Linear Algebra

线性代数

大学数学编写委员会《线性代数》编写组

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

线性代数

Xianxing Daishu

大学数学编写委员会
《线性代数》编写组

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书是根据编者多年的教学实践，按照线性代数课程教学的基本要求编写而成的。主要内容有行列式、矩阵、线性方程组、线性空间与线性变换、矩阵的特征值与特征向量、二次型、MATLAB的线性代数应用和线性代数模型案例等。各章配有习题，书末附习题答案。本书在编写过程中与高中新的课程改革标准相衔接，以强化理论学习为基础，以应用为目的，使教材达到深入浅出、通俗易懂、便于教学的效果。

本书可作为高等学校理工类、经管类等专业的线性代数教材，也可作为科技工作者学习线性代数知识的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/大学数学编写委员会《线性代数》编写组编.—北京：高等教育出版社，2011.8

ISBN 978-7-04-033436-4

Ⅰ.①线… Ⅱ.①大… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第141918号

策划编辑 李晓鹏　责任编辑 李晓鹏　封面设计 张志奇　版式设计 马敬茹
责任校对 胡美萍　责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	大厂益利印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	13.25	版　　次	2011年8月第1版
字　　数	320千字	印　　次	2011年8月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	19.90元

物 料 号 33436-00

大学数学编写委员会

主　编：尚有林

副主编：李保安　秦　青

编　委：丁孝全　王春伟　王锋叶　陈金兰

陈　鹏　杨万才　杨德伍　李二强

李小申　徐翠霞　常志勇

前　　言

线性代数是高等学校为非数学类专业开设的一门重要的基础课程，主要研究能够进行线性运算的量及其之间的联系和规律。

线性代数课程的主要内容包括矩阵、行列式、线性方程组、线性空间与线性变换、矩阵的特征值与特征向量及二次型等。

本书的第一至六章是线性代数的基本内容，具体内容如下：

第一章介绍行列式。行列式在线性代数中具有重要地位，是线性方程组求解、矩阵计算、矩阵求逆和矩阵特征值的计算等方面不可缺少的工具。在这一章中，行列式的定义由归纳法引入，而不像一般教材中通过逆序数开始，如此引入可以使学生更快地掌握和学习行列式。

第二章介绍矩阵。矩阵是研究线性运算的主要工具。该章用较大篇幅介绍了矩阵的概念、运算及初等变换，为后面几章的学习打下基础。

第三章介绍线性方程组。该章从引入 n 维向量的概念及线性运算入手，使学生对线性相关、线性无关等概念有直观的理解。一方面使学生对线性方程组解的结构和求解有一个整体的把握，另一方面为后面抽象空间概念的引出做好准备。

第四章介绍线性空间与线性变换。线性空间是线性代数最基本的概念之一，也是本课程的一个最核心、最抽象的概念。该章的内容也是很慎重地做了考虑。国内的线性代数教材基本上都是将该章放到特征值与特征向量之后介绍，很大的原因是由于这部分内容较难，课时太少，不易被学生掌握。我们在编写过程中做了调整，将该章放到特征值与特征向量前面。这样调整，一方面考虑到该部分内容在其他学科领域里作为基本工具大量出现，另一方面从逻辑结构和理论基础的角度，便于将第五章的特征值与特征向量理论阐述清楚。教师可以根据具体情况酌情把握，或作为选讲内容。

第五章介绍特征值与特征向量。该章利用矩阵来研究线性变换，对于给定的线性变换，希望能找到一组基使得它的矩阵具有最简单的形式。该章讨论的主要内容是：在适当选取基的情况下，一个线性变换的矩阵可以优化成什么样的简单形式？为了达到这个目的，需引入矩阵的特征值与特征向量的概念，它们对于线性变换的研究具有基本的重要性，由此介绍特征值与特征向量就水到渠成了。这也都是线性代数最核心的内容之一。

