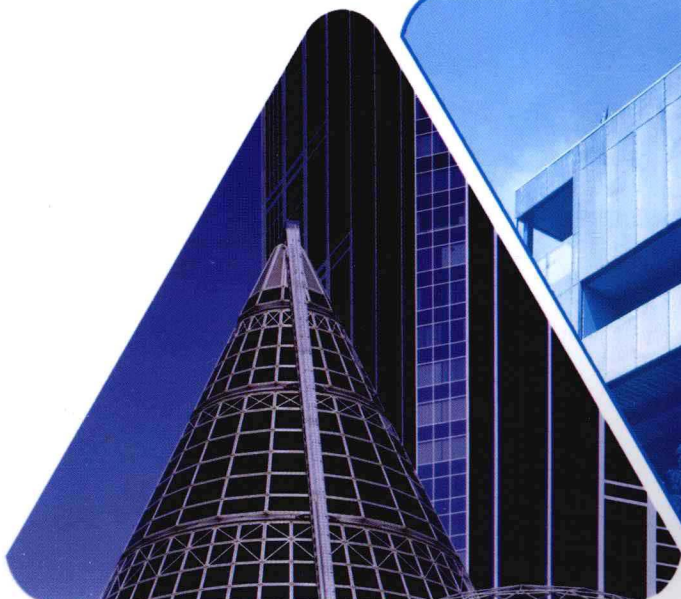




全国普通高等院校土木工程类
实用创新型系列规划教材

结构分析有限元法

张延庆 编著



科学出版社

全国普通高等院校土木工程类实用创新型系列规划教材

结构分析有限元法

张延庆 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书重点介绍了有限元法的基本理论,内容包括能量原理、平面问题、杆件问题、空间及轴对称问题、板壳问题及结构动力学问题。

本书讲述有限元法的基本原理及土木工程结构中的单元分析,单元类型包括平面杆系、空间杆系、平面等参元、空间等参元、薄板弯曲单元和厚薄板通用单元等。全书以论述结构线弹性静力分析为主,最后介绍了结构的振动和动力响应分析。

本书可作为高等院校土木工程专业本科生有限元法课程教材,也可供相关专业的科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

结构分析有限元法/张延庆编著. —北京:科学出版社,2012
(全国普通高等院校土木工程类实用创新型系列规划教材)
ISBN 978-7-03-034524-0

I. ①结… II. ①张… III. ①结构分析—有限元分析—高等学校—教材
IV. ①0342

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第111711号

责任编辑:任加林 / 责任校对:王万红
责任印制:吕春珉 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012年8月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2012年8月第一次印刷 印张:9 1/2

字数:196 000

定价:20.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈铭浩〉)

销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62137026 (HA08)

版权所有,侵权必究

举报电话:010-64030229; 010-64034315; 13501151303

前 言

本书是全国普通高等院校土木工程类实用创新型系列规划教材之一，本教材根据实用创新型系列教材的创意和有限元法在土木工程专业中的作用编写而成，主要内容包括有限元法基础——能量原理、平面问题有限元法、杆件问题有限元法、空间及轴对称问题有限元法、板壳问题有限元法及结构动力学问题等。

本书是编者在为本科生讲授“结构分析的有限元法”课程讲义的基础上编写而成的，编写过程中注意吸取以往的教学经验和有关教材的长处，既保持有限元法基本理论的系统性，又突出工程结构分析的特点。

根据全国普通高等院校土木工程类实用创新型系列规划教材编写的基本原则，本教材内容保持了有限单元法基本理论的系统性的同时，深入浅出，便于学生自学；将有限元单元法基本理论与实际工程结构分析相联系，注重实用性，注意学生工程能力的培养；尽量与土木工程专业相关课程相联系，考虑到结构分析的有限元法课程的前身是计算结构力学，以弹性力学平面弹性问题为例阐述有限元法的分析过程，并详细介绍了杆件结构有限元分析方法；将板壳问题与结构动力学问题分别单列一章进行详细讨论。

编写本书时，总是想起自己学习有限单元法时的情景，编者在此特别感谢导师浙江大学徐兴先生、清华大学龙驭球先生的教诲；同时对所在教研组同仁的鼎力相助，特别是蒋和洋老师的具体指导，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，书中还会存在缺点甚至差错，真情希望读者批评指正。

