HIFANZHUANKESHIYONGJIAOCAI

师范专科试用教材

高等数学

（供化学专业用）

吉林教育出版社

师范专科试用教材

高 等 数 学

（化学专业）

吉 林 教 育 出 版 社

数学专科教材
编 审 委 员 会 名 单

师专数学教材
出版说明

师范专科学校承担着培养大批合格的初中教师的重任。随着九年制义务教育的普及和四化建设的深入发展，师专的地位和作用愈来愈受到社会的重视. 但是，就师专数学专业而言，到目前为止，国内还没有公开出版一套完整的、令人满意的专业教材，这给师专教学带来了一定的困难. 为了解决这一问题，填补这一空白，在吉林省教育委员会的组织和资助下，由四平师院、吉林师院、长春师院、通化师院、白城师专、齐齐哈尔师院、廊坊师专、内蒙民族师院、昭盟蒙族师专等九所师范院校联合编写了这套教材. 本套教材共有十四种，十五册. 它们是：《空间解析几何》，《高等代数》，《数学分析》(上、下册)，《概率论与数理统计》，《逻辑代数与计算机语言》，《普通物理》，《初等代数研究》，《初等几何研究》，《中学数学教材教法总论》，《高等几何》，《常微分方程》，《复变函数》，《高等数学》(物理专业用)，《高等数学》(化学专业用).

本套教材是根据国家教委制定的二年制师范专科学校的教学计划（征求意见稿）和各门课程的教学大纲并结合九所院校的教学实践编写的. 为保证教学质量，邀请了东北师大、吉林大学等校的二十多位教授、专家、学者组成教材编审委员会，对全套教材的编写进行了具体指导和严格审查.

本套教材包括了教学计划规定的师专数学专业的全部专

业课程（必修课及选修课）的教材以及物理和化学专业的高等数学教材。编写时充分注意了各门教材内容上的衔接与配合，深度和广度方面的协调一致。并在文字使用、表述方式以及名词术语和符号的使用等方面有统一的要求，力争规范划一。

本套教材从培养目标出发，突出了师专教育的要求和特点。教材选择上避免了“多、深、尖”的弊病，体现了“少、广、新”的原则。力求培养学生具有坚实的理论基础和广阔的视野，以适应“三个面向”的需要。在表述方面，在充分注意科学性和严密性的前提下，力求通俗易懂，深入浅出，详尽透彻，易教易学。

为了加强对学生的能力培养和科学的思维方法的训练，各门教材都配备了较多的例题和习题。它们都经过精心选择，与正文内容密切配合，有些还是正文内容的补充和提高。对于难度较大的习题，作了适当的提示。

本套教材不仅可供师范专科学校使用，还可作为教育学院、职业大学、电视大学以及函授、刊授等相应专业的教材，亦可作为师范院校本科及其它院校有关专业的教学参考书。

编写一套完整的、适应四化建设需要的教材是一项十分艰巨的任务。我们的工作只是一个初步的尝试。缺点和谬误之处在所难免。诚恳希望得到有关专家和广大读者的批评指正。吉林省教育委员会和参加编写工作的九所院校的有关领导对于本套教材的编写出版给予了宝贵的支持，谨此表示衷心的感谢。

师专数学专业教材协编组

1986年10月

目　　录

第一章　函数与极限

在中学数学中，我们叙述了多种函数，并讨论了它们的若干初等性质．函数的概念是中学数学中最重要的基本概念之一，许多内容都是由函数引申出来的．然而，作为初等数学，基本上是处理不变的过程，由不变到变的飞跃，这正是高等数学的任务．在高等数学中，关于函数的理论尤有其特殊的重要性，甚至可以说，整个微积分学自始至终都离不开关于函数的讨论．因此，我们必须在中学数学的基础上，对函数的内容进行系统地总结和理性的提高，这正是本章的目的．

作为极限的概念，我们在中学数学中已经接触过，并指明了它的四则运算法则，但无论从其深度还是广度来看，作为微积分学的需要，都是远远不够用的．虽然，整个微积分学都离不开关于函数的讨论，然而，建造微积分学的方法却是通过极限的方法来完成的．极限的方法是微积分学的基本方法．因此，我们也必须在中学数学的基础上，对极限有一个更为深刻的认识．

我们在这一章，就来叙述函数和极限的相关内容．

§1　函　　数

1.1　常量与变量

在对客观世界的观察中，我们总会遇到各种各样的量，

这些量在一般情形下，大致可分为两类：在所论及的范围内，保持相对不变的量和可以变化的量，前者称为常量，而后者称为变量。

例如，宇宙间的万有引力定律

$$F = K \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

这里，引力常数K是常量，而两个星球的质量、它们之间的距离和引力都是变量。

在自由落体运动中，下落的距离和时间之间的关系为

$$h = \frac{1}{2} g t^2 ,$$

这里，重力加速度g是常量，而时间t和距离h都是变量。

在讨论某物质总计所含的分子（或原子）的个数时，我们常使用阿佛伽德罗常数——6.023×10^{23}，当然，讨论时它是常量，而该物质的克分子数（或克原子数）以及所含分子（或原子）的个数多少，都是变量。