第六章介绍二次型。二次型起源于解析几何中二次曲线和二次曲面的理论。在数学、物理以及一些其他学科中,有许多的问题都需要我们来推广这种理论,这就是:需要把两个变量的这种多项式的讨论推广到 n 个变量上去,而且系数也不限制是实数,这就是二次型的一般理论。在这个过程中选择什么变换,怎样找到这个变换是十分重要的问题。本章讨论这个问题的一般形式,其中心问题是多元二次齐次多项式经可逆线性变换化为只含平方项的标准形问题。二次型理论在数学的其他分支及物理、力学和工程技术中有广泛的应用。

至于第七、八章,这两章是将线性代数与计算机技术和数学建模有机地结合,旨在培养学生运用线性代数知识解决实际问题的计算和建模能力。七、八章可根据培养计划中的教学时数适当安排选修或让学生自学。

参加本书编写的有尚有林、陈鹏、秦青和李二强,尚有林和陈鹏任主编,完成了全书的审核与统稿工作。在编写过程中,编者得到了河南科技大学数学与统计学院老师们的极大关心和支持,他们提出了许多宝贵建议。本书的编写参考了文献中部分教材的相关内容,高等教育出版社的同志倾注了心血,在此一并表示诚挚的谢意!

因编者水平有限,书中疏漏与不足之处在所难免,敬请读者不吝赐教。

编 者

2011 年 6 月

目　　录

第一章　行　列　式

行列式是线性代数中的一个基本概念，它是研究线性代数的重要工具. 在对线性方程组求解及线性变换的讨论中都要用到行列式，在数学的其他一些分支及实际问题中也常用到它. 本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质和计算方法，此外还要介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克拉默法则.

§1.1　二阶、三阶行列式

1.1.1　二阶行列式

在中学已经学过给定具体系数的二元、三元线性方程组的加减消元法. 考虑具有一般系数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 的二元线性方程组

$$\mathrm{I}\qquad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, & (1.1)\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. & (1.2)\end{cases}$$

若要求出 x_1，先要设法消去 x_2. 这可以由下述办法做到，

$$a_{22}\times(1.1)-a_{12}\times(1.2)\Rightarrow(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

所以，如果 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，可以唯一解得 x_1. 同样，也可以先消去 x_1 得

$$a_{11}\times(1.2)-a_{21}\times(1.1)\Rightarrow(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

由此可见，同样的条件 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 也可保证唯一解得 x_2.

综上可知，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，解得

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\tag{1.3}$$

可以验证(1.3)式确实为方程组 I 的解，从而是其唯一解.

所以，方程组 I 有唯一解的充分必要条件是 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$.

为了方便，引入二阶行列式的概念，定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\tag{1.4}$$

为**二阶行列式**(determinant of order 2). 可以用字母 D 表示此二阶行列式，并记 $D=\det(a_{ij})$，其中 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式(1.4)的元素. 利用二阶行列式

的概念,方程组 I 的唯一解可表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.5}$$

1.1.2 三阶行列式

接着考虑三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.6}$$

为从方程组中同时消去 x_2, x_3,以便求出 x_1 的值,用 α, β, γ 分别乘以方程组(1.6)的三个方程并相加,得

$$(a_{11}\alpha + a_{21}\beta + a_{31}\gamma)x_1 + (a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{32}\gamma)x_2 + (a_{13}\alpha + a_{23}\beta + a_{33}\gamma)x_3$$
$$= b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma, \tag{1.7}$$

可见,要同时消去 x_2, x_3,只要 α, β, γ 满足下面的方程组

$$\begin{cases} a_{12}\alpha + a_{22}\beta + a_{32}\gamma = 0, \\ a_{13}\alpha + a_{23}\beta + a_{33}\gamma = 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

设 $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \neq 0$,视 α, β 为未知数,可得

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} -a_{32}\gamma & a_{22} \\ -a_{33}\gamma & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}} = -\gamma\frac{\begin{vmatrix} a_{32} & a_{22} \\ a_{33} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}} = \gamma\frac{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}} = \gamma\frac{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}},$$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & -a_{32}\gamma \\ a_{13} & -a_{33}\gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}} = -\gamma\frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}} = -\gamma\frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}. \tag{1.9}$$

注意在(1.9)式中用到了二阶行列式的性质(见例 1.1). 若取 $\gamma = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$,便有

$$\alpha = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \beta = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \gamma = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}. \tag{1.10}$$

公式(1.10)是在$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \neq 0$的条件下得到的,但是可以验证只要(1.10)式中有一个行列式是非零的，那么α,β,γ不全为零且依然满足方程组(1.8).

