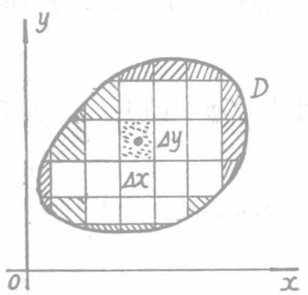

图 14.4

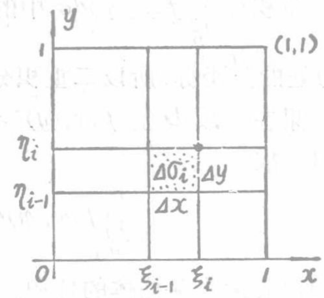

图 14.5

例 1 用定义计算 $I=\iint\limits_D xy\,dx\,dy$，其中 $D=E\{(x, y): 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$。

解 $z=xy$ 在 D 上连续，故积分存在。因而可用特殊的分割方法及特殊的取点方法来构造积分和。

(1) 分割　用直线网

$$x_i=\frac{i}{n},\ (i=1, 2, 3, \cdots, n-1). \qquad y_j=\frac{j}{n},\ (j=1, 2, 3, \cdots, n-1).$$

把区域 D 分成 n^2 个子矩形(图 14.5)。

(2) 取点作乘积　取子区域 $\Delta\sigma_i$ 上右角上的点 $\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)$ 为 (ξ_i, η_i)。故

$$f(\xi_i, \eta_i)=\frac{i}{n}\cdot\frac{j}{n},\ \Delta x=\frac{1}{n},\ \Delta y=\frac{1}{n}.$$

从而 $$f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta x\,\Delta y=\frac{i}{n}\cdot\frac{j}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}.$$

(3) 求和　积分和为

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta x\,\Delta y=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{j}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\frac{1}{n^4}\left(\sum_{i=1}^{n}i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}j\right)=\frac{1}{n^4}(1+2+3+\cdots+n)(1+2+3+\cdots+n)$$
$$=\frac{1}{n^4}\ \frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{4}\ \frac{n^2(n+1)^2}{n^4}=\frac{1}{4}\ \frac{(n+1)^2}{n^2}.$$

(4) 取极限

$$I=\iint\limits_D xy\,dx\,dy=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta x\,\Delta y=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\ \frac{(n+1)^2}{n^2}=\frac{1}{4}.$$

4. 利用对称性及奇偶性计算二重积分

回顾计算定积分时，利用积分区间的对称性及被积函数的奇偶性可以简化积分的计算。对于二重积分也有类似的性质。

例 2　设 $f(x,\ y)$ 在积分区域 D 上连续，并且 (1) 积分区域 D 关于 y 轴对称（即当点 $(x,\ y)\in D$ 时，则点 $(-x,\ y)\in D$）. (2) 被积函数 $f(x,\ y)$ 关于 x 为奇函数（即等式 $f(-x,\ y)=-f(x,\ y)$ 成立）。则

$$\iint\limits_D f(x,\ y)d\sigma=0.$$

证　因 $f(x,\ y)$ 在 D 上连续，故可积。因而可用特殊的分法和取点方法构造积分和。

先用 y 轴把 D 分成两个大小相等的对称区域，然后把其中任一个区域，再任意分成 n 个子区域 $\Delta\sigma_1,\ \Delta\sigma_2,\ \cdots,\ \Delta\sigma_n$，把这 n 个子区域关于 y 轴对称到另一个区域上，则把另一区域也相应地分成 n 个子区域 $\Delta\sigma'_1,\ \Delta\sigma'_2,\ \cdots,\ \Delta\sigma'_n$. 这样就把 D 分成了 $2n$ 个对应面积相等的子区域

$$\Delta\sigma_1,\ \Delta\sigma_2,\ \Delta\sigma_3,\ \cdots,\ \Delta\sigma_n,\ \Delta\sigma'_1,\ \Delta\sigma'_2,\ \cdots,\ \Delta\sigma'_n.$$

注意 $\Delta\sigma_n$ 与 $\Delta\sigma'_n(n=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 关于 y 轴对称且面积相等。因此，在 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 $(\xi_i,\ \eta_i)$，相应地在 $\Delta\sigma'_i$ 上必有一点 $(-\xi_i,\ \eta_i)$. 作乘积

$$f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i,\ f(-\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