值得注意的是，一个量是常量还是变量，并不是绝对的、一成不变的。同一个量在某种条件下是常量，在另一条件下却可能是变量。比如自由落体公式$h = \frac{1}{2} g t^2$，其中重力加速度g是常量，这不过是理想真空中的结果，在现实世界的落体实验中，总会遇到各种各样的干扰，不可能使其成为真正的、绝对的常量。即使是在考虑真空中的实验，随着地点的迁移，重力加速度g也会有某些微小的变化。

例如，考虑单摆振动的惠更斯定律

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

其中重力加速度 g 就可以认为是变量。

从逻辑语言上看，常量也可以认为是变量，不过是每次变化所取的值，都是原来的特定值而已。

上面的叙述，不是要引起概念的混淆，而是要加强对所讨论的过程和过程的条件的认识，这种思想在今后对许多问题的讨论中，也是屡见不鲜的。

以后，我们常用 a，b，c 等字母表示常量，用 x，y，z 等字母表示变量。

1.2 函数

在对某一个具体问题的探讨中，出现的诸多变量往往不是彼此独立的，而是相互制约、相互影响、相互依存的，这种变量相依在数学中的抽象，就是所谓函数。

例如，在自由落体运动中，随着时间的推移，我们来测定下落的距离，其关系是

$$h = \frac{1}{2}gt^2,$$

其中时间 t 是不受约束而自由变化的量，我们称之为自变量，而对 t 的每一确定的值，可求出唯一确定的 h 值，它是随自变量的变化而变化的量，我们称之为因变量。在这一问题中，如果我们抛开"时间"，"距离"，这些具体的含义，而仅保留其数学的抽象，便可得出函数的定义。

定义1.1 在某一变化过程中，若对自变量每一可取定的值，按某种规律，因变量总有确定的值与之对应，则称这个因变量是该自变量的函数。

自变量常用 x 表示，因变量常用 y 表示，"y 是 x 的函数"，常记作"$y = f(x)$"。

刻画函数关系通常有三种方法，即列表法、图象法和解析法。所谓列表法就是用表格的形式列出一系列自变量的值和所对应的函数值；所谓图象法就是用曲线来表示函数关系；所谓解析法就是用一个关系式来表示该函数关系。兹分别举例如下。