主要符号

A	面积, 振幅
\mathbf{A}	振幅向量
c	阻尼系数
C	阻尼系数矩阵
D	弹性矩阵
E	弹性常数
E_c	变形能
E_p	结构总势能
F	结点荷载向量, 综合结点荷载向量
F_d	直接结点荷载向量
F_E	等效结点荷载向量
\bar{F}^e	局部坐标系下的单元杆端力向量
F^e	整体坐标系下的单元杆端力向量
F_p	集中荷载
I	截面二次矩 (惯性矩)
\mathbf{I}	单位矩阵
\mathbf{K}	结构刚度矩阵
k^e	整体坐标系下的单元刚度矩阵
\bar{k}^e	局部坐标系下的单元刚度矩阵
k_{ij}	刚度系数
m	质量
M	力矩, 力偶矩, 弯矩
\mathbf{M}	质量矩阵
p	均布荷载集度
q	均布荷载集度
R	广义反力
t	时间
T	周期, 动能
\mathbf{T}	坐标转换矩阵, 表面力
u	x 方向位移

\mathbf{u}	位移向量
v	y 方向位移
V	外力势能
w	z 方向位移
$\mathbf{\Delta}$	整体结点位移向量
δ	结点位移
δ^e	单元结点位移向量
δ_i	结点位移向量
π	结构总势能
μ	泊松比
φ	角位移, 初相角
Φ	振型矩阵
ω	角频率

目 录

主要符号

第 1 章 绪论	1
1.1 有限元法发展概况	1
1.2 有限元法分析过程	3
1.2.1 矩阵位移法	3
1.2.2 有限元法分析过程	5
1.3 有限元法的学习要求和学习方法	7
习题	8
第 2 章 有限元法基础——能量原理	9
2.1 弹性力学平面问题回顾	9
2.1.1 平衡（运动）微分方程	9
2.1.2 小变形的几何方程（位移-应变关系）	10
2.1.3 线弹性体的物理方程（本构关系）	11
2.1.4 边界条件（边界处条件和协调条件）	12
2.2 弹性力学基本方程的矩阵表示	13
2.3 变形体虚位移原理	14
2.3.1 变形体虚位移原理表述	14
2.3.2 弹性平面问题外力总虚功的计算	15
2.3.3 变形体虚位移原理证明	17
2.3.4 虚位移原理的说明	18
2.4 最小势能原理	19
2.4.1 最小势能原理	19
2.4.2 杆系结构总势能表达式	20
2.4.3 由最小势能原理导出位移法方程	20
2.5 里茨法	21
2.5.1 里茨法	21
2.5.2 分片里茨法	24
2.6 小结	25
习题	26
第 3 章 弹性力学平面问题	27
3.1 结构离散化	27

3.1.1	关于结构离散化	27
3.1.2	平面问题三角形划分	28
3.2	3 结点单元位移模式	28
3.2.1	单元的位移模式和广义坐标	29
3.2.2	位移插值函数	30
3.3	单元特性分析	32
3.3.1	单元应变和应力	32
3.3.2	单元体总势能	33
3.3.3	单元刚度矩阵	34
3.3.4	单元等效结点载荷列阵	36
3.4	有限元方程的建立	38
3.4.1	利用最小势能原理建立结构整体刚度方程	38
3.4.2	单元刚度矩阵和等效结点载荷列阵的集成	39
3.4.3	结构刚度矩阵的性质和特点	42
3.5	有限元方程的求解	42
3.5.1	引入位移边界条件	42
3.5.2	有限元方程的求解及应力计算	43
3.5.3	有限元分析步骤	44
3.6	有限元解的性质和收敛准则	45
3.6.1	有限元解的收敛准则	45
3.6.2	收敛准则的物理意义	46
3.6.3	位移元解的下限性质	47
3.7	矩形单元	48
3.7.1	单元的位移模式	48
3.7.2	单元特性分析	48
3.8	等参数单元	49
3.8.1	单元位移模式	49
3.8.2	单元特性分析	50
3.8.3	等效结点力计算	52
3.8.4	应力计算	52
3.8.5	等参单元的完备性和协调性	52
3.9	小结	53
	习题	54
第 4 章	杆系结构问题	56
4.1	杆件系统的离散化	56
4.2	平面桁架单元分析	57
4.2.1	建立位移场 (位移模式)	58