从而积分和为

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_n+\sum_{i=1}^{n}f(-\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma'_n$$
$$=\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i,\ \eta_i)+f(-\xi_i,\ \eta_i)]\Delta\sigma_n.$$

因为 $\Delta\sigma_n=\Delta\sigma'_n$, $f(-\xi_i,\ \eta_i)=-f(\xi_i,\ \eta_i)$，故 $\sigma_n=0$，取极限得

$$\iint\limits_D f(x,\ y)d\sigma=0.$$

例 3　设 $f(x,\ y)$ 在 D 上连续，并且 (1) 积分区域 D 关于 x 轴对称（即点 $(x,\ y)\in D$ 时，则点 $(x,\ -y)\in D$）. (2) 被积函数关于 y 为奇函数（即等式 $f(x,\ -y)=-f(x,\ y)$ 成立）。则

$$\iint\limits_D f(x,\ y)d\sigma=0.$$

可仿照例 2 来证明.

例 4 计算 $I_1=\iint\limits_D x\,d\sigma$, $I_2=\iint\limits_D y\,d\sigma$, 其中积分区域 $D=E\{(x,y): x^2+y^2\leqslant 1\}$.

解 因为 D 关于 y 轴对称, 且 $f(x,y)=x$ 关于 x 为奇函数, 故

$$I_1=\iint\limits_D x\,d\sigma=0.$$

因为 D 关于 x 轴对称, 且 $f(x,y)=y$ 关于 y 为奇函数, 故

$$I_2=\iint\limits_D y\,d\sigma=0.$$

例 5 如果 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续, 且 (1) D 关于 y 轴对称 (或关于 x 轴对称). (2) $f(x,y)$ 关于 x 为偶函数(或关于 y 为偶函数). 则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,d\sigma.$$

或

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma=2\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,d\sigma.$$

其中 D_1(或 D_2) 是关于 y 轴(或 x 轴) 对称的区域.

仿照例 2 来证明.

例 6 设 $I=\iint\limits_D (x^2+y^2)\,d\sigma$, 其中 $D=E\{(x,y): -1\leqslant x\leqslant 1, -2\leqslant y\leqslant 2\}$. 把 I 表达成对称区域上的积分.

解 (1) D 关于 y 轴对称(图 14.6), 且 $f(x,y)=x^2+y^2$ 关于 x 为偶函数, 故

$$I=2\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)\,d\sigma.$$

其中 $D_1=E\{(x,y): 0\leqslant x\leqslant 1, -1\leqslant y\leqslant 1\}$.

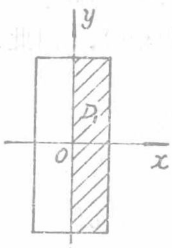

图 14.6

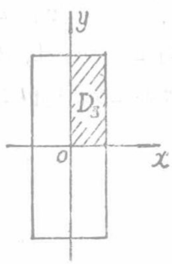

图 14.7

(2) D 关于 x 轴对称, 且 $f(x,y)=x^2+y^2$ 关于 y 为偶函数. 故

$$I=2\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)\,d\sigma.$$

其中 $D_2=E\{(x,y): -1\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$.

(3) D 关于 x 轴, y 轴均对称(图 14.7), 且 $f(x,y)=x^2+y^2$ 关于 x, y 均为偶函数. 故

$$I=4\iint\limits_{D_3}(x^2+y^2)\,d\sigma.$$

其中 $D_3=E\{(x,y): 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$.

习　题　14.2

1．一薄板(不计厚度)，位于 xOy 平面上，占有闭区域 D，薄板上分布面密度为 $\sigma=\sigma(x, y)$ 的电荷，且 $\sigma(x, y)$ 在 D 上连续，试用二重积分表达这板上闭区域 D 内的全部电荷 Q.

2．以曲面 $z=x^2y^2$ 为顶，区域 $D=E\{(x, y): x^2+y^2\leqslant 1\}$ 为底面的曲顶柱体的体积表达成二重积分.

3．把球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$ 的体积表达成二重积分，并说出 $\iint\limits_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,d\sigma$，其中 $D=E\{(x, y): x^2+y^2\leqslant a^2\}$ 的值.

4．用二重积分定义计算以平面 $z=x+2y$ 为顶，矩形区域 $D=E\{(x, y): 1\leqslant x\leqslant 2, 3\leqslant y\leqslant 5\}$ 为底面的曲顶柱体的体积.

5．利用被积函数 $f(x, y)$ 关于 x(或 y)为奇函数，积分区域关于 y 轴(或 x 轴)对称，计算下列二重积分.