例 1 由实验得出KNO_3的溶解度随温度而变化，其实验数据如下表

温度(℃)	0	10	20	30	40	50
溶解度	13.9	21.2	31.6	45.6	61.3	83.5

例 2 如图1.1，某气象站用自动温度记录仪记下某一昼夜气温随时间的变化情况，如果用 t 表示时间，T 表示温度，记录仪记下的是气温变化的曲线图。

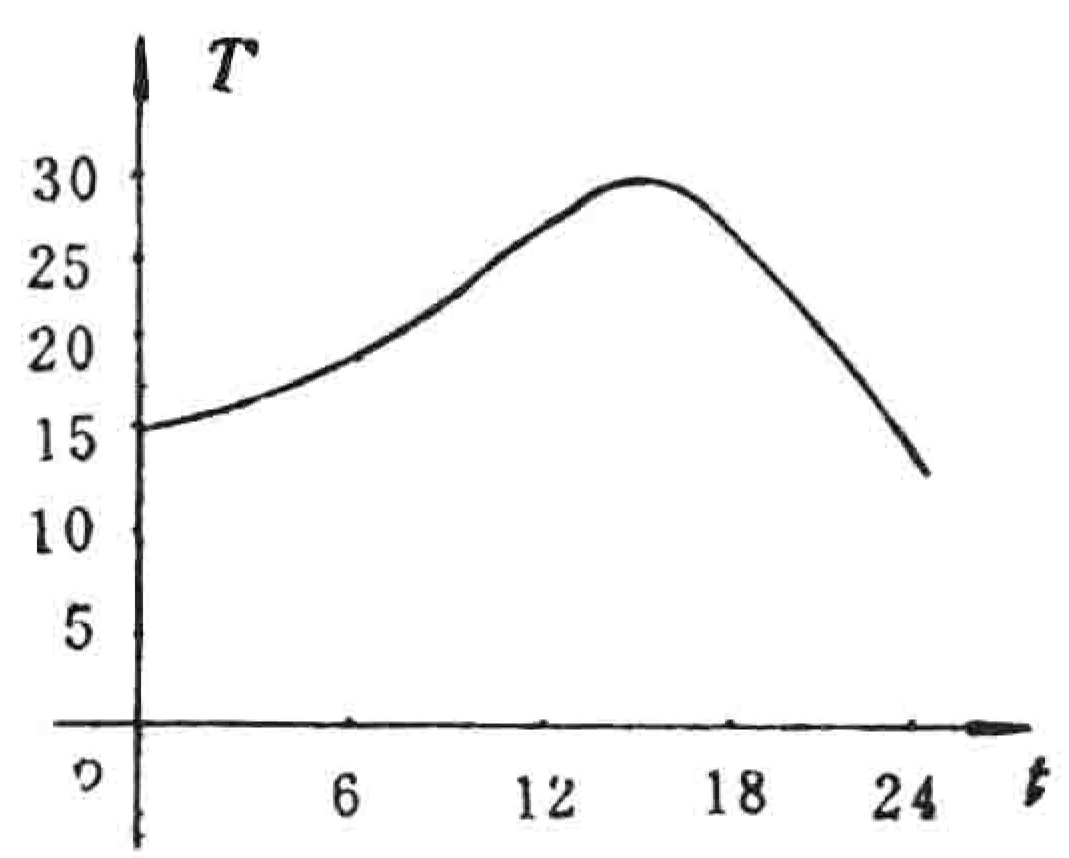

图 1.1

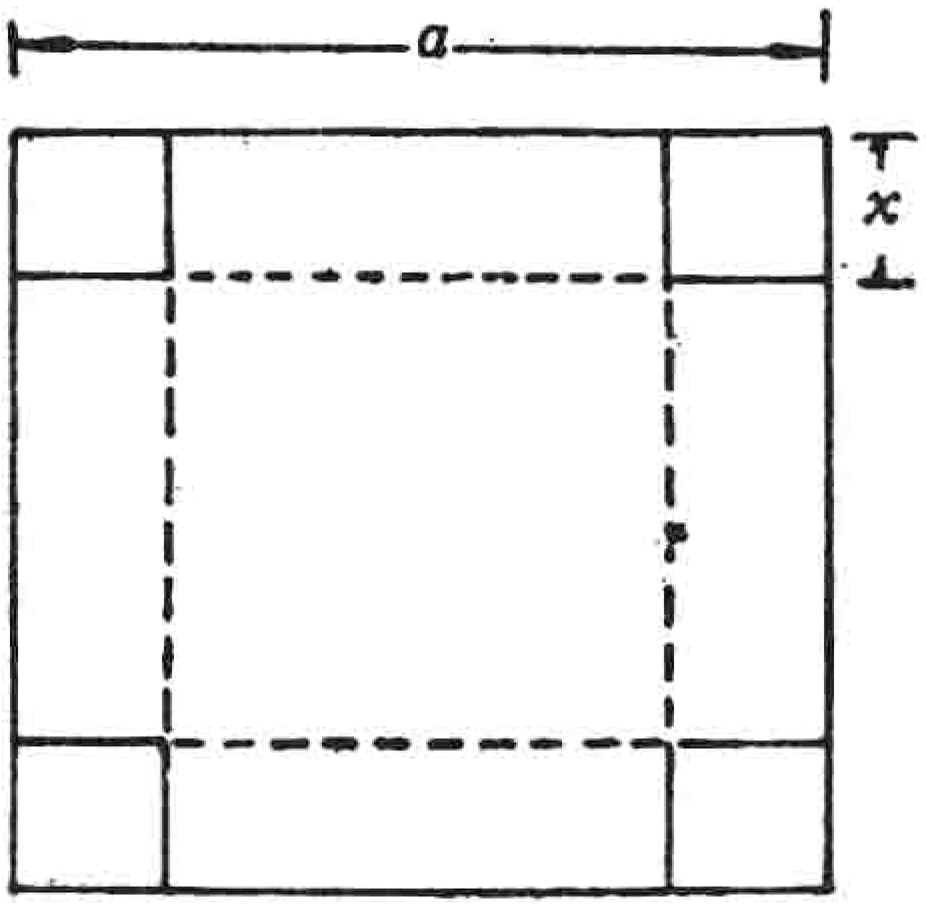

图 1.2

例 3 如图1.2，设有一个边长为 a 的正方形铁板，在四角剪去一个边长为x的小正方形后，制成一个方桶，得方桶的体积为

$$V = x\cdot(a-2x)^2.$$

列表法常用于实验或实测数据时的情形，它的优点是一

目了然，但不可能列出许多数据，也不易分析函数的理性特征；图象法可以借助于几何直观刻画函数，但在一般情形下，很难准确无误地画出图形，利用图形对给定的自变量值去求出相应的函数值，也往往会有误差；解析法的优点是简明准确，全部表现出变量相依的规律性，便于理性分析，但不够直观，甚至有些函数，根本写不出它的函数关系式。对于具体的函数，究竟使用什么方法，要根据具体问题而定，在微积分学中研究函数，基本上是使用解析法和图象法。