4.2.2	单元特性分析	58
4.2.3	单元刚度方程	59
4.2.4	坐标变换	60
4.3	平面桁架结构整体分析	62
4.3.1	用最小势能原理进行结构整体分析	62
4.3.2	整体刚度矩阵的性质	63
4.3.3	直接刚度法集成整体刚度方程	64
4.3.4	整体刚度方程的求解及杆件内力计算	65
4.4	平面刚架单元	66
4.4.1	杆单元弯曲位移模式	67
4.4.2	杆单元弯曲特性	68
4.4.3	平面刚架单元——考虑轴向变形的弯曲单元	69
4.5	平面刚架结构整体分析	72
4.5.1	用最小势能原理进行结构整体分析	73
4.5.2	直接刚度法集成整体刚度方程	73
4.5.3	整体刚度方程的求解及杆件内力计算	74
4.6	其他杆件单元	76
4.6.1	连续梁单元	76
4.6.2	考虑剪切时的平面自由式单元	77
4.6.3	扭转杆单元	79
4.6.4	空间桁架单元	80
4.6.5	空间刚架单元	80
4.6.6	交叉梁单元	81
4.7	小结	82
	习题	83
第5章	空间及轴对称问题	85
5.1	空间结构离散化	85
5.2	空间四面体单元	87
5.2.1	位移函数	87
5.2.2	应变和应力矩阵	88
5.2.3	单元刚度矩阵和等效结点荷载	90
5.3	其他空间单元	91
5.3.1	8结点线性单元	91
5.3.2	20结点二次单元	91
5.3.3	三维等参数单元	92
5.4	轴对称问题	93
5.4.1	轴对称结构离散化	93

5.4.2	三角形环单元位移模式	94
5.4.3	三角形环单元特性	94
5.4.4	单元刚度矩阵	96
5.4.5	单元等效结点荷载	96
5.5	小结	98
	习题	99
第6章	弹性板壳问题	100
6.1	弹性薄板分析	100
6.1.1	基本假设	100
6.1.2	薄板变形和内力	100
6.1.3	薄板问题基本方程	102
6.1.4	关于薄板弯曲有限元计算	103
6.2	矩形薄板单元	104
6.2.1	单元位移模式	104
6.2.2	单元特性分析	106
6.2.3	单元收敛性分析	108
6.3	Mindlin 板单元	109
6.3.1	Mindlin 板理论	109
6.3.2	Mindlin 板单元	110
6.4	厚薄板通用单元	111
6.4.1	利用计算几何曲面构造矩形板单元	111
6.4.2	边界曲线的拟合	112
6.5	平板型壳元	113
6.5.1	壳体结构离散化	113
6.5.2	用于一般壳体的平面壳元	114
6.5.3	壳体单元的坐标变换	115
6.6	小结	117
	习题	118
第7章	动力学问题	119
7.1	动力学问题基本方程	119
7.1.1	弹性动力学的基本方程	119
7.1.2	动力学问题有限元方程	120
7.1.3	关于动力方程的求解	121
7.2	质量矩阵和阻尼矩阵	122
7.2.1	协调质量矩阵和集中质量矩阵	122
7.2.2	振型阻尼矩阵	125

7.3 直接积分法	126
7.3.1 中心差分法	126
7.3.2 Newmark 方法	128
7.4 振型叠加法	129
7.4.1 求解系统的固有频率和固有振型	130
7.4.2 位移基向量的变换	131
7.4.3 求解单自由度系统振动方程	132
7.4.4 振型叠加得到系统的响应	132
7.5 大型特征值问题的解法	133
7.5.1 反迭代法	134
7.5.2 子空间迭代法	136
7.6 小结	138
习题	139
主要参考文献	140

第 1 章 绪 论

工程中存在大量的力学问题，这些问题最终可归结为求解数学物理方程边值或初值问题。由于工程问题的复杂性，求得解析解答在数学上存在无法逾越的困难，只能求数值解。有限元法是工程中应用广泛的数值方法。

1.1 有限元法发展概况

土木工程中的主要问题是分析工程结构物的力学性能，如结构工程的大变形、地下工程的流体力学和流固耦合作用、交通学科中的路面层状介质的力学性质等，都可以看作工程中的力学问题，其理论研究要求求解数学物理方程边值或初值问题。由于实际问题比较复杂，只有较为简单、规则的问题才能获得解析解答，而大量的实际工程分析问题由于数学上的困难无法得到解析解，只能求得数值解。