(1) $\iint\limits_D(x+x^5y^2)d\sigma$，其中 $D=E\{(x, y): x^2+y^2\leqslant 1, y\geqslant 0\}$.

(2) $\iint\limits_D x^2y^3\,d\sigma$，其中 $D=E\{(x, y): 0\leqslant x\leqslant 1, -1\leqslant y\leqslant 1\}$.

6．利用被积函数 $f(x, y)$ 关于 x(或 y)为偶函数，积分区域关于 y 轴(或 x 轴)对称，把下列积分表达成对称区域上的二重积分.

(1) $I=\iint\limits_D(x^2+y)d\sigma$，其中 $D=E\{(x, y): -1\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 2\}$.

(2) $I=\iint\limits_D(x+y^2)d\sigma$，其中 $D=E\{(x, y): 0\leqslant x\leqslant 1, -2\leqslant y\leqslant 2\}$.

(3) $I=\iint\limits_D(1-4x^2-y^2)d\sigma$，其中 $D=E\{(x, y): 4x^2+y^2\leqslant 1\}$.

7．如果 $f(x, y)$ 在积分区域 D 上连续，且(1) D 关于 y 轴对称，(2) $f(x, y)$ 关于 x 为偶函数（即等式 $f(-x, y)=f(x, y)$ 成立)，证明

$$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma=2\iint\limits_{D_1}f(x, y)d\sigma.$$

其中 D_1 是区域 D 关于 y 轴的对称区域.

8．设积分域 $D=\{(x, y): x^2+y^2\leqslant a^2\}$，$m, n$ 是正整数且至少有一个是奇数，证明 $\iint\limits_D x^my^n\,dx\,dy=0$.

习题答案

1．当面密度为常数时，电荷=面密度×面积．$Q=\iint\limits_D\sigma(x, y)d\sigma$．2．$V=\iint\limits_D x^2y^2\,d\sigma$.

3．$V=2\iint\limits_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,d\sigma$，$\iint\limits_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,d\sigma=\frac{2}{3}\pi a^3$．4．19　5．(1) 0．(2) 0.

6．(1) $I=2\iint\limits_{D_1}(x^2+y)d\sigma$，其中 $D_1=E\{(x, y): 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 2\}$．(2) $I=2\iint\limits_{D_1}(x+y^2)d\sigma$，其中 $D_1=E\{(x, y): 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 2\}$．(3) $I=2\iint\limits_{D_1}(1-4x^2-y^2)d\sigma$，其中 $D_1=E\{(x, y): 4x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0\}$. $I=2\iint\limits_{D_2}(1-4x^2-y^2)d\sigma$，其中 $D_2=E\{(x, y): 4x^2+y^2\leqslant 1, y\geqslant 0\}$．$I=4\iint\limits_{D_3}(1-4x^2-y^2)d\sigma$，其中 $D_3=E\{(x, y): 4x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$．7．仿照例 2 来证明.

14.3 二重积分的性质

以下各积分性质中，都假定积分存在。证明的方法对照定积分中相应性质的证法类似.

性质 1 $\iint\limits_D Kf(x, y)d\sigma=K\iint\limits_D f(x, y)d\sigma$，(其中 K 为常数)。这表示常数因子可从被积表达式中提到积分号外面来.

证

$$\iint\limits_D Kf(x, y)d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n Kf(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i=K\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

$$=K\iint\limits_D f(x, y)d\sigma.$$

性质 2 有限个函数代数和的二重积分等于各个函数二重积分的代数和。例如

$$\iint\limits_D [f(x, y)\pm g(x, y)]d\sigma=\iint\limits_D f(x, y)d\sigma\pm\iint\limits_D g(x, y)d\sigma.$$

证

$$\iint\limits_D [f(x, y)\pm g(x, y)]d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n[f(\xi_i, \eta_i)\pm g(\xi_i, \eta_i)]\Delta\sigma_i$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i\pm\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n g(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

$$=\iint\limits_D f(x, y)d\sigma\pm\iint\limits_D g(x, y)d\sigma.$$

性质 3 如果积分区域 D 可分成有限个子区域，例如 D 分为两个子区域 D_1, D_2 之和 $D=D_1+D_2$. 则

$$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x, y)d\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x, y)d\sigma.$$

表示二重积分对积分区域具有可加性.