对于函数的抽象表示式$y=f(x)$，我们仅称其为函数记号，当$x=x_0$时，对应的函数值表为$f(x_0)$。

例 4 设 $f(x)=2x^2+5x+1$，则 $f(0)=1$，$f(-2)=-1$，$f(x_0)=2x_0{}^2+5x_0+1$，$f(x+1)=2(x+1)^2+5(x+1)+1=2x^2+9x+8$。

1.3 函数的定义域和值域

在例 3 中，我们得出函数关系式

$$V=x\cdot(a-2x)^2,$$

其中 x 是可以自由变化的，但为了使这个问题有合乎情理的意义，x 必须适合

$$0<x<\frac{a}{2},$$

即只能在某一确定范围内的自由变化，而不允许超出这个范围，这种自变量允许值的范围，就叫做函数的定义域，而相应的函数值的全体叫做函数的值域。

用列表法表示的函数，这种表一旦列完而不准备继续往下列时，表中自变量数值的全体就是该函数的定义域，当然，表中函数值的全体就是它的值域。

用图象法表示的函数，其定义域是图象在 x 轴上的投影，而值域是图象在 y 轴上的投影。

用解析法表示的函数，其定义域既要考虑使该式有意义的那些自变量的值，还要考虑使该问题有实际意义的那些自变量的值，取二者的公共部分，其值域就要从分析该式中得出。

在一般的情况下，对给定的函数往往需要指明它的定义域，而对值域，则根据问题的需要而定。

例 5 设给出等差数列

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots\cdots$$

其通项公式是$a_n = 2n-1$。如果将其改写成$f(n) = 2n-1$，那么该数列恰可看成定义域为自然数集的函数。一般来说，任意一个无穷数列均可看做是一个定义域为自然数集的函数；而仅含 k 项的有限数列，便可看成是定义域为前 k 个自然数所成之集的函数。

例 6 试指出函数$y=\sqrt{16-x^2}+\ln(\sin x)$的定义域。

解 显然，需有 $-4\leqslant x\leqslant 4$，但角 x 的终边必须在一、二象限，故该函数的定义域为

$$0<x<\pi,\quad 或\quad -4\leqslant x<-\pi.$$

例 7 求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$的定义域。

解 因为$x^2-x-2=(x-2)(x+1)>0$，所以定义域为

$$x>2\quad 或\quad x<-1.$$

对于有些函数，它的自变量不受任何限制(如$y=\sin x$)，此时便说它的定义域是全体实数。

设$f(x)$、$g(x)$都是关于自变量x的函数，如果这两个函数有完全相同的定义域和完全相同的对应规则，即对定义域

内任一确定的自变量的值x_0，均有 $f(x_0)=g(x_0)$， 此时便称函数$f(x)$、$g(x)$是相等的，并记作

$$f(x)=g(x)。$$

1.4 几种特殊的函数类

上面叙述的是一般的函数，这里要叙述的是几种常见的，又有着鲜明特性的函数类。

1 有界函数

称函数 $y=f(x)$为有界，是指能选出一个确定的正数M，使对定义域内所有的x值，均有$|f(x)|\leqslant M$。

由于$|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，故正弦函数，余弦函数都是有界函数。

例 8 试证 $y=\dfrac{\sin x\cdot\cos x}{2x^2-3x+2}$是有界函数。

证 由于 $\sin x\cdot\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$，$2x^2-3x+2=2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}\geqslant\dfrac{7}{8}$，故得

$$y=\frac{\sin 2x}{4\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{7}{4}}.$$

所以，

$$|y|=\left|\frac{\sin 2x}{4\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{7}{4}}\right|\leqslant\frac{4}{7}.$$

关于有界函数的等价说法是：

(1) $y=f(x)$ 为有界，是指能选出一个确定的正数$M>0$，使得该函数的值域不超出闭区间$[-M,M]$。

(2) $y=f(x)$ 为有界，是指能选出两个确定的实数m，

$M(m\leqslant M)$，使对定义域内的所有x的值，均有$m\leqslant f(x)\leqslant M$.