结构力学中的矩阵位移法是用矩阵来表达，用计算机来求解，因此可用于建筑工程的复杂刚架等结构的分析。但这些结构是由杆件所组成的，杆件的特性可通过经典的位移法分析来建立。有限单元法与矩阵位移法的分析步骤相似，将其从只能分析具有已知单元结点力——结点位移关系的杆系结构，扩展到非杆系的连续体结构。

有限单元法基本思想的提出，可以追溯到 Courant 在 1943 年的工作，他第一次假设翘曲函数在一个人为划分的三角形单元集合体的每个单元上为简单的线性函数，求得了 St. venant 扭转问题的近似解。一些应用数学家、物理学家和工程师由于各种原因也都涉足过有限单元法的概念。但由于当时计算技术的制约，不能用来解决工程实际问题，因而也就没有引起科学界及工程界的重视。到了 20 世纪 60 年代，随着电子计算机技术的发展，制约有限单元法发展的条件消除了，从而导致了有限单元法的飞速发展。

现代有限单元法的第一个成功尝试，是 Turner、Clough 等人 1956 年在分析飞机结构时得到的。他们将矩阵位移法的方法、原理推广应用于弹性力学平面问题，将一个弹性连续体假想地划分为一系列三角形的所谓单元，不像里茨法那样在整个求解域内构造约束所允许的位移试函数，而是以三角形单元三个角顶点结点的位移作为优先解决的基本未知量，在满足一定条件下对整个求解域构造分片连续的位移场，这使原来建立位移场的困难得到了解决。继而又解决了单元结点力和结点位移之间单元特性关系（单元刚度方程），从而用三角形单元求得了平面应力问题的近似解答。他们的这些研究工作开创了利用计算机求解复杂平面弹性问题的新局面。1960 年，Clough 进一步处理了平面弹性问题，并第一次提出了“有限单元法”（Finite element method）的名称。

早期的有限单元法是建立在虚位移原理或最小势能原理基础上的，这对人们清楚

地理解有限单元法的物理概念是很有帮助的，但是它只能处理一些比较简单的实际问题。1963~1964年，Besseling、Melosh、Jones、卞学璜等人的研究表明，利用各种变分原理可以建立起更灵活、适应性更强、计算精度更高的有限单元法。这些成果大大刺激了变分原理（包含广义变分原理及其修正广义变分原理等）的研究和发展，先后出现了一系列基于变分原理的新型有限单元模型，如各种混合元、杂交元、非协调元、广义协调元等。

许多变分原理都和相应的数学物理方程相对应，但也有一些问题可能建立了数学物理方程和定解条件，但却没有对应的变分泛函。从20世纪60年代后期开始，人们开始研究加权余量（也称为加权残值、加权残数）法。它是按某种规则建立问题的试函数，根据其对控制方程、边界条件的满足程度，通过建立余量加权意义下的最小来获得问题的数值近似解答。利用加权余量法中的伽辽金（Galerkin）法也可建立由基于变分原理所得到的相应方程，因此被称为加权余量有限元。

从有限单元法提出时起，如何建立更好的单元场变量，从而在相同网络划分下提高计算精度和效率，始终是计算力学工作者的一项研究任务。基于样条函数各种优良特点，人们开始将样条函数引入场变量的建立和数值分析，并进一步建立了样条有限元。

随着所分析问题的大型化、复杂化，除了需要进一步研究各种高精度单元外，考虑到多年来力学研究的成果已经取得部分“精确解”，人们开始利用这些成果将有限元的离散思想和经典解法的解析结果结合起来，以便获得效率、精度更高的方法。研究的结果就产生了一类“半解析”的数值方法，如有限条法、组合条元法、有限线法、边界单元法等。

半个多世纪以来，有限单元法的应用范围已由弹性力学平面问题扩展到空间问题、板壳问题，由静力平衡问题扩展到动力问题、稳定问题、波动问题和接触问题。分析的对象从弹性材料扩展到弹塑性、黏弹性、黏塑性和复合材料等问题。由小变形的几何线性问题扩展到各种大变形的几何非线性复杂问题。由单一非线性的问题，发展到包括材料非线性、几何非线性和边界非线性等的力学、传热学、电磁学等连续介质力学领域。从确定性分析的有限单元法，发展到了随机有限元分析。从已知系统和激励求解系统响应的“正分析”，发展到了根据响应和系统识别激励，或者根据响应和激励识别系统的“反问题”。在工程分析中的作用，从分析和校核已经扩展到优化设计和智能计算机辅助设计技术相结合的程度。有限单元法半个多世纪的发展，几乎渗透到了科学、工程的方方面面。可以预计，随着现代力学、计算数学和计算机技术等学科的发展，有限单元法作为一个具有巩固理论基础和广泛应用的数值分析工具，必将在国民经济建设和科学技术发展中发挥更大的作用，其自身也将得到进一步的完善和发展。