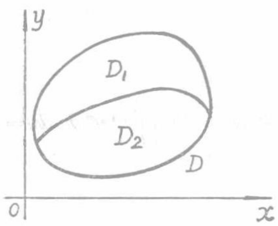

图 14.8

证 因为积分存在，故用特殊的分法构造积分和。首先用 D_1 与 D_2 的公共边界线 (图 14.8) 把 D 分成两个子区域 D_1 与 D_2. 然后再对 D_1 与 D_2 各任意分成 n 个子区域 $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, $\cdots$, $\Delta\sigma_n$. 这样 D 上的积分和可分解为 D_1 与 D_2 上的积分和，即

$$\sum_D f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i=\sum_{D_1} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i+\sum_{D_2} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

再取极限得 $$\iint\limits_D f(x, y)d\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x, y)d\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x, y)d\sigma.$$

例 1 已知 $I_1=\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)^3d\sigma$，其中 $D_1=E\{(x, y): -1\leqslant x\leqslant 1, -2\leqslant y\leqslant 2\}$. $I_2=\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)^3d\sigma$，其中 $D_2=E\{(x, y): 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 2\}$. 问 I_1 与 I_2 有什么关系.

解 因为 D_1 与 D_2 的形状相同，D_1 的面积等于 D_2 面积的 4 倍，又 $f(x, y)=(x^2+y^2)^3$

关于 x, y 均为偶函数。所以

$$\iint_{D_1}(x^2+y^2)^3\,d\sigma=4\iint_{D_2}(x^2+y^2)^3\,d\sigma.$$

从而

$$I_1=4I_2.$$

性质 4 如果在积分区域 D 上，$f(x, y)\equiv 1$，σ 为 D 的面积，则

$$\sigma=\iint_D 1\cdot d\sigma=\iint_D d\sigma.$$

它的几何意义是：高等于 1 的平顶柱体的体积，在数值上等于它的底面积。这也说明可用二重积分计算平面区域 D 的面积。

证 $\iint_D 1\,d\sigma=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}1\cdot\Delta\sigma_i=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma=\sigma.$

例 2 设 $D=E\{(x, y):\ x^2+y^2\leqslant a^2\}$，问 $\iint_D d\sigma=?$。

解 $\sigma=\iint_D d\sigma=D$ 的面积 $=\pi a^2$.

性质 5 如果在 D 上，$f(x, y)\leqslant\varphi(x, y)$，则有不等式

$$\iint_D f(x, y)\,d\sigma\leqslant\iint_D\varphi(x, y)\,d\sigma.$$

证 任意分割区域 D 为 n 个子区域 $\Delta\sigma_i$，每一个子区域上任取一点 (ξ_i, η_i)，因为 $f(x, y)\leqslant\varphi(x, y)$，所以

$$f(\xi_i, \eta_i)\leqslant\varphi(\xi_i, \eta_i).$$

因为子区域的面积 $\Delta\sigma_i>0$，故

$$f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i\leqslant\varphi(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

积分和为

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

取极限得

$$\iint_D f(x, y)\,d\sigma\leqslant\iint_D\varphi(x, y)\,d\sigma.$$

例 3 设 $\iint_D(x+y)^2d\sigma$ 与 $\iint_D(x+y)^3d\sigma$，其中 $E=E\{(x, y):\ x+y\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$. 问哪一个二重积分值大。

解 积分区域 D 如图 14.9，区域 D 内的点 (x, y)，它的横坐标为 $0\leqslant x\leqslant 1$，纵坐标 $0\leqslant y\leqslant 1$，且 $0\leqslant x+y\leqslant 1$，因此

$$(x+y)^2\geqslant(x+y)^3.$$

从而

$$\iint_D(x+y)^2\,d\sigma\geqslant\iint_D(x+y)^3\,d\sigma.$$

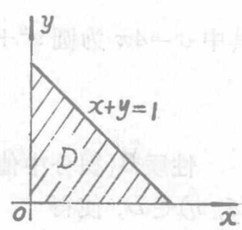

图 14.9

性质 6 $\left|\iint_D f(x, y)\,d\sigma\right|\leqslant\iint_D|f(x, y)|\,d\sigma.$

证 因 $\quad -|f(x, y)|\leqslant f(x, y)\leqslant|f(x, y)|.$

由性质 5 得

$$-\iint_D|f(x, y)|\,d\sigma\leqslant\iint_D f(x, y)\,d\sigma\leqslant\iint_D|f(x, y)|\,d\sigma.$$