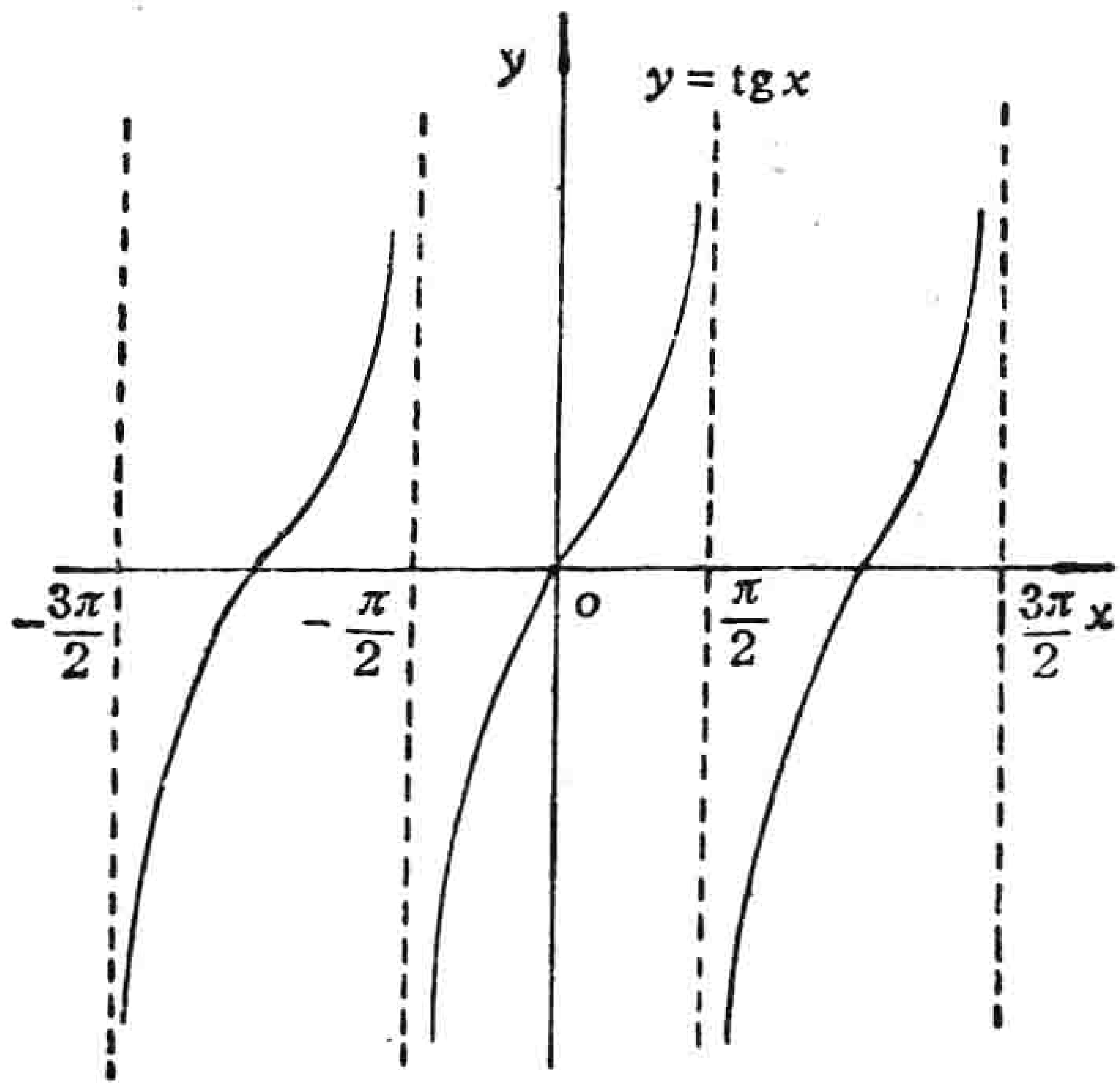

图 1.3

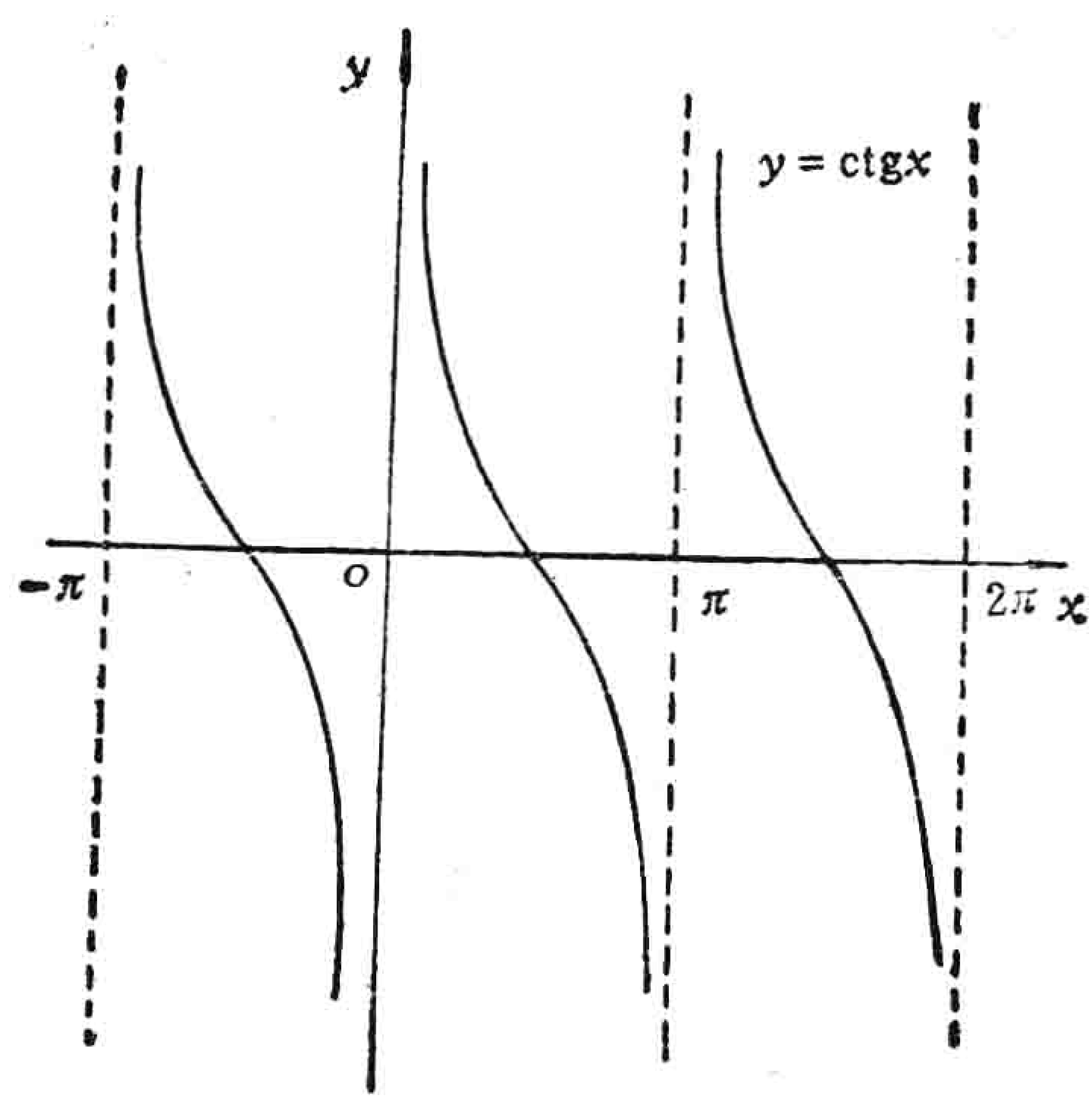

图 1.4

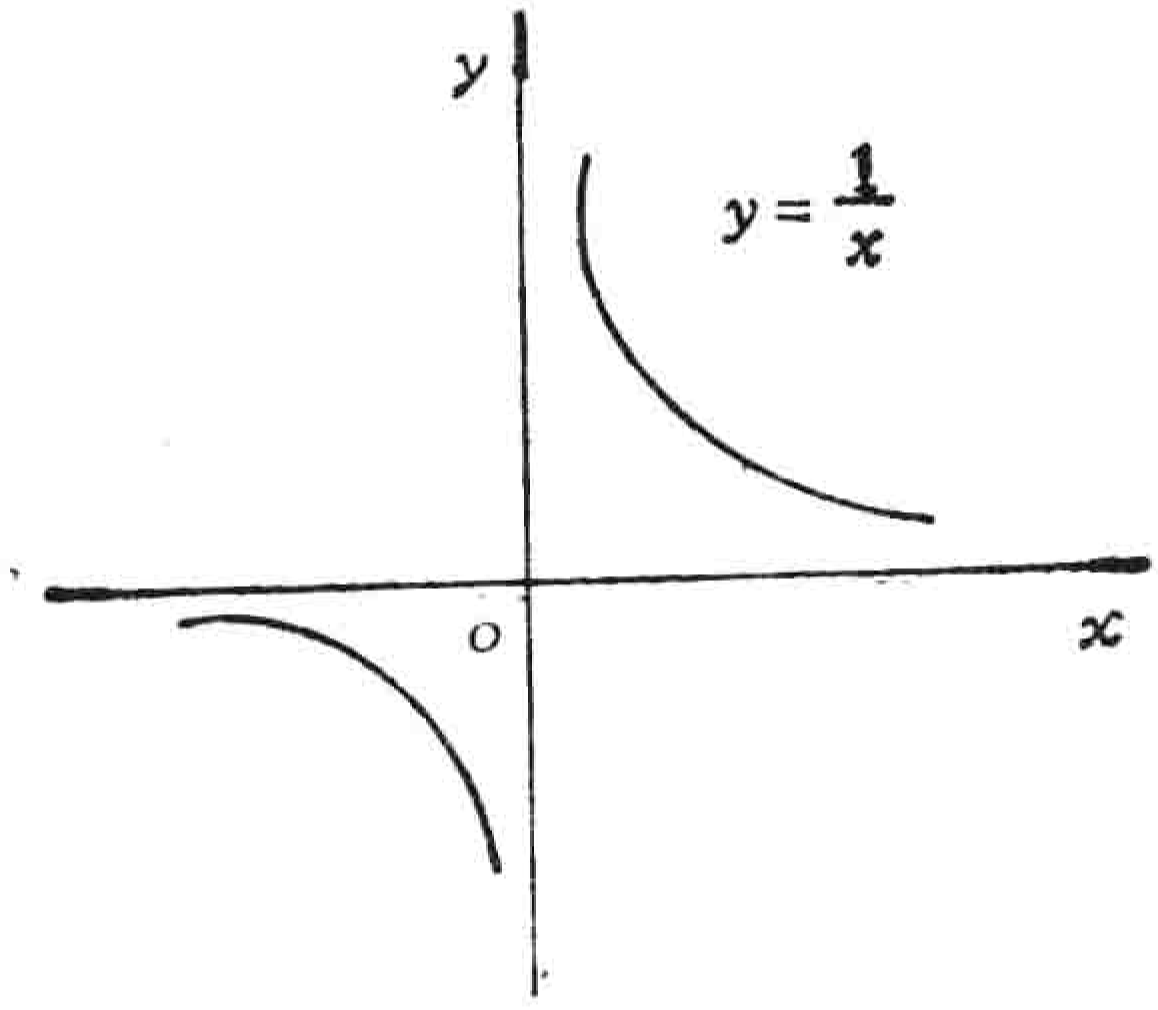

图 1.5

不是有界的函数，自然称为无界函数，象 $y=\mathrm{tg}x$，$y=\mathrm{ctg}x$，$y=\dfrac{1}{x}$都是无界函数。

2　奇函数和偶函数

当函数 $y=f(x)$ 满足 $f(-x)=-f(x)$ 时，称该函数为奇函数；如果满足 $f(-x)=f(x)$ 时，称该函数为偶函数。

$y=\sin x$，$\mathrm{tg}x$，$\mathrm{ctg}x$ 都是奇函数，而$y=\cos x$ 是偶函数。

对$y=x^n$，当n为奇数时，为奇函数；而当n 为偶数时，为偶函数。

我们应当注意以下几点：

（1）当自变量变号时，如果函数值也改变符号，则该函数为奇函数；如果自变量改变符号，而函数值不变，该函数便为偶函数。故此，设$y=f(x)$为奇函数，并设 $(a,f(a))$ 为图形上任意一点，则 $(-a,\ -f(a))$ 亦为图形上的点，因而该图形关于原点成中心对称，类似地，可以说明偶函数的图形关于y轴对称。