随着有限单元法的发展和应用，人们还在不断探索效率更高、更精确、更可靠的新型单元，以解决实际应用中遇到的新问题，并在这一过程中进一步拓展有限单元法的应用领域。

1.2 有限元法分析过程

矩阵位移法是杆件结构的有限元法，可以说结构分析的有限元法是由矩阵位移法发展而来的。

1.2.1 矩阵位移法

矩阵位移法着眼于用计算机进行计算，是矩阵形式的位移法。将位移法典型方程写成标准的线性方程组的矩阵形式

$$\mathbf{KA} = \mathbf{F} \quad (1.1)$$

式(1.1)表示结构结点位移与结点力之间的关系，是矩阵位移法的基本方程，称为刚度方程， \mathbf{K} 称为刚度矩阵。矩阵位移法的主要任务是利用单元集成规则形成结构的整体刚度矩阵。

矩阵位移法的分析要点是先离散，后集成。分析过程是将每个杆件取作一个单元，在每个单元上进行详细分析；然后将这些单元按变形协调条件集合成整体，形成问题的代数方程。在一分一合的过程中，把复杂结构的计算问题转化为简单单元的分析 and 集合问题。矩阵位移法的基本步骤：一是单元分析，二是整体分析。单元分析的任务是建立单元刚度方程，形成单元刚度矩阵；整体分析的主要任务是将单元刚度矩阵按照刚度集成规则形成整体刚度矩阵，建立整体结构的基本方程，进而求出解答。

1. 单元分析

从结构中取出任一段等截面直杆，记为单元 e ，单元两个端点分别标上编码1和2，由端点1到端点2的方向规定为杆轴的正方向，端点1称为始端，端点2称为末端。在杆件上建立坐标系 $\bar{x}\bar{y}$ ，其中 \bar{x} 轴与杆轴重合。在局部坐标系中，单元端点位移分量按顺序排列形成单元杆端位移向量 $\bar{\Delta}^e$ ，同理杆端力分量按顺序排列形成单元杆端力向量 $\bar{\mathbf{F}}^e$ 。按照结构力学分析方法，忽略轴向受力状态和弯曲受力状态之间的相互影响，可得

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \bar{\mathbf{k}}^e \bar{\Delta}^e \quad (1.2)$$

此式是由单元杆端位移求单元杆端力的方程，称为在局部坐标系中的单元刚度方程。矩阵 $\bar{\mathbf{k}}^e$ 称为局部坐标系中的单元刚度矩阵，其中每个元素称为单元刚度系数，表示单位杆端位移所引起的杆端力。

在复杂结构中，各个杆件的杆轴方向不相同，各自的局部坐标系也不相同。为便于进行整体分析，必须选一个统一的坐标系，称为整体坐标系，用 xy 表示。局部坐标系中的杆端力 $\bar{\mathbf{F}}^e$ 与整体坐标系中杆端力 \mathbf{F}^e 由坐标变换 $\bar{\mathbf{F}}^e = \mathbf{T}\mathbf{F}^e$ 联系，其中单元坐标变换矩阵 \mathbf{T} 为正交矩阵。单元杆端力与杆端位移在整体坐标系中的关系式可写为

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{k}^e \Delta^e \quad (1.3)$$

式中， \mathbf{k}^e 称为在整体坐标系中的单元刚度矩阵，可以由局部坐标系中单元刚度矩阵 $\bar{\mathbf{k}}^e$ 与单元坐标变换矩阵 \mathbf{T} 计算得

$$\mathbf{k}^e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{k}}^e \mathbf{T} \quad (1.4)$$