把(1.10)式代入(1.7)式,就得到x_1满足的方程

$$\left(a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\right)x_1$$
$$= b_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - b_2\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}. \tag{1.11}$$

定义

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &\quad a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \tag{1.12}$$

为三阶行列式.

利用上述三阶行列式的概念来重写(1.11)式，则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{1.13}$$

对于x_2, x_3类似可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

综上，若$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$，可以解得

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}. \tag{1.14}$$

可以验证(1.14)确实为方程组(1.6)的解,从而是其唯一解.

注 用公式(1.14)求方程组(1.6)的唯一解便是著名的克拉默法则在三元线性方程组的特殊情形. 上述推理可以应用到四个、五个乃至更多的方程构成的方程组上,只要方程组中未知数的个数与方程的个数相同. 读者不妨试一试.

例 1.1 证明二阶行列式有下列性质:

(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix};$$

(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$.

证明 直接计算即可. 以(2)中第二个等式为例证明.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= (a_{11}+b_{11})a_{22} - a_{12}(a_{21}+b_{21}) \\ &= a_{11}a_{22} + b_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} - a_{12}b_{21} \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (b_{11}a_{22} - a_{12}b_{21}) \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

例 1.2 计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 4\times 23 - 3\times 52 + 8\times 53 = 360.$

例 1.3 求平面上过点(1,−3),(4,−2),(−2,6)的圆的方程.

解 设所求圆的方程为 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$,由题意得下列方程组

$$\begin{cases} 1+9+A-3B+C=0, \\ 16+4+4A-2B+C=0, \\ 4+36-2A+6B+C=0, \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} A-3B+C=-10, \\ 4A-2B+C=-20, \\ -2A+6B+C=-40, \end{cases}$$

由

$$D=\begin{vmatrix}1&-3&1\\4&-2&1\\-2&6&1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}-2&1\\6&1\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}-3&1\\6&1\end{vmatrix}+(-2)\begin{vmatrix}-3&1\\-2&1\end{vmatrix}$$
$$=-8+36+2=30$$

知，此方程组有唯一解. 由(1.14)式可得

$$A=\frac{\begin{vmatrix}-10&-3&1\\-20&-2&1\\-40&6&1\end{vmatrix}}{D}=\frac{-10\begin{vmatrix}-2&1\\6&1\end{vmatrix}-(-20)\begin{vmatrix}-3&1\\6&1\end{vmatrix}+(-40)\begin{vmatrix}-3&1\\-2&1\end{vmatrix}}{30}$$
$$=\frac{80-180+40}{30}=-2,$$

$$B=\frac{\begin{vmatrix}1&-10&1\\4&-20&1\\-2&-40&1\end{vmatrix}}{D}=\frac{\begin{vmatrix}-20&1\\-40&1\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}-10&1\\-40&1\end{vmatrix}+(-2)\begin{vmatrix}-10&1\\-20&1\end{vmatrix}}{30}$$
$$=\frac{20-120-20}{30}=-4,$$

$$C=\frac{\begin{vmatrix}1&-3&-10\\4&-2&-20\\-2&6&-40\end{vmatrix}}{D}=\frac{\begin{vmatrix}-2&-20\\6&-40\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}-3&-10\\6&-40\end{vmatrix}+(-2)\begin{vmatrix}-3&-10\\-2&-20\end{vmatrix}}{30}$$
$$=\frac{200-720-80}{30}=-20,$$

从而所求圆的方程为 $x^2+y^2-2x-4y-20=0$.