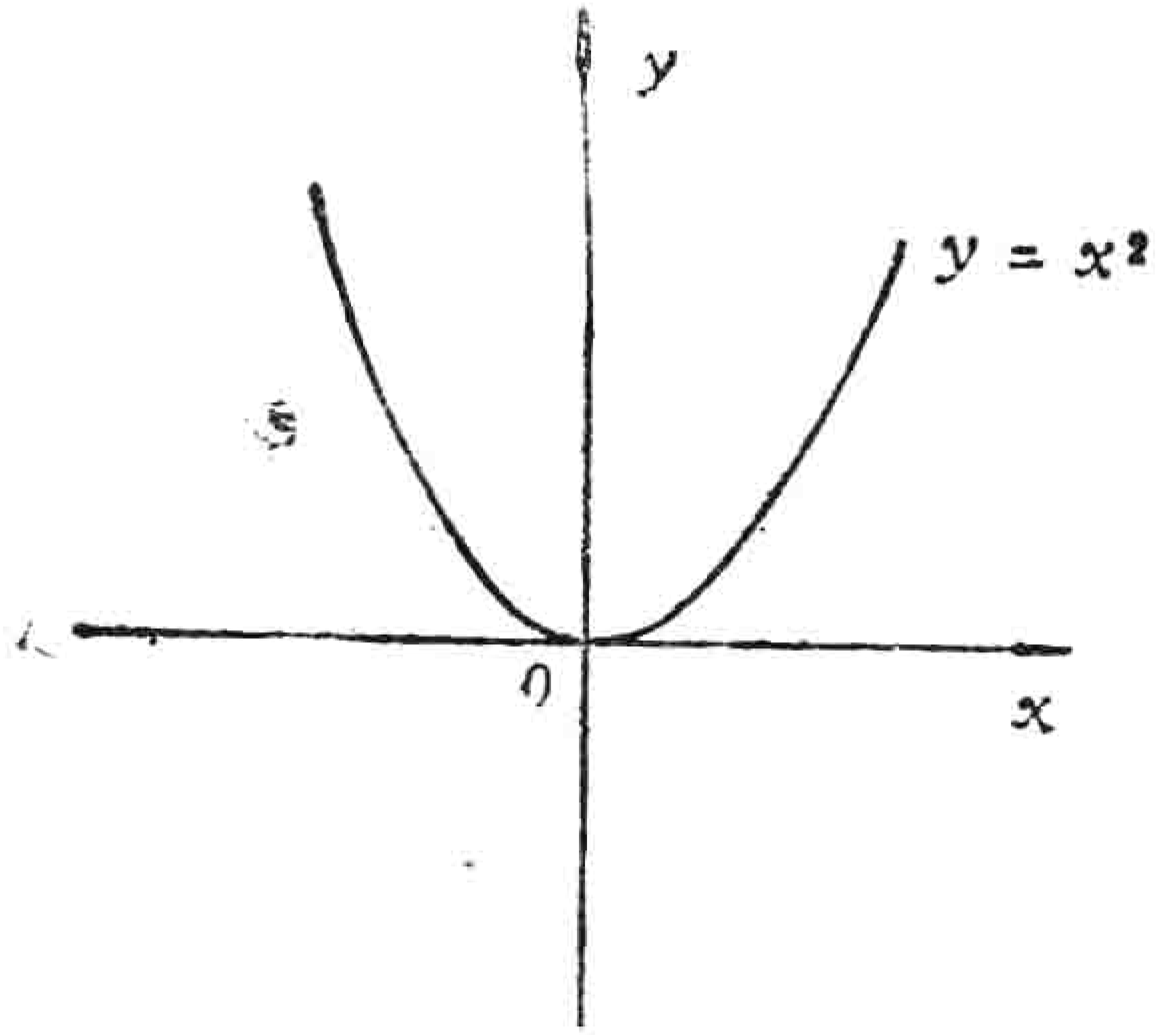

图 1.6

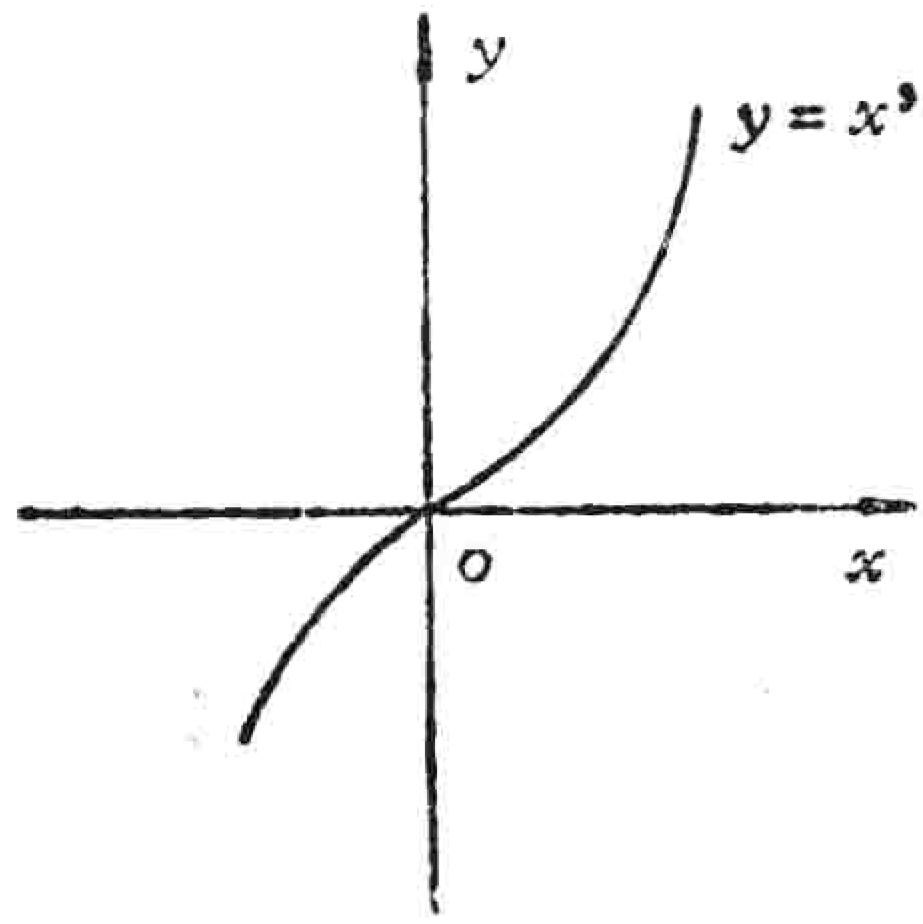

图 1.7

（2）对于一个具体的函数而言，并非非奇即偶或非偶即奇，非奇非偶的函数是大量存在的，例如 $y=x^2+x+1$ 便是。

（3）设 $y=f(x)$ 是任意一个函数，则函数 $f(x)+f(-x)$为偶函数，而函数$f(x)-f(-x)$为奇函数。例如，设 $f(x)=x^2+x+1$，则$f(x)+f(-x)=2x^2+2$ 为偶函数，而 $f(x)-f(-x)=2x$为奇函数。

（4）奇函数的代数和为奇函数，偶函数的代数和为偶函数；两个奇函数之积或两个偶函数之积均为偶函数；一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数。

3　单调函数

设 $y=f(x)$ 为关于 x 的函数，如果对定义域内任何的 $x_1<x_2$，均有$f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或$f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称该函数为单调增函数（或单调减函数），如果在不等号中去掉等号，则称严格单调增函数（或严格单调减函数）。

单调增函数的图象是随 x 的增大而升高，单调减函数的图象是随 x 的增大而降低。

单调增函数和单调减函数统称单调函数。值得注意的