整体坐标系中的单元刚度矩阵 \mathbf{k}^e 与 $\bar{\mathbf{k}}^e$ 同阶，且具有相同的性质。

2. 整体分析

整体分析的任务是建立整体刚度方程，其核心是推导整体刚度矩阵。为便于分析过程的程序化，按单元逐次进行。

首先，考虑单元①的单独贡献，令其他单元单元的刚度为零，此时其他单元虽然有变形，但不产生结点力，因此，整个结构的结点力是由单元①单独产生的，记为

$$\mathbf{F}^{\textcircled{1}} = \mathbf{K}^{\textcircled{1}} \Delta \quad (1.5)$$

式中， $\mathbf{K}^{\textcircled{1}}$ 表示单元①对整体刚度矩阵提供的贡献，可以称为单元①的贡献矩阵。

其次考虑单元②，可得 $\mathbf{F}^{\textcircled{2}} = \mathbf{K}^{\textcircled{2}} \Delta$ 。同理计算所有单元的单贡献矩阵。

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{K}^e \Delta \quad (1.6)$$

最后，将所有单元的节点力叠加，即得出结构的结点力 \mathbf{F} 为

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}^e = \sum \mathbf{K}^e \Delta = \mathbf{K} \Delta \quad (1.7)$$

由此得出整体刚度矩阵 \mathbf{K} 为

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}^e \quad (1.8)$$

式 (1.8) 可以由单元集成法“边定位、边累加”直接形成 \mathbf{K} 。在整体分析中，结点位移在结构中统一进行编码，称为总码。由单元的结点位移总码组成的向量称为“单元定位向量”，记为 λ^e ，定位规则是 $k_{(i)(j)}^e \rightarrow K_{\lambda_i \lambda_j}^e$ 。将每个 \mathbf{k}^e 的元素按单元定位向量 λ^e 定位并直接在 \mathbf{K} 中累加。

3. 刚度方程的求解及内力计算

利用单元刚度集成法求得的整体刚度矩阵称为原始刚度矩阵。对于刚架等一般结构，由于没有考虑支承条件，结构可以产生刚体位移，刚度矩阵是奇异的，逆矩阵不存在，即由结点荷载不能确定结点位移，刚度方程不能求解。

实际工程结构中，某些结点位移被约束为零，与此相应的结点力为约束反力。将结点位移按约束情况重新排列，则整体刚度方程可表示为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{pR} \\ \mathbf{K}_{Rp} & \mathbf{K}_{RR} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_P \\ \mathbf{F}_R \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

式中， Δ 为待求结点位移； \mathbf{F}_P 为结点荷载向量； \mathbf{F}_R 为约束反力。上式可分解为

$$\mathbf{K}_{pp} \Delta = \mathbf{F}_P \quad (1.10)$$

$$\mathbf{K}_{Rp} \Delta = \mathbf{F}_R \quad (1.11)$$

利用方程 (1.11) 可以确定支承反力。方程 (1.10) 既为实际结构的位移法基本方程——刚度方程， \mathbf{K}_{pp} 为结构的整体刚度矩阵。

求解方程 (1.10) 即可解得结构的结点位移，并进一步回到单元中，用已知位移，按单元刚度方程，求各单元结点与位移对应的结点力，与内部荷载叠加，得出单元内力。

1.2.2 有限元法分析过程

1. 结构离散化

应用有限元法来分析工程问题的第一步，首先是将结构进行离散化。其过程就是将待分析的结构（或更数学化一点也可称为求解域）用一些假想的线或面进行切割，使其成为具有选定切割形状的有限个单元体（注意单元体和材料学中的微元体是根本不同的，它的尺度是有限值而不是微量）。这些单元体被认为仅仅在单元的一些指定点处相互连接，这些单元上的点则称为单元的结点。这一步的实质也就是用单元的集合体来代替原来待分析的结构。

结构离散化的具体步骤：为便于理论推导和计算分析，应建立单元和整体坐标系，对单元和结点进行合理的编号，为后续有限元分析准备出所必需的数据化信息。

目前市面上有各种类型的有限元分析软件，一般都具有友好的用户图形界面和强大的图形输入、输出计算信息的功能，使用者应用这些软件越来越方便。即便如此，使用这些大型软件的第一步仍需“建模”工作，即建立离散化模型和准备所需的数据。