§1.2 n阶行列式的定义

通过研究二元、三元线性方程组的求解，引入了二阶、三阶行列式. 这是否能够作一般的推广呢？为此，把二阶、三阶行列式的定义重新写出来，即

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.15}$$

$$D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{vmatrix}. \tag{1.16}$$

观察发现,在(1.16)式中分别与 a_{11},a_{21},a_{31} 相乘的三个二阶行列式恰好是左端行列式中划去 a_{11},a_{21},a_{31} 各自所在行列后剩下的元素(按原顺序)构成的,分别称它们为 a_{11},a_{21},a_{31} 的余子式,依次记为 M_{11},M_{21},M_{31}. 于是

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+a_{31}M_{31}. \tag{1.17}$$

若规定 $|a|=a$ 为一阶行列式,那么 D_2 中的 a_{22},a_{12} 可以分别理解为 a_{11},a_{21} 的余子式,仍分别记为 M_{11},M_{21}. 于是(1.15)式也可以写为

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}. \tag{1.18}$$

仿照(1.18)式、(1.17)式的形式,可以给出行列式的一般定义.

定义 1.1　对于 $n\geqslant 2$,若 $(n-1)$ 阶行列式已有定义,则定义 n **阶行列式**(determinant of order n)为由 n^2 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列,得到的下列展开式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}, \tag{1.19}$$

其中 $M_{i1}(i=1,2,\cdots,n)$ 是 a_{i1} 的余子式,即在 D_n 中划去第 i 行第 1 列后得到的 $(n-1)$ 阶行列式. 常把行列式(1.19)简记为 $D=\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$. a_{ij} 称为行列式的元素.

例如,M_{21} 就是如下把 D_n 的第二行和第一列划去,等式最右边所示的 $(n-1)$ 阶行列式,即

$$M_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{32} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

注　行列式的定义有多种,下面给出行列式的另一个定义.

为此,先指出什么是排列的奇偶性. 设正整数 $1,2,\cdots,n$ 的一个全排列(简称为排列)为 $(j_1,j_2,\cdots,j_n)$,若当 $s<t$ 时,$j_s>j_t(s,t=1,2,\cdots,n)$(即大数 j_s 排在

比其小的数 j_t 前面)，则称 j_s 与 j_t 构成一个**逆序**. 排列 $(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 所有逆序的总数称为排列的**逆序数**，记作 $\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$. 逆序数为奇数的排列叫做**奇排列**，逆序数为偶数的排列叫做**偶排列**. 例如，1,2,3,4,5 的排列 (4,5,1,3,2) 的逆序为 41,43,42,51,53,52,32，从而 $\tau(4,5,1,3,2)=7$.

由此，n 阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)} (-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中，右端的 $\sum\limits_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列求和，展开式中共有 $n!$ 项.

可以证明(此处从略)，定义 1.1 与此定义是一致的.

例 1.4　若 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$，则称行列式 $|a_{ij}|$ 为**上三角形行列式**. 求证：上三角形行列式

$$\det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii},$$

其中 $\prod$ 为连乘符号.

证明　由定义，$\det(a_{ij}) = a_{11}M_{11} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

这个例子表明：上三角形行列式等于**主对角线**(元素 a_{ii} 所在的线)上元素的乘积. 作为这种行列式的特殊情形，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

其中主对角线以外的元素都是零，称为**对角行列式**.

例 1.5　计算四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

解 由定义

$$D = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31} - a_{41}M_{41}$$

$$= -2\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$3\begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -2\left\{(-1)\times\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}\right\} -$$

$$4\left\{2\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}\right\} +$$

$$3\left\{2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\times\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\right\} -$$

$$2\left\{2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - (-1)\times\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= -2\times 9 - 4\times 30 + 3\times(-48) - 2\times(-6) = -270.$$

这个例子表明，按定义计算行列式是一件很麻烦的事，而且随着行列式阶数 n 的增加甚至变为不可能. 下一节转而讨论行列式的性质.

§1.3 行列式按列(行)展开

为了讨论行列式的性质,先给出下面一般性的定义.

定义 1.2 在 n 阶行列式中,将 a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列划去后,剩下的元素按原来的顺序构成的$(n-1)$阶行列式,称为元素 a_{ij}的**余子式**(cofactor),记作 M_{ij}. 而称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$为元素 a_{ij}的**代数余子式**(algebraic cofactor).

例如,在行列式 $D=\begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$中划去第三行第二列可得元素

a_{32}的余子式 M_{32}，即