2. 确定位移模式

结构离散化后，接下来是对结构离散化所得的任一典型单元进行单元分析。为此，首先必须对该单元中任意一点的位移分布做出假设，即在单元内用只具有有限自由度的简单位移代替真实位移。对位移来说，就是将单元中任意一点的位移近似表示成该单元结点位移的函数，该位移称为单元的位移模式或位移函数。位移函数的假设合理与否，将直接影响到有限元分析的计算精度、效率和可靠性。目前比较常用的方法是以多项式作为位移模式，这主要是因为多项式的微积分运算比较简单，而且任何光滑函数都可以用无限项的泰勒级数多项式来展开。位移模式的合理选择，是有限单元法的最重要内容之一，所谓创建一种新型的单元，位移模式的确定是其核心内容。

不管哪类位移元，采用矩阵符号并建立相应的矩阵方程，单元中任意一点的位移矩阵 \mathbf{u} ，均可用该单元结点位移排列成的矩阵（称为单元结点位移矩阵） δ^e 表示为

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\delta^e \quad (1.12)$$

式中， \mathbf{N} 为形函数矩阵，其元素是坐标的函数。

3. 单元特性分析

单元位移模式确定后，就可以对单元应变分析、应力分析，并得出单元刚度方程。

1) 利用应变和位移之间关系即几何方程，将单元中任意一点的应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 用待定的单元结点位移 δ^e 来表示，即建立矩阵方程

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\delta^e \quad (1.13)$$

式中， \mathbf{B} 为变形矩阵（也可称为应变矩阵），一般其元素也是坐标的函数。

2) 利用应力和应变之间关系即物理方程，推导出用单元结点位移 δ^e 表示的单元中任意一点应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 的矩阵方程

$$\sigma = DB\delta^e = S\delta^e \quad (1.14)$$

式中, D 为由单元材料弹性常数所确定的弹性矩阵, $S = DB$ 一般称为应力矩阵, 它的元素一般也是坐标的函数。

3) 利用虚位移原理或最小势能原理 (对其他类型的一些有限元将应用其他对应的变分原理等) 建立单元刚度方程

$$K^e \delta^e = F^e + F_E^e \quad (1.15)$$

F_E^e 为作用在该单元上的外荷载转换成的、作用于单元结点上的单元等效荷载矩阵; K^e 由虚位移原理或最小势能原理推导所得, 是将单元结点位移和单元结点力、单元等效结点荷载联系起来的联系矩阵, 称为单元刚度矩阵。本书中不管什么问题的位移元, 其计算公式一般均为

$$K^e = \int_{\Omega_e} B^T D B d\Omega \quad (1.16)$$

在积分式中 Ω_e 视所讨论的问题而异, 对平面问题是单元的面积, 对空间问题则表示单元的体积等。

在上述位移型有限元三个方面的工作中, 从编制计算程序用计算机求解角度来说, 核心工作是建立单元刚度矩阵和单元等效结点荷载矩阵。

4. 整体分析——建立表示整个结构结点平衡的方程组

有了单元特性分析的结果, 对各单元仅在结点相互连接的单元集合体用虚位移原理或最小势能原理进行推导, 可以建立起表示整个结构 (实质上是单元集合体) 结点平衡的方程组, 即整体刚度方程

$$K\Delta = F_E + F_d = F \quad (1.17)$$

式中, K 为整体刚度矩阵; F 为整体综合结点荷载矩阵 (它包含直接结点荷载 F_d 与等效结点荷载 F_E 两部分); Δ 为结构整体结点位移矩阵。通过所谓直接刚度法, 可以用“对号入座”方式由各单元的单元刚度矩阵和单元等效结点荷载矩阵集成整体刚度矩阵和整体等效结点荷载矩阵。

该步计算细节取决于所求解的问题和所编制计算机程序的处理方法, 对于一些问题将存在坐标 (局部与整体) 转换问题, 对于一些问题还存在位移边界条件的引入, 等等。

5. 求解方程及输出结果

对线弹性计算问题, 整体刚度方程式 (1.17) 一般是一组高阶的线性代数方程组。由于整体刚度矩阵具有带状、稀疏和对称等特性, 在有限元发展过程中, 人们通过研究, 建立了许多不同的存储方式和计算方法, 目的是节省计算机的存储空间和提高计算效率。利用相应的计算方法, 即可求出全部未知的结点位移。

求出结构全部结点位移后, 利用分析过程中已建立的一些关系, 即可以进一步计算单元中的应力或内力, 并以数表或图形的方式输出计算结果。依据这些结果, 就可以进行具体结构的进一步设计。实际上, 当前的许多计算机辅助设计软件, 已